



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N°1:

Пусть a - цифра, из которой состоит четырёхзначное число A

$$\Rightarrow A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

Так как a - цифра, то $a \in \mathbb{N}$ и $a \leq 9$

По условию, $A \cdot B \cdot C = n^2$, где n - какое-то натуральное число

$$\Rightarrow n^2 = 1111a \cdot B \cdot C; \quad 1111 = 101 \cdot 11$$

$$\Rightarrow n^2 = 101 \cdot 11a \cdot B \cdot C$$

Так как 101 - простое число, то чтобы произведение $101 \cdot 11a \cdot B \cdot C$ было квадратом натурального числа, нужно, чтобы числа a , B или C содержали в своём разложении на простые множители хотя бы ещё один множитель, равный 101

a не может содержать в разложении на простые множители число 101, так как $a \leq 9$.

~~B~~
 C тоже не может содержать в разложении на простые множители число 101, так как C - двузначное число, и оно меньше 101.

А вот число B ~~может~~ является трёхзначным; тогда оно может быть равно 101, 202, 303, ..., 808, 909. Но по условию хотя бы одна цифра числа B равна 1.

$$\Rightarrow B = 101 \Rightarrow n^2 = 101^2 \cdot 11a \cdot C$$

Число 11 - тоже простое, поэтому a или C



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

должны содержать в своём разложении на простые множители хотя бы ещё один множитель, равный 11

а не может содержать 11 в разложении на простые множители, так как $a \leq 8$.

А вот число C - двузначное; тогда C может быть равно 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Но по условию хотя бы одна цифра числа C равна 5 $\Rightarrow C = 55$

$$\Rightarrow n^2 = 101^2 \cdot 11a \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5a$$

$$\text{Тогда } a = 5 \Rightarrow n^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5^2 = (101 \cdot 11 \cdot 5)^2 \\ \Rightarrow A = 5555$$

Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N^o2:

$$x, y > 0 \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

По условию, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$$\Rightarrow \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

Так как $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y+x > 0 \Rightarrow y+x+1 > 1$

$\Rightarrow$ На $y+x+1$ можно сократить

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$0 = 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3x - 3y = 9$$
$$x - y = 3$$

$$\Rightarrow (x-y)^3 = 3^3$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 27$$

$$x^3 - 3xy \overset{3}{(x-y)} - y^3 = 27$$

$$\Rightarrow x^3 - 9xy - y^3 = 27$$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy = 27 \text{ - единственное возможное значение}$$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из графика легко посчитать количество парнопарных пар $(x; y)$. Парнопарные пары на графике отмечены черными точками, одна непарнопарная пара $(-4; -9)$ отмечена белой точкой.

Имеем, таким образом, 10 линий по 5 точек в каждой, всего 50, и 9 линий по 4 точки в каждой, всего 36
 $\Rightarrow 50 + 36 - 1 = 85$ пар

Что же касается семейства прямых $y = 3x + 2k + 1$, то дополнительных новых пар точек нам оно нам не даст, так как любую точку, принадлежащую $y = 3x + 2k + 1$ можно путём правильного подбора n свести к какой-то точке из множества $y = -x + 2n + 1$, для числа $-x$ и $3x$ имеют одинаковую чётность.

$\Rightarrow$ Ответ: а) $(p; -p + 2n + 1); (p; 3p + 2k + 1);$
 $p \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

д) 85 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выразим из них y :

$$y = -x + 2n + 1$$

$$y = 3x - 2k + 1$$

Так как k - это любое целое число, то мы можем заменить $-2k$ на $+2k$. Точно также мы можем заменить -1 на $+1$ в данном случае, ведь логика второго ответа ($y = 3x - 2k - 1$) заключается в том, по сути, что мы к $3x$ прибавляем любое целое нечётное число. А любое целое нечётное число можно записать и как $-2k - 1$, где $k \in \mathbb{Z}$, и как $2k + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x + 2n + 1 \\ y = 3x + 2k + 1 \end{cases} ; n, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Если взять x равным некоторому действительному числу p , то к нему в пару подойдёт любая y из множества $-p + 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$, и из множества $3p + 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (p; -p + 2n + 1); (p; 3p + 2k + 1); p \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Так как $0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi$ и $0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq \pi$, то

$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$ - истинна при любых допустимых x и y . Равенство достигается только в том случае, если $\arccos \frac{x}{4} = \pi$ и $\arccos \frac{y}{9} = \pi$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

