

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых это достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1:

Пусть a — цифра, из которой состоит четырёхзначное число A

$$\Rightarrow A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

Так как a — цифра, то $a \in \mathbb{N}$ и $a \leq 9$

По условию, $A \cdot B \cdot C = n^2$, где n — какое-то натуральное число

$$\Rightarrow n^2 = 1111a \cdot B \cdot C; \quad 1111 = 101 \cdot 11$$

$$\Rightarrow n^2 = 101 \cdot 11a \cdot B \cdot C$$

Так как 101 — простое число, то чтобы произведение $101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C$ было квадратом натурального числа, нужно, чтобы числа a , B или C содержали в своём разложении на простые множители хотя бы ещё один множитель, равный 101 .

А a не может содержать в разложении на простые множители число 101 , так как $a \leq 9$.

~~B~~ С теме же может содержать в разложении на простые множители число 101 , так как C — двухзначное число, и оно меньше 101 .

А вот число B ~~B~~ является трёхзначным; тогда оно может быть равно $101, 202, 303, \dots, 808, 909$. Но по условию хотя бы одна цифра числа B равна 1 .

$$\Rightarrow B = 101 \Rightarrow n^2 = 101^2 \cdot 11a \cdot C$$

Число 11 — тоже простое, поэтому a или C



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

должна содержать в своём разложении на простые множители хотя бы еще один множитель, равный 11

а не может содержать 11 в разложении на простые множители, так как $a \leq 2$.

А вот число С-двухзначное; Тогда С может быть равно 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Но по условию хотя бы одна цифра числа С равна 5 $\Rightarrow C = 55$

$$\Rightarrow n^2 = 101^2 \cdot 11 \alpha \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \alpha$$

$$\text{Тогда } \alpha = 5 \Rightarrow n^2 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5^2 = (101 \cdot 11 \cdot 5)^2 \\ \Rightarrow A = 5555$$

Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2:

$$x, y > 0 \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\text{По условию, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\text{Так как } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y+x > 0 \Rightarrow y+x+1 > 1$$

\Rightarrow На $y+x+1$ можно сократить

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$0 = 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3x - 3y = 9$$

$$x - y = 3$$

$$\Rightarrow (x-y)^3 = 3^3$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 27$$

$$x^3 - 3xy(x-y) - y^3 = 27$$

$$\Rightarrow x^3 - 9xy^2 - y^3 = 27$$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy = 27 - \text{единственное}\newline \text{возможное}\newline \text{значение}$$

Ответ: $M = 27$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из графика легко посчитать количество подложивших пар $(x; y)$. Подложившие пары на графике отмечены черточками горизонталью, одна неподложившая пара $(-4; -9)$ отмечена делой точкой

Имеем, таким образом, 10 парий по 5 точек в каждой итого 50, и 9 парий по 4 точки в каждой, итого 36

$$\Rightarrow 50 + 36 - 1 = 85 \text{ пар}$$

Что же касается семейства прямых $y = 3x + 2k + 1$, то дополнительных новых пар целых чисел ОДО нам не дает, так как любую точку, принадлежащую $y = 3x + 2k + 1$ можно путем правильного подбора n свести к какой-то точке из множества $y = -x + 2n + 1$, для которых $-x$ и $3x$ имеют одинаковую четность.

$$\Rightarrow \underline{\text{Ответ:}} \quad a) (p; -p + 2n + 1); (p; 3p + 2k + 1); \\ p \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$$

d) 85 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выразим из них y :

$$y = -x + 2n + 1 \quad y = 3x - 2k - 1$$

Так как k — это любое целое число, то мы можем заменить $-2k$ на $+2k$. Тогда также мы можем заменить -1 на $+1$ в данном случае, ведь линия второго отвала ($y = 3x - 2k - 1$) заключается в том, что к $3x$ прибавляем любое целое нечетное число. А любое целое нечетное число можно записать и как $-2k - 1$, где $k \in \mathbb{Z}$, и как $2k + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x + 2n + 1 \\ y = 3x + 2k + 1 \end{cases}; n, k \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow Если брать x равной некоторому действительному числу p , то к нему в пару подходит любая из линий из множества $-p + 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, и одна из линий из множества $3p + 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (p; -p + 2n + 1); (p; 3p + 2k + 1); p \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Так как $0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi$ и

$0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq \pi$, то

$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$ — это то, что требуется доказать. Требуется доказать только в том случае, если $\arccos \frac{x}{4} = \pi$ и $\arccos \frac{y}{9} = \pi$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 4

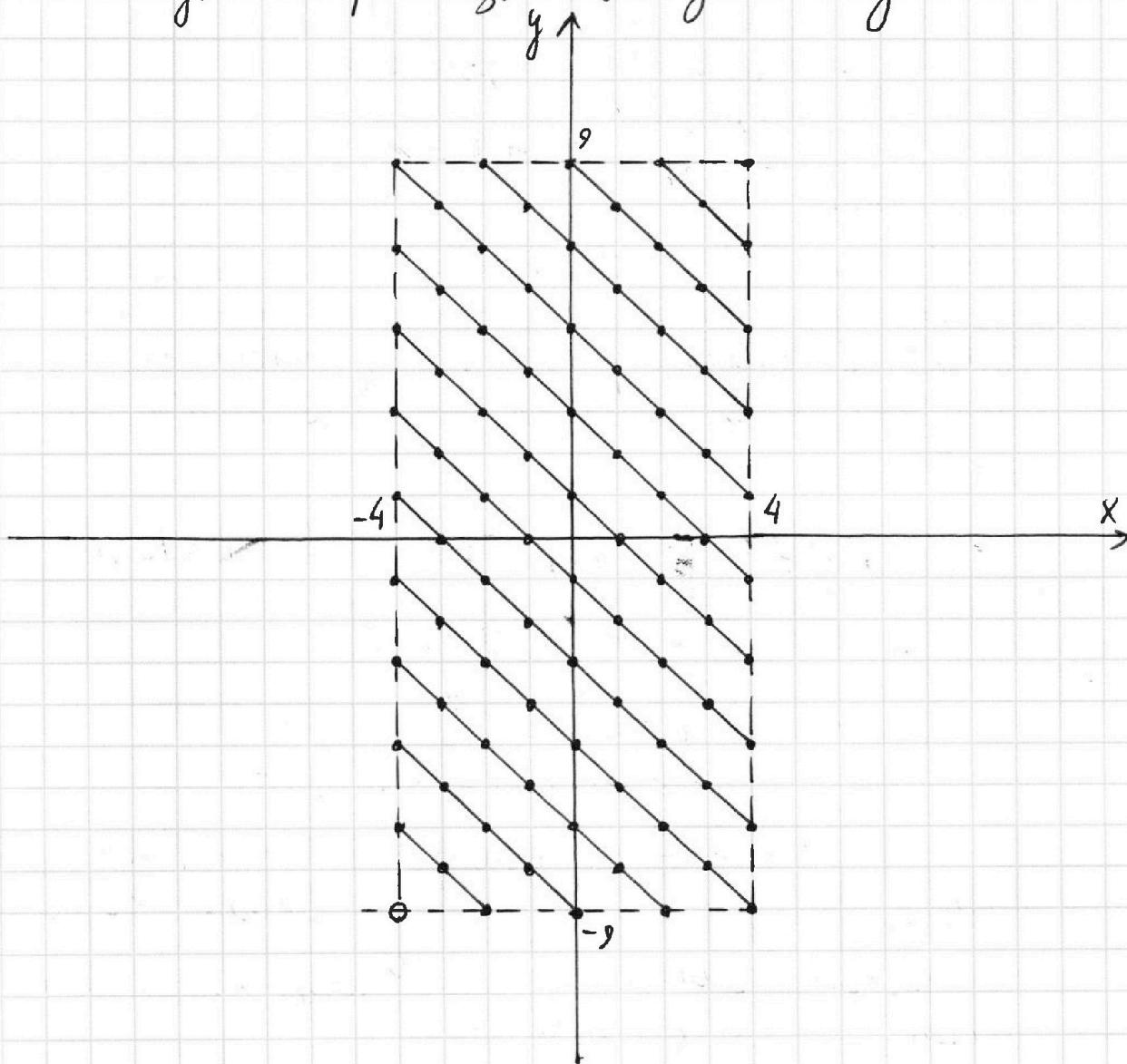
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$$

\Rightarrow пара $(-4; -4)$ нам не подходит.

Выясним ОДЗ для x и y : $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$
 $\Rightarrow -4 \leq x \leq 4$; $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$

Начертим в координатах $(x; y)$ семейство прямых $y = -x + 2n+1$ при различных n и отметим ту же границы ОДЗ для x и y :





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3:

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x;$$

$$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \\ \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

Возможны два случая:

$$1) \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n \Rightarrow x+y = 2n+1$$

2) $\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \neq 0 \Rightarrow$ разделим обе части уравнения на $\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$:

$$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) + \\ + \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$\Rightarrow 2 \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0; \cos \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x - y = 2k + 1$$

Итак, мы получили два случая:

$$x+y = 2n+1 \quad \text{и} \quad 3x-y = 2k+1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4:

Пусть x - количество билетов, которое выделили в конце месяца, y - количество одиннадцатиклассников.