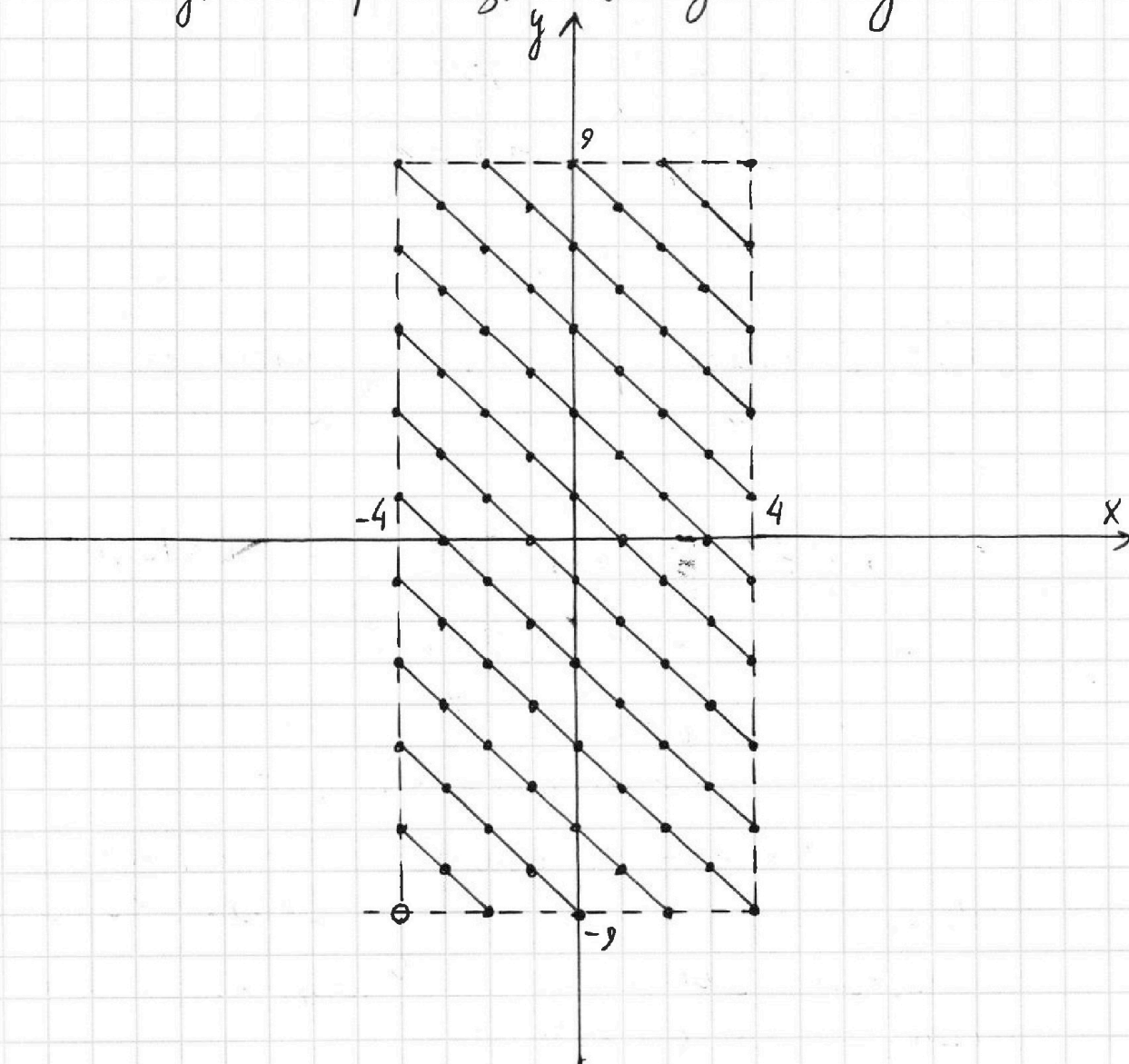
$$\Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ пара $(-4; -9)$ нам не подходит.

Выясним ОДЗ для x и y : $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 4; \quad -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq y \leq 9$$

Начертим в координатах $(x; y)$ семейство прямых $y = -x + 2n + 1$ при различных n и отметим тут же границы ОДЗ для x и y :





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3:

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x;$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

Возможны два случая:

$$1) \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n \Rightarrow x+y = 2n+1$$

2) $\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \neq 0 \Rightarrow$ разделим обе части уравнения на $\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$:

$$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right)} - \cancel{\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)} = \cancel{\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right)} + \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$\Rightarrow 2 \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0; \cos \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x - y = 2k+1$$

Итак, мы получили два случая:
 $x+y = 2n+1$ и $3x-y = 2k+1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4:

Пусть x - количество билетов, которые выданы в конце месяца, y - количество одиноклассников.