Если у нас есть x билетов и y учеников, то x штук из y без учета порядка можно выбрать C_y^x способами:

$$C_y^x = \frac{y!}{x! \cdot (y-x)!}$$

При этом у нас есть две ученицы - Петя и Вася, которые хотят вместе пойти на концерт. Тогда благоприятными вариантами для них будут те варианты, в которых два билета из x достались Пете и Васе, а остальные $x-2$ билета достались как-то распределены между $y-2$ учениками.

$$\Rightarrow \text{Всего благоприятных вариантов } C_{y-2}^{x-2} = \\ = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-2-x+2)!} = \frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!}$$

\Rightarrow Вероятность Васе и Петя вместе пойти на концерт равна:

$$\frac{(y-2)!}{(x-2)! \cdot (y-x)!} \cdot \frac{x! \cdot (y-x)!}{y!} = \frac{x! \cdot (y-2)!}{y! \cdot (x-2)!} = \\ = \frac{(x-2)! \cdot (x-1) \cdot x \cdot (y-2)!}{(y-2)! \cdot (y-1) \cdot y \cdot (x-2)!} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В малом шестиугольнике, когда ~~вероятность~~ число боков было равно 4, вероятность стала равна $\frac{4 \cdot (4-1)}{y(y-1)} = \frac{12}{y(y-1)}$. Затем число боков увеличили до x , и вероятность стала $\frac{x(x-1)}{y(y-1)}$

$$\text{По условию: } \frac{12}{y(y-1)} \cdot 3,5 = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 3,5 = x(x-1)$$

$$42 = x(x-1) \Rightarrow x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 42 = 169 = 13^2$$

$$x_1 = \frac{1+13}{2} = 7 \quad x_2 = \frac{1-13}{2} = -6$$

Очевидно, что x не может быть отрицательным
 $\Rightarrow x = 7$

Ответ: 7 боков



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow Тогда максимальная длина $AB + CD$ равна $2 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

$$\Rightarrow P_{\max} = L_0 + 4\sqrt{7} = 3\pi + 4\sqrt{7} = M$$

Такой периметр достигается при
 $t=2 \Rightarrow 4\cos^2\alpha = 2$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 + \cos 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$; достигается

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow Дуга UGF равна $\frac{\pi}{2}$ (в градусной мере), а дуги VBH , VEC , VCB в сумме дают дугу с градусной мерой $\frac{\pi}{2}$

\Rightarrow Периметр "круговой" части фигуры Φ равен длине полукруглой дуги 3 . Однозначно это L_0

$$L_0 = \pi \cdot 3 = 3\pi$$

Осталось найти длину отрезков CD и AB . Для этого подставим в уравнение окружности $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2\cos\alpha)^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - 4\cos^2\alpha \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

\Rightarrow Длина CD равна $2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$

Аналогично, длина AB :

$$x^2 + 4\sin^2\alpha = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow AB + CD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} = \\ = 2(\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha})$$

Используем функцию

$$f(\alpha) = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(\alpha) = \sqrt{5 + 4(1 - \sin^2 \alpha)} + \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \\ \rightarrow \sqrt{5 + 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

Замена $t = 4 \cos^2 \alpha$; $t \in [0; 4]$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{5+t} + \sqrt{9-t} \quad \begin{array}{l} (\text{т.к. } \cos^2 \alpha \in [0; 1]) \\ \text{т.к. } 4 \cos^2 \alpha \in [0; 4] \end{array}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+5}} + \frac{1}{2\sqrt{9-t}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{t+5}} - \frac{1}{2\sqrt{9-t}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5}}{2\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{9-t}}$$

Используем знак производной

$$\frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{t+5}}{2\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{9-t}} > 0$$

Знакоматесь брати > 0

$$\Rightarrow \sqrt{9-t} - \sqrt{t+5} > 0$$

$$\sqrt{9-t} \geq \sqrt{t+5}$$

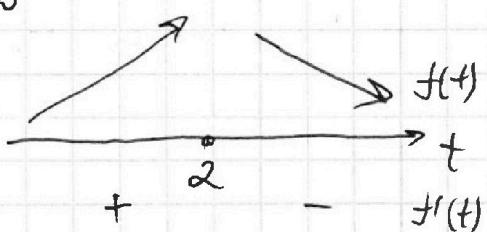
$$9-t \geq t+5$$

$$-2t + 9 - 5 \geq 0$$

$$-2t + 4 \geq 0$$

$$-t + 2 \geq 0$$

$$-(t-2) \geq 0$$



$\Rightarrow t=2$ - точка максимума

$$\text{Тогда } f_{\max} = f(2) = \sqrt{5+2} + \sqrt{9-2} = \sqrt{7} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