Если у нас есть x билетов и y учеников, то x штук из y без учета порядка можно выбрать C_y^x способами:

$$C_y^x = \frac{y!}{x! \cdot (y-x)!}$$

При этом у нас есть двое учеников - Петя и Вася, которые хотят вместе пойти на концерт. Тогда благоприятными вариантами для нас будут являться те варианты, в которых два билета из x достались Пете и Васе, а остальные $x-2$ билета были как-то распределены между $y-2$ учениками.

$$\Rightarrow \text{Всего благоприятных вариантов } C_{y-2}^{x-2} = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-2-x+2)!} = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!}$$

$\Rightarrow$ Вероятность Васе и Пете вместе пойти на концерт равна:

$$\frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!} \cdot \frac{x! \cdot (y-x)!}{y!} = \frac{x! \cdot (y-2)!}{y! \cdot (x-2)!} = \frac{(x-2)! \cdot (x-1) \cdot x \cdot (y-2)!}{(y-2)! \cdot (y-1) \cdot y \cdot (x-2)!} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В начале месяца, когда ~~вероятность~~ чи-
сло диаметров было равно 4, вероятность вы-
падения равна $\frac{4 \cdot (4-1)}{y(y-1)} = \frac{12}{y(y-1)}$. Затем число
диаметров увеличили до x , и вероятность
стала $\frac{x(x-1)}{y(y-1)}$

$$\text{По условию: } \frac{12}{y(y-1)} \cdot 3,5 = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 3,5 = x(x-1)$$

$$42 = x(x-1) \Rightarrow x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 42 = 169 = 13^2$$

$$x_1 = \frac{1+13}{2} = 7 \quad x_2 = \frac{1-13}{2} = -6$$

Очевидно, что x не может быть отрица-
тельным
 $\Rightarrow x = 7$

Ответ: 7 диаметров



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ Тогда максимальная длина $AB + CD$ равна $2 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

$$\Rightarrow P_{\max} = L_0 + 4\sqrt{7} = 3\pi + 4\sqrt{7} = M$$

Такой периметр достигается при $t=2 \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 2$
 $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$$1+\cos 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$; достигается
при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ Дуга $\cup GF$ равна $\frac{\pi}{2}$ (в градусной мере), а дуги $\cup BM$, $\cup EC$, $\cup CB$ в сумме дают дугу с градусной мерой $\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ Периметр "круглой" части границы фигуры Φ равен длине полуокружности радиуса 3. Обозначим ее L_0

$$L_0 = \pi \cdot 3 = 3\pi$$

Осталось найти длину отрезков CD и AB . Для этого поставим в уравнение окружности $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2\cos\alpha)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - 4\cos^2\alpha \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \text{Длина } CD \text{ равна } 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

Аналогично, длина AB :

$$x^2 + 4\sin^2\alpha = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AB + CD &= 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = \\ &= 2(\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}) \end{aligned}$$

Исследуем функцию

$$f(\alpha) = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = \sqrt{5 + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{9 - 4\cos^2 x} = \\ = \sqrt{5 + 4\cos^2 x} + \sqrt{9 - 4\cos^2 x}$$

Замена $t = 4\cos^2 x$; $t \in [0; 4]$

$\Rightarrow f(t) = \sqrt{5+t} + \sqrt{9-t}$ (т.к. $\cos^2 x \in [0; 1]$ то $4\cos^2 x \in [0; 4]$)

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+5}} + \frac{1}{2\sqrt{9-t}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{t+5}} - \frac{1}{2\sqrt{9-t}} = \\ = \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5}}{2\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{9-t}}$$

Ищем знак производной

$$\frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5}}{2\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{9-t}} \geq 0$$

Знаменатель всегда > 0

$$\Rightarrow \sqrt{9-t} - \sqrt{t+5} \geq 0$$

$$\sqrt{9-t} \geq \sqrt{t+5}$$

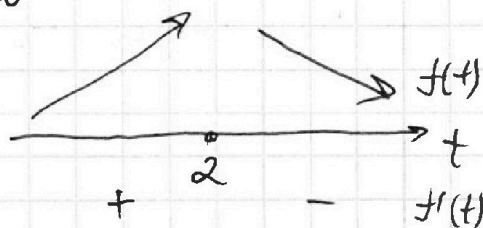
$$9-t \geq t+5$$

$$-2t + 9 - 5 \geq 0$$

$$-2t + 4 \geq 0$$

$$-t + 2 \geq 0$$

$$-(t-2) \geq 0$$



$\Rightarrow t = 2$ - точка максимума
Тогда $f_{\max} = f(2) = \sqrt{5+2} + \sqrt{9-2} = \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача N°6

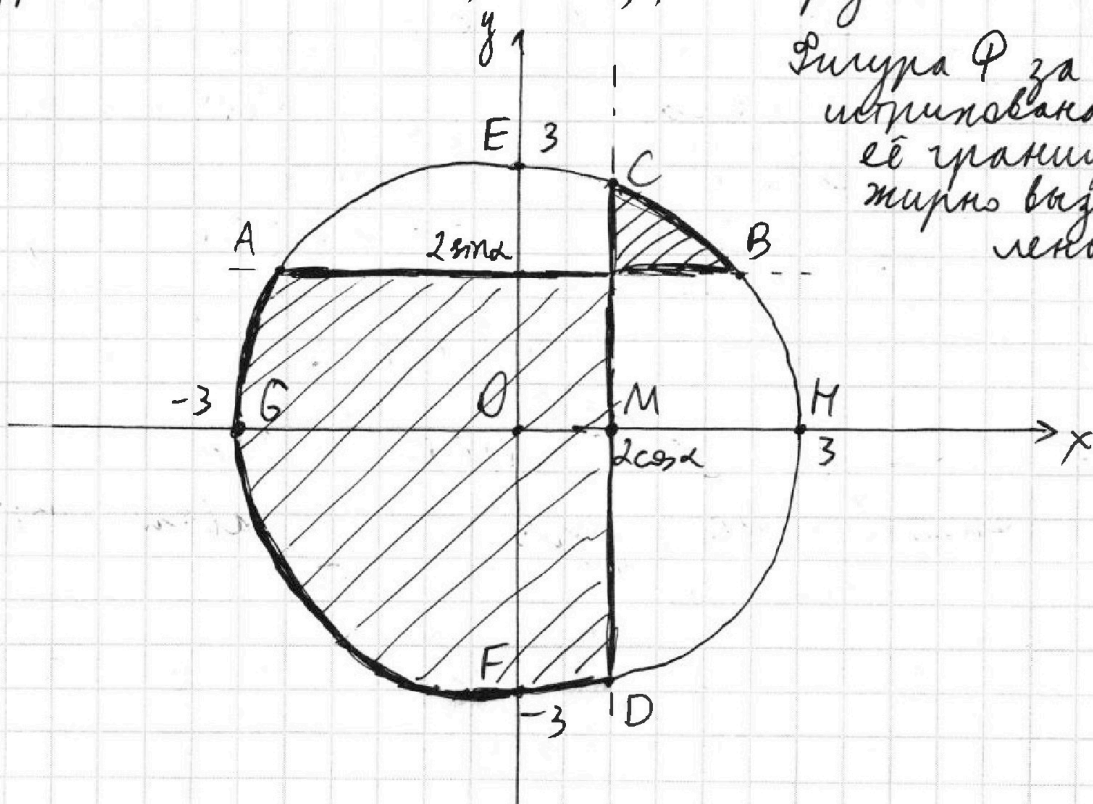
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) & (1) \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) имеем:

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

; уравнение (2) задаёт
круг радиуса 3 с
центром в начале
координат

Построим множество, описываемое
уравнениями (1) и (2), в координатах x, y :



Фигура Φ за-
штрихована,
её границы
жирно выде-
лены.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся в промежутке $[-1; 1]$, то $-2 \leq 2 \sin \alpha \leq 2$ и $-2 \leq 2 \cos \alpha \leq 2$

$\Rightarrow$ Прямые $y = 2 \sin \alpha$ и $x = 2 \cos \alpha$ будут при любом α пересекаться внутри круга $x^2 + y^2 \leq 9$.

Обозначим точки пересечения прямой $y = 2 \sin \alpha$ с окружностью как A и B , прямую $x = 2 \cos \alpha$ с окружностью — как C и D , а точки пересечения окружности с осями X и Y обозначим как G, E, H и F .

Взглянем на график. Пусть точка O — начало координат. Тогда ~~углы~~ ~~треугольников~~ $\triangle OEC$ и $\triangle OFD$ ~~существует равенства~~ ~~углов~~ $\angle EOC$ и $\angle FOD$

Пусть точка M — точка пересечения CD и оси X

Тогда $\triangle OCM = \triangle OMD$ ($OC = OD$, OM — общая; $\angle OMC = \angle OMD = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \angle COM = \angle DOM; \quad 90^\circ = \angle COM + \angle EOC \\ 90^\circ = \angle DOM + \angle FOD$$

$$\Rightarrow \angle EOC = \angle FOD$$

$\Rightarrow$ Дуги UEC и VFD равны

Аналогично, дуга VAG равна UBH

$$\Rightarrow VAG + VFD = UBH + UEC$$

$$\Rightarrow VAG + VGF + VFD = UBH + UEC + VGF$$

$$\Rightarrow VAG + VGF + VFD + VCB = UBH + UEC + VCB + VGF$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x - y}{2} = \frac{1}{2} + k \quad | \cdot 2$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

$$3x - y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2n + 1 - x$$

$$y = 3x - 2k - 1$$

$$y = 3x + 2k + 1$$

$$y = -x + 2n + 1$$

$$y = 3x + 2k + 1$$

$$\left[\begin{array}{l} (p; -p + 2n + 1) \\ (p; 3p + 2k + 1) \end{array} \right]; n, k \in \mathbb{Z}$$

$$p \in \mathbb{R}$$

$$d) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\pi - \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$-\arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{9} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{9} > -\pi$$

$$-1 \leq y \leq 9$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \quad 0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq \pi$$