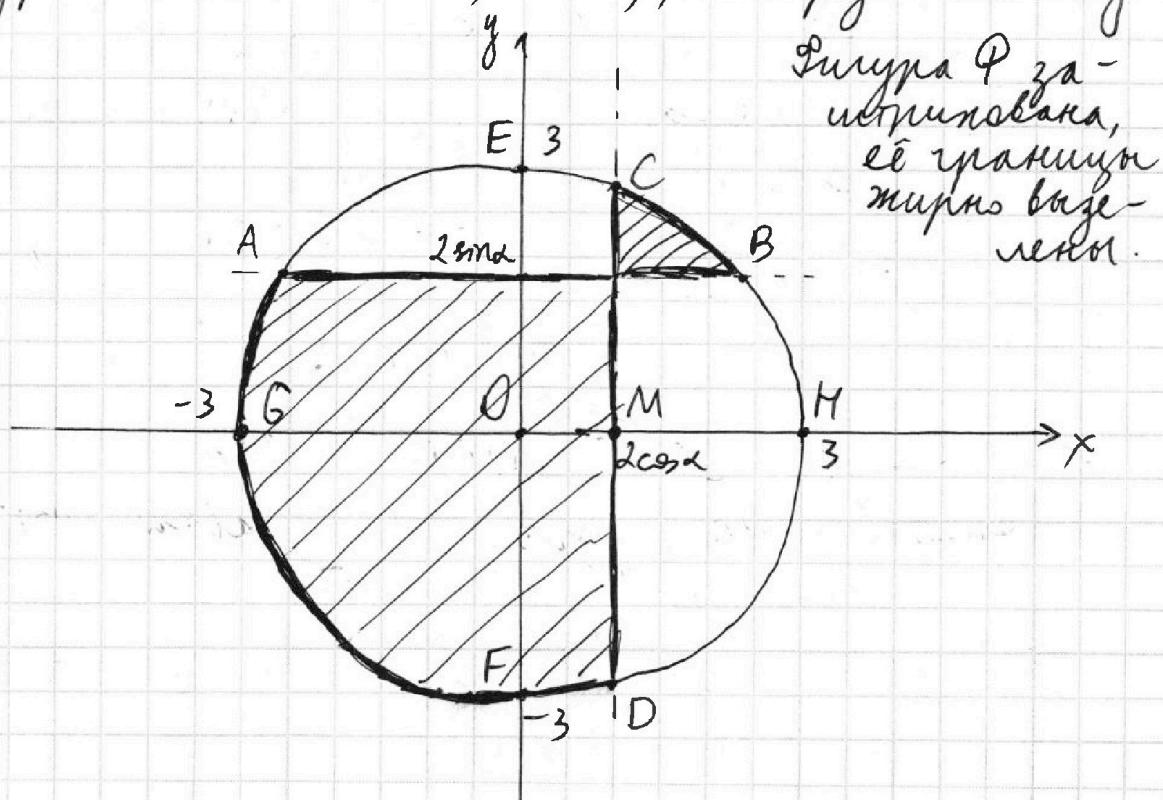
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Из уравнений (1) имеем:

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

; уравнение (2) задаёт круг радиуса 3 с центром в начале координат.

Построим множества, описываемые уравнениями (1) и (2), в координатах xy :



Фигура Φ за-
имствована,
её границы
жирно выде-
лены.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся в промежутке $[-1; 1]$, то $-2 \leq 2 \sin \alpha \leq 2$ и $-2 \leq 2 \cos \alpha \leq 2$

\Rightarrow Прямые $y = 2 \sin \alpha$ и $x = 2 \cos \alpha$ будут при $\alpha \neq k\pi$ пересекаться внутри круга $x^2 + y^2 \leq 4$.

Однозначно точки пересечения прямой $y = 2 \sin \alpha$ с окружностью как A и B, прямой $x = 2 \cos \alpha$ с окружностью - как C D, а точки пересечения окружности с осями X и Y обозначим как G, E, H и F.

Взглянем на график. Тогда точка O - начало координат. ~~Тогда же~~ ~~из~~ равенство ~~треугольников~~ $\triangle OEC$ и $\triangle OED$ следует ~~равенство~~ $\angle EOC = \angle EOD$ и $\angle FOD$

Тогда точка M - точка пересечения CD и оси X

Тогда $\triangle OCM \cong \triangle OMD$ ($OC = OD$, OM - общая; $\angle OMC = \angle OMD < 90^\circ$)

$$\Rightarrow \angle COM = \angle DOM ; \frac{90^\circ}{90^\circ} = \angle COM + \angle EOC$$

$$\Rightarrow \angle EOC = \angle FOD$$

\Rightarrow Дуги UEC и UFD равны
аналогично, дуга UAG равна UBH

$$\Rightarrow UAG + UFD = UBH + UEC$$

$$\Rightarrow UAG + UGF + UFD = UBH + UEC + UGF$$

$$\Rightarrow UAG + UGF + UFD + UCB = UBH + UEC + UCB + UGF$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x - y}{2} = \frac{1}{2} + k \quad | \cdot 2$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

$$3x - y = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2n + 1 - x$$

$$y = 3x - 2k - 1$$

$$y = 3x + 2k + 1$$

$$\underbrace{y = -x + 2n + 1}_{\text{}}$$

$$\underbrace{y = 3x + 2k + 1}_{\text{}}$$

$$\begin{cases} (p; -p + 2n + 1) \\ (p; 3p + 2k + 1) \end{cases}; \quad p \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$d) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$$\cancel{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{4}} + \cancel{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{3}} < 2\pi$$

$$\cancel{\pi - \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{3}} < 2\pi$$

$$\cancel{-\arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{3}} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{3} > -\pi$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \quad 0 \leq \arccos \frac{y}{3} \leq \pi$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq 2\pi$$