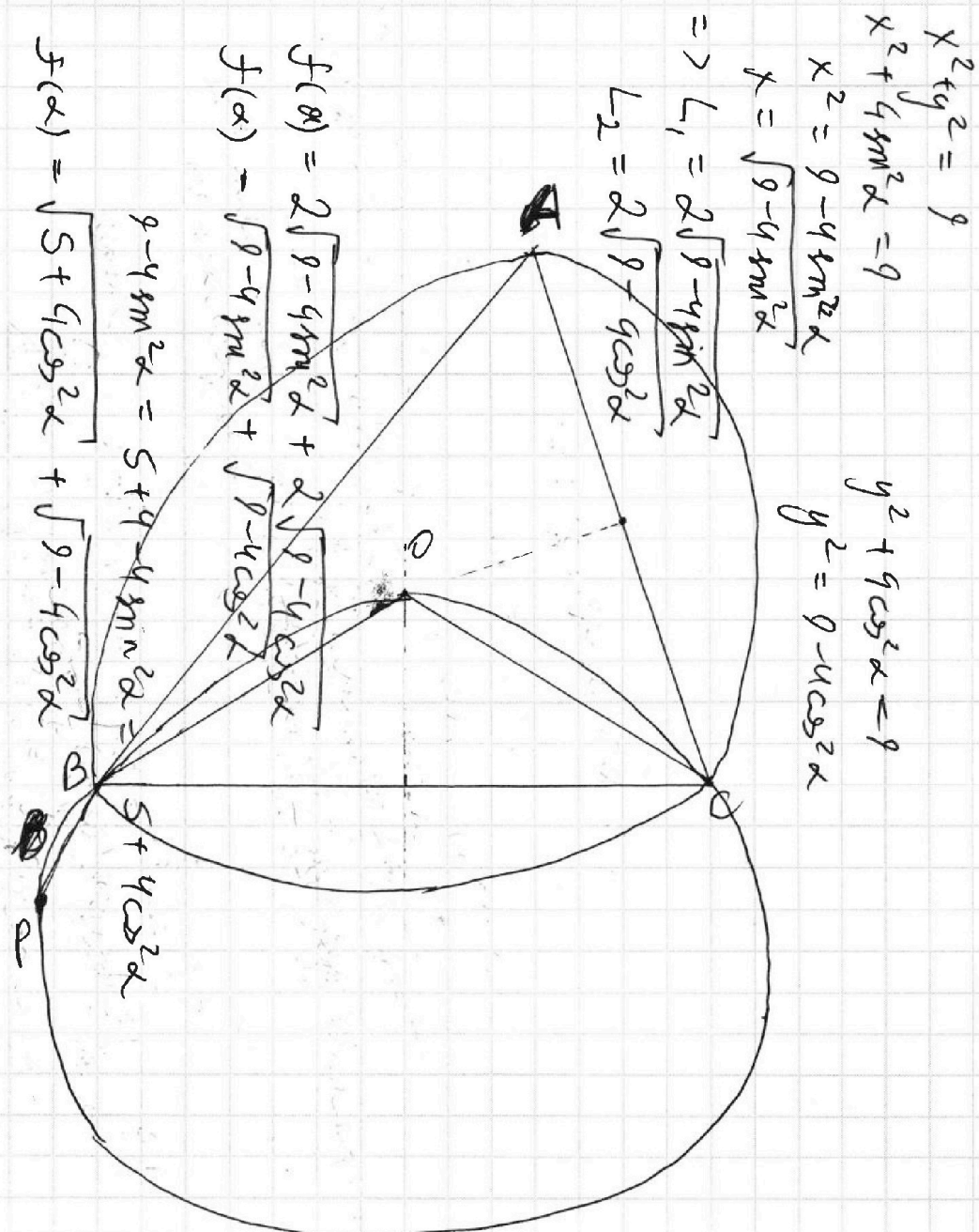
$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$$

$\rightarrow$ Нам известны все пары, кроме тех, при которых $\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ пара $(-4; -9)$ не подходит

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB \cdot AP = AC \cdot AF$$

$$\frac{26}{5} \cdot \frac{16}{5} = 4 \cdot AF$$

$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{16 + 10}{5} = \frac{26}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{BC}{2}$$

А

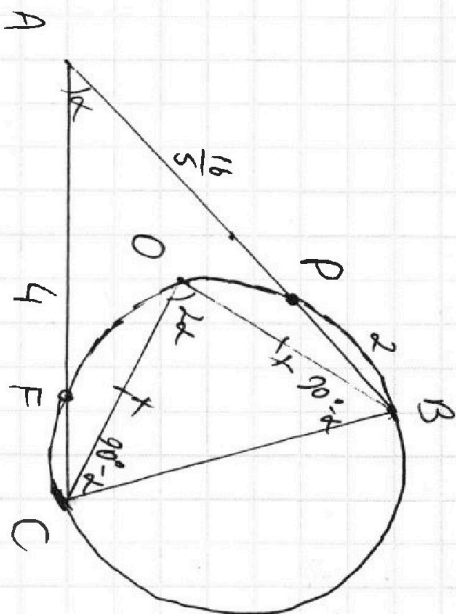
$$\frac{26 \cdot 4}{25} = AF$$

$$\frac{26}{4} = \frac{X}{104}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

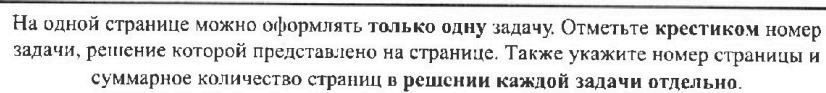
$$2X = \frac{BC}{\sin \alpha} \quad \sin \alpha = \frac{BC}{2X}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \frac{BC}{2X} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4X}$$



$$\frac{X}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{X}{\cos \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha} \Rightarrow X = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$$

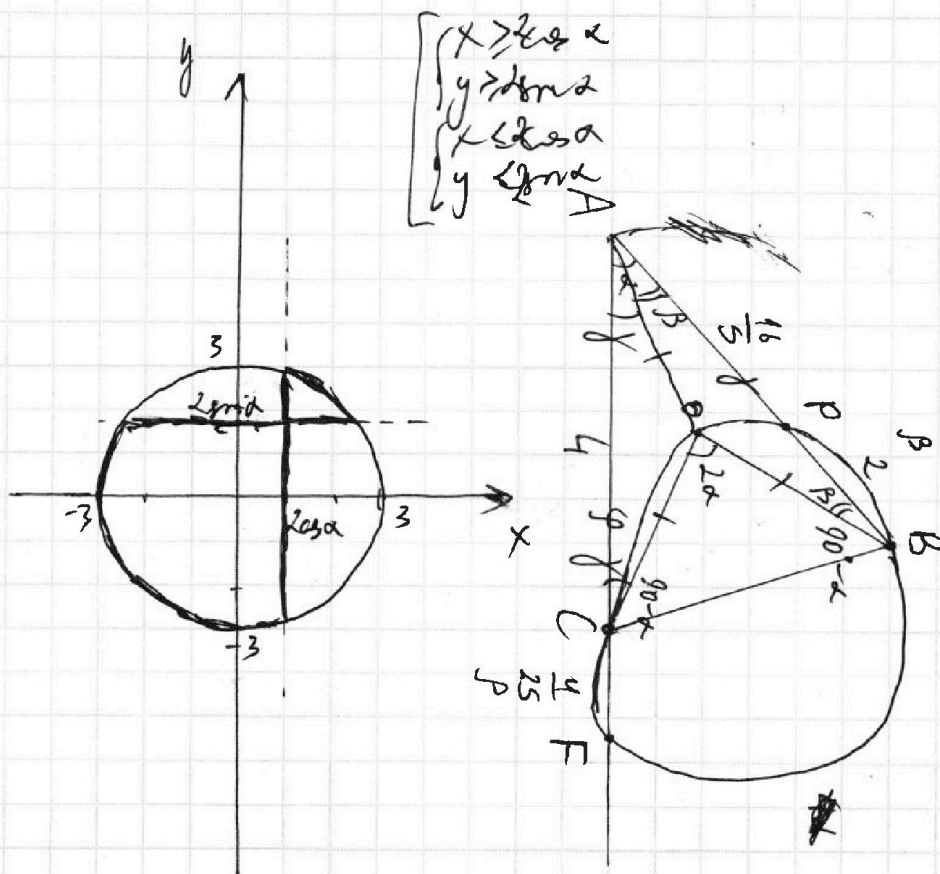
$$AF = \frac{104}{25} \Rightarrow FC = 4 - \frac{104}{25} = \frac{100 - 104}{25} =$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