\Rightarrow Нам подходит все пары, кроме тех, при которых $\arccos \frac{x}{4} = \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{y}{3} = \pi \\ x \neq -4 \\ y \neq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

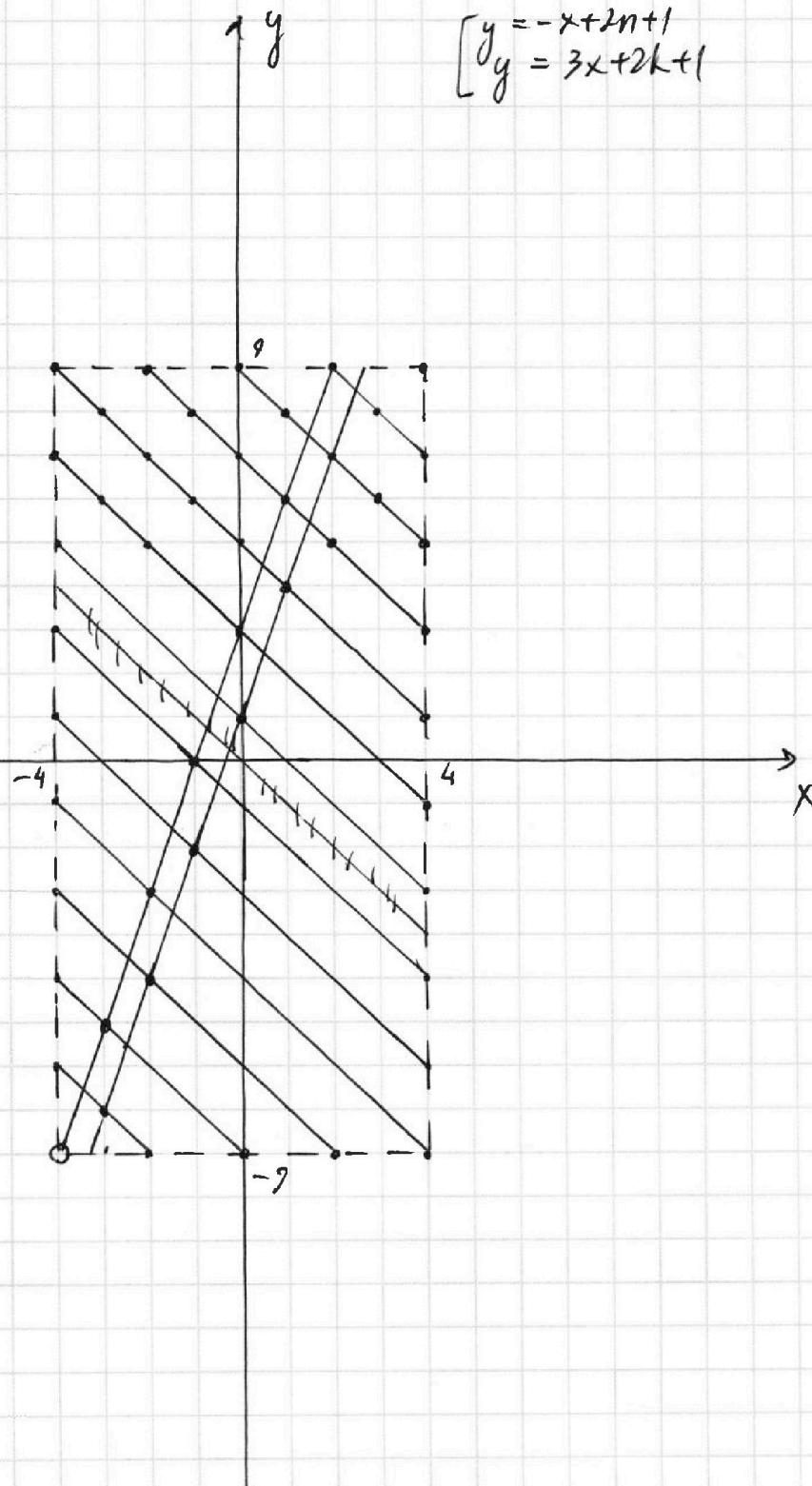


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



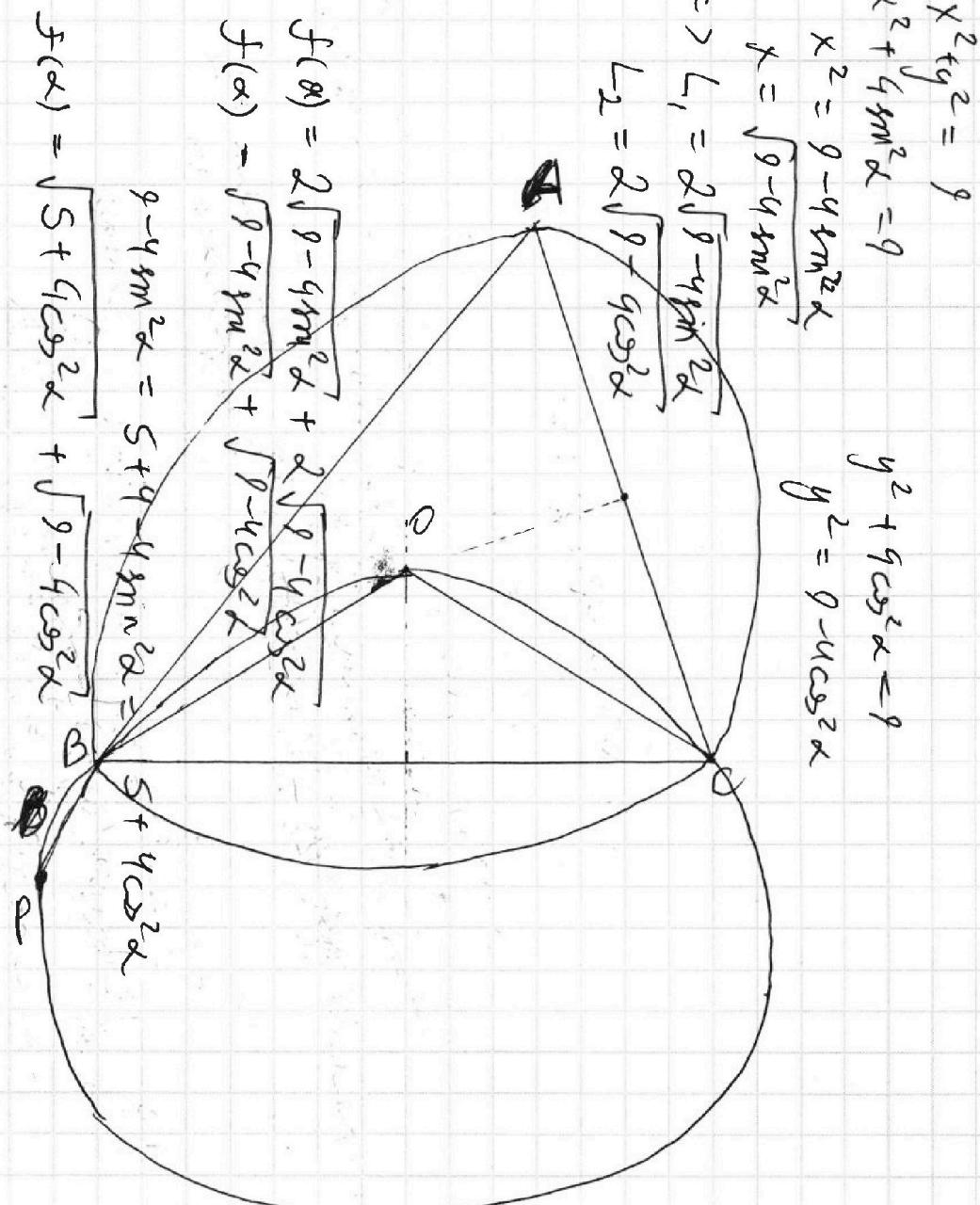


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