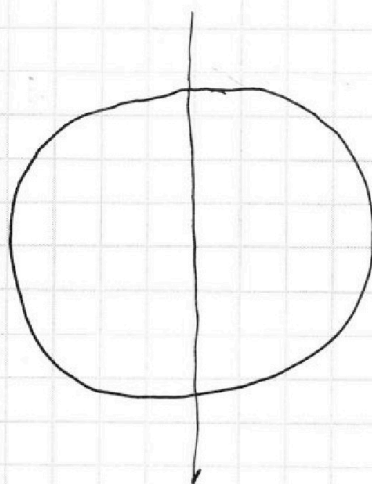
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \cdot AP = AF \cdot AC$$

$$AF = \frac{104}{75}$$

$$CF = AF - AC = \frac{109}{25} - 4 = \frac{9}{25}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

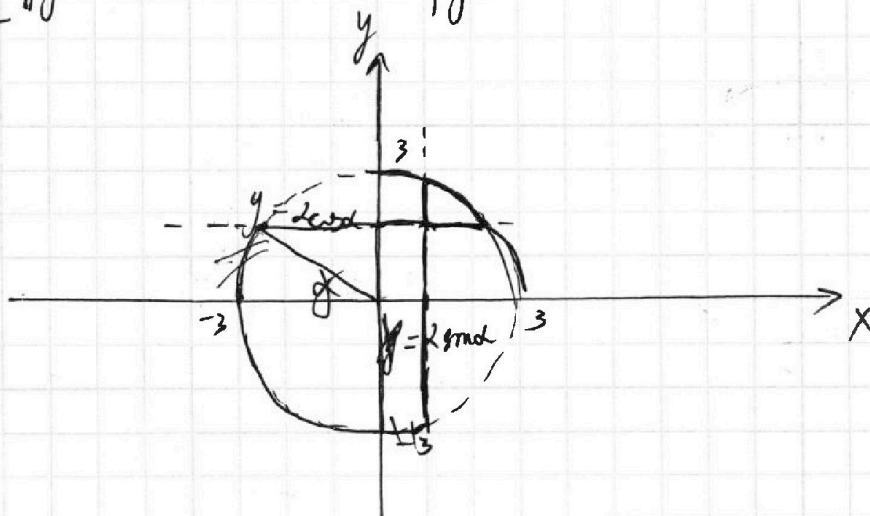
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№ 6. } (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{array} \right. ; \left[\begin{array}{l} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{array} \right.$$



$$y^2 + x^2 = 9$$

$$4\cos^2\alpha + x^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - 4\cos^2\alpha$$

$$x = \pm\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{2\cos\alpha}{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\cos\alpha}{3}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 9 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$(x - y)^3 = 27$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 27$$

$$x^3 - 3xy \underbrace{(x - y)}_3 - y^3 = 27$$

$$x^3 - 9xy - y^3 = 27$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = 27$$

N 3:

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}}_{\cos \pi x} \cdot \sin \pi x = 2 \underbrace{\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}}_{\cos \pi x} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$1. \quad \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} + n$$

$$x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \quad \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$- \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111 \cdot a$$

$$a \in [1; 9]$$

$$B = \overline{bcd} = 100b + 10c + d \quad ; b, c, d = 1$$

$$C = \overline{ef} = 10e + f \quad ; e, f = 5$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 1111a(100b + 10c + d)(10e + f)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 1111} \\ - 11 \\ \hline 11 \\ - 11 \\ \hline 0 \end{array} \quad 1111 = 101 \cdot 11$$

$$n^2 = 101 \cdot 11 \cdot a(100b + 10c + d)(10e + f)$$

$$(101) \quad 202 \quad 303 \quad \dots \quad 909$$

$$b=1 \quad c=0 \quad d=1$$

$$n^2 = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot (10e + f)$$

$$n^2 = 101^2 \cdot 11a(10e + f)$$

$$11 \quad 22 \quad 33 \quad 44 \quad 55 \quad \dots \quad 88 \quad 99 \quad e=5 \quad f=5$$

$$n^2 = 101^2 \cdot 11a \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5a$$

$$\Rightarrow a = 5$$

N2

$$x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} \quad ; \quad \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

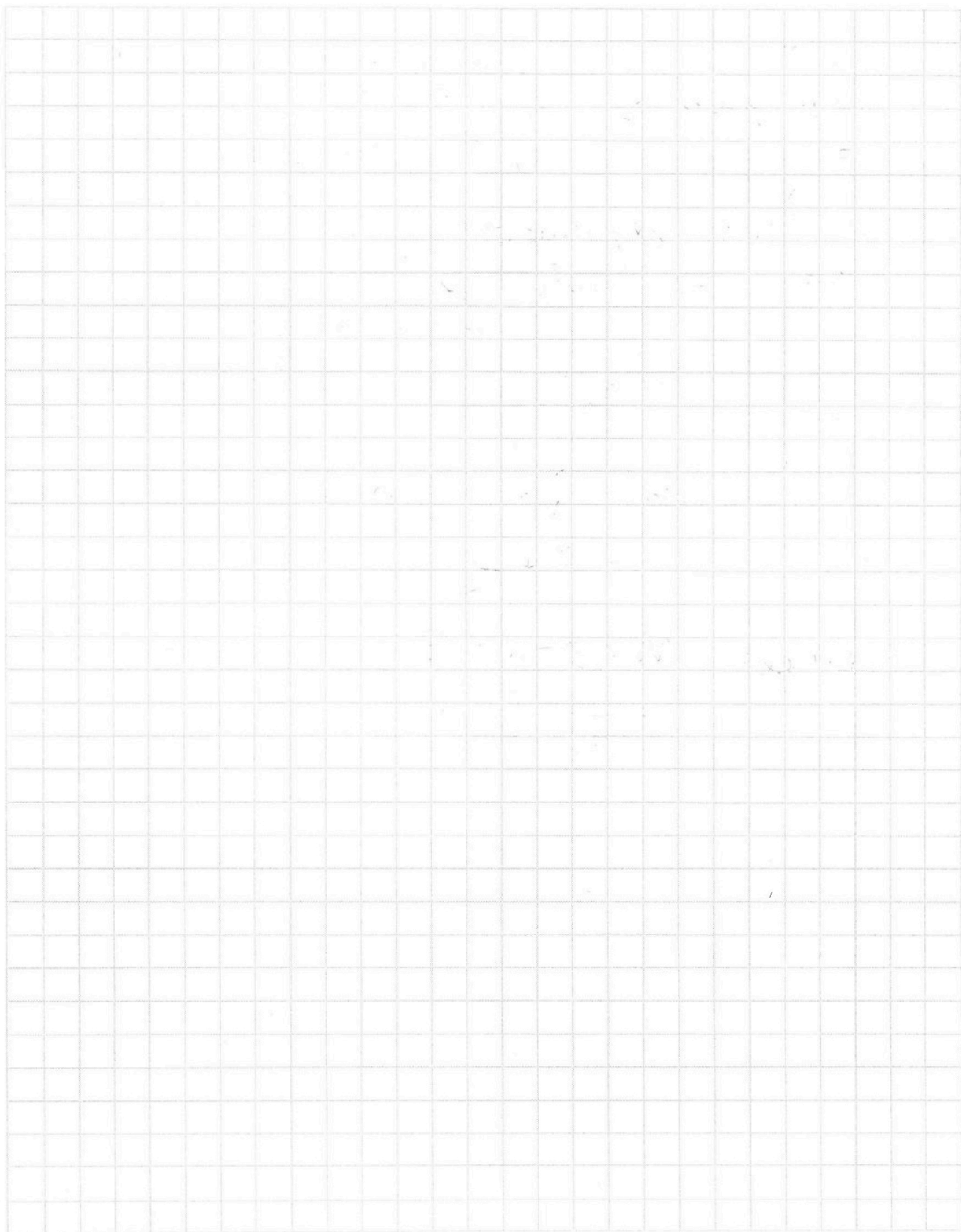


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N9:

☐ ☐ ☐ ☐

x - число видов филетов
 y - число единиц класса

3,5

$$12 \cdot 3,5 = 6 \cdot 2 \cdot 3,5 = 6 \cdot 7 = 42$$

4 филет и y единиц класс.

$$C_y^4 = \frac{y!}{4! \cdot (y-4)!} = \frac{(y-3)(y-2)(y-1)y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 168 \end{array}$$

П	В		
---	---	--	--

$\uparrow \quad \uparrow$
 $y-2 \quad y-3$

$$\Rightarrow C_{y-2}^{x-2} = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(y-1)(y-3)}{2} \cdot \frac{24}{(y-3)(y-2)(y-1)y} = \frac{12}{y(y-1)} \text{ -вер. в нач. месяца}$$

$$C_y^x = \frac{y!}{x! \cdot (y-x)!} \quad x < y$$

П	В				...
---	---	--	--	--	-----

 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{x-2}$

$$C_{y-2}^{x-2} = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!} \cdot \frac{(y-x)! \cdot x!}{y!} =$$

$$= \frac{(y-2)! \cdot (x-2)! \cdot (x-1) \cdot x}{(x-2)! \cdot (y-2)! \cdot (y-1) \cdot y} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$