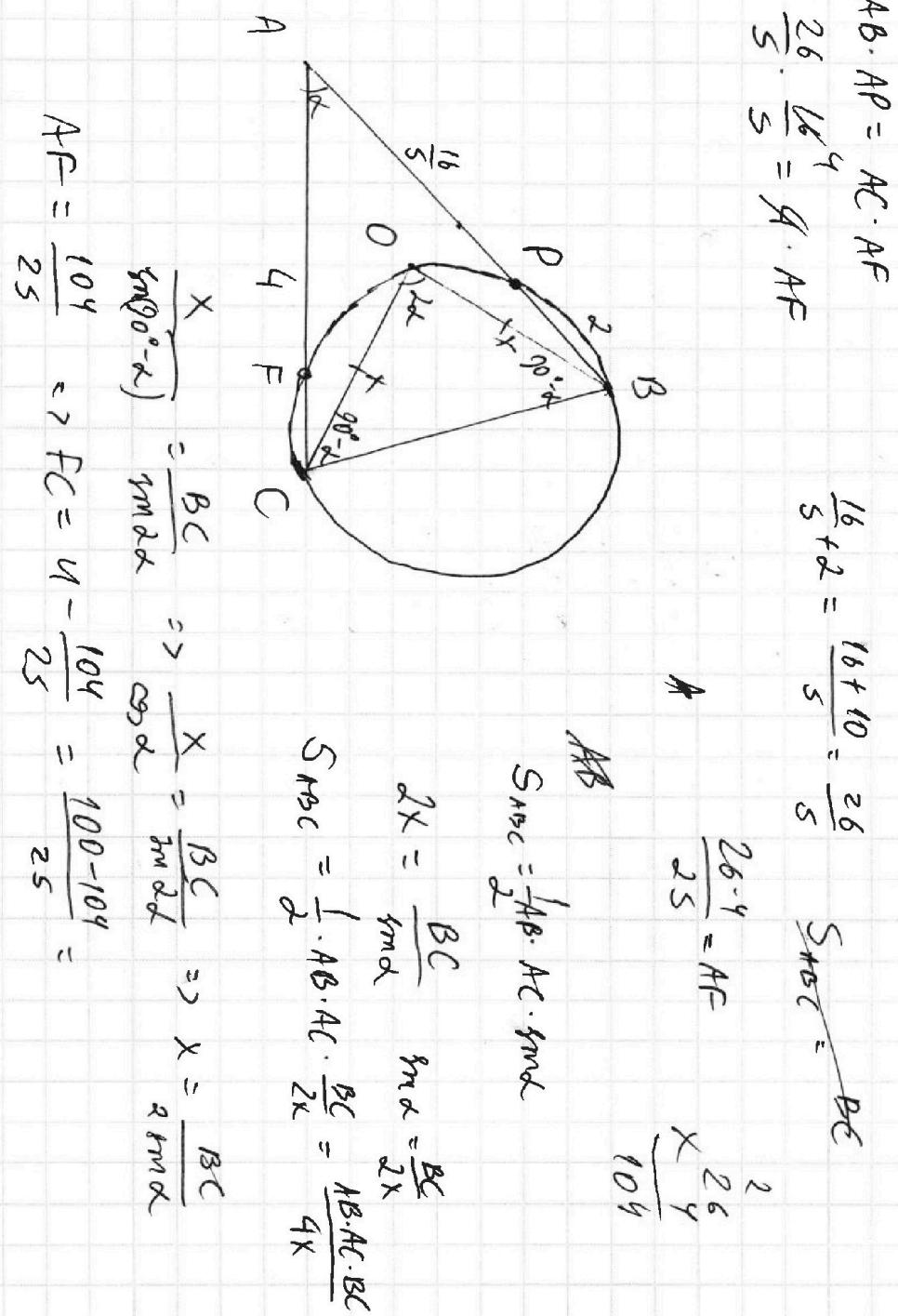


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



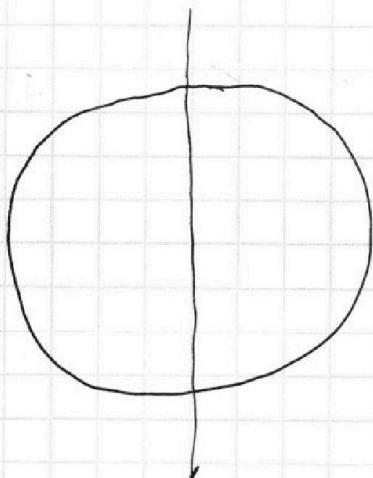
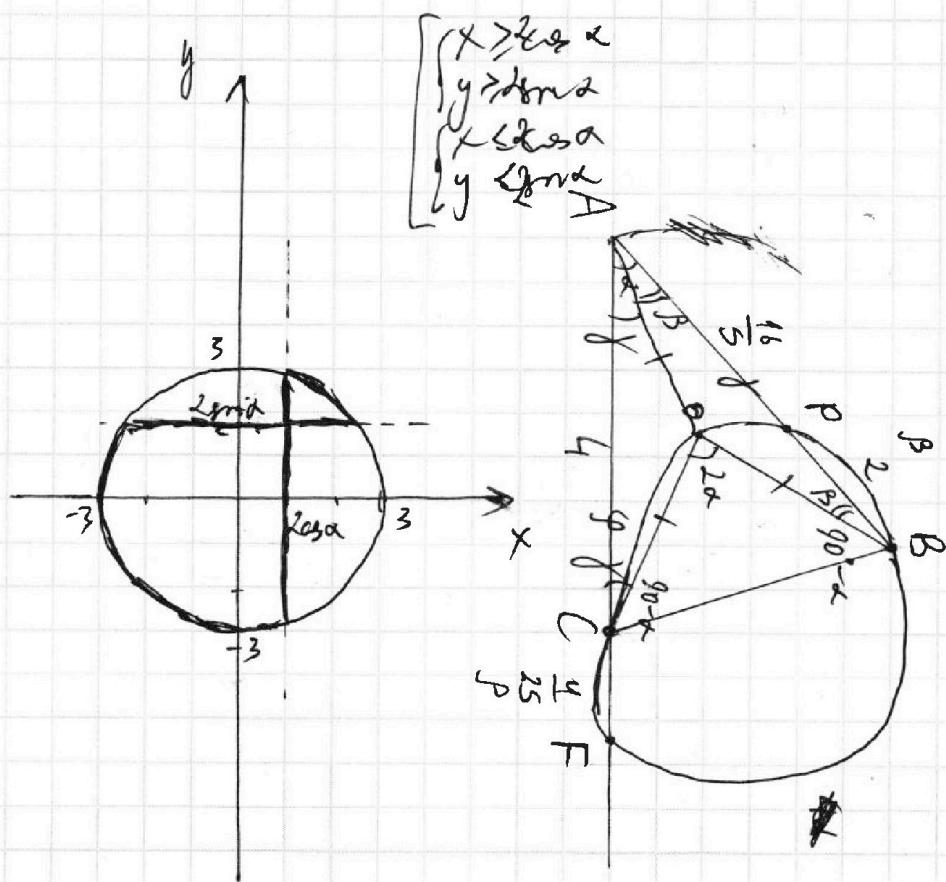


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

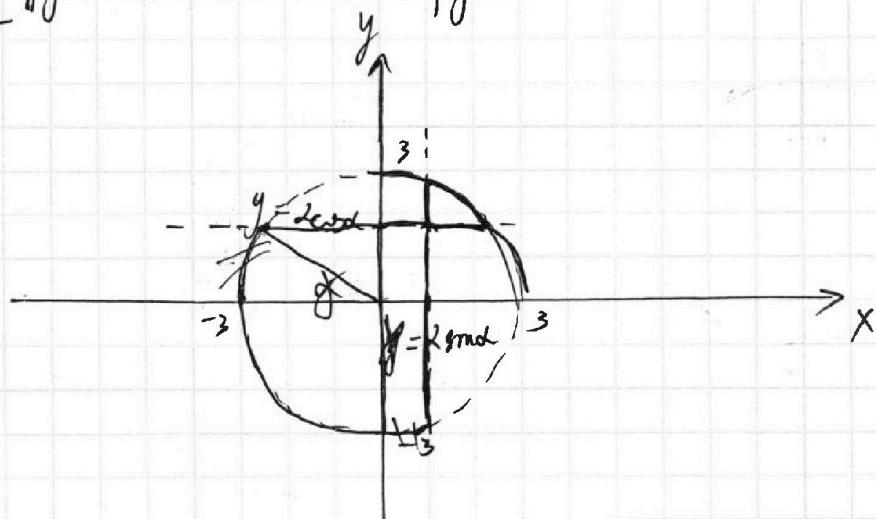
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6}. \quad (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9$$

$$\begin{cases} x > 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$



$$y^2 + x^2 = 9$$

$$4\cos^2\alpha + x^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - 4\cos^2\alpha, \\ x = \pm\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{2\sin\alpha}{3} = \frac{2\cos\alpha}{3}$$

$$\gamma = \arctan$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x - 3y = 9$$

$$x - y = 3$$

$$(x-y)^3 = 27$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 27$$

$$x^3 - 3xy(x-y) - y^3 = 27$$

$$x^3 - 9xy - y^3 = 27$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = 27$$

N 3 :

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$1. \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n \quad x+y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) +$$

$$+ \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$- \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111 \cdot a \\ a \in [1; 9]$$

$$B = bcd = 100b + 10c + d ; b, c \text{ и } d = 1$$

$$C = ef = 10e + f ; e \text{ и } f = 5$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 1111a(100b + 10c + d)(10e + f)$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ - 11 \\ \hline 101 \end{array}$$

$$n^2 = 101 \cdot 11 \cdot a(100b + 10c + d)(10e + f)$$

$$(101) \quad 202 \quad 303 \dots 909$$

$$b=1 \quad c=0 \quad d=1$$

$$n^2 = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot (10e + f)$$

$$n^2 = 101^2 \cdot 11a(10e + f)$$

$$11 \quad 22 \quad 33 \quad 44 \quad 55 \dots 88 \quad 99 \quad e=5 \quad f=5$$

$$n^2 = 101^2 \cdot 11a \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5a$$

$$\Rightarrow a = 5$$

$$N2 \quad x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} ; \quad \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



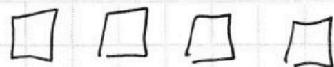
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N9:



3,5

x - число видов бисеров
 y - число одиннадцати-класс

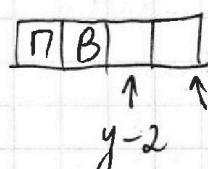
$$12 \cdot 3,5 = 6 \cdot 2 \cdot 3,5 =$$

4 делит y и y одинаков.

$$= 6 \cdot 7 = 42$$

$$C_y^4 = \frac{y!}{4! \cdot (y-4)!} = \frac{(y-3)(y-2)(y-1)y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\times \frac{42}{168}$$

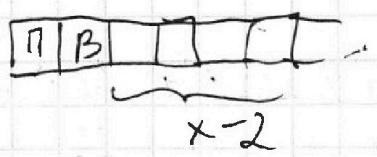


\uparrow
 $y-2$
 $y-3$

$$C_{y-2}^{x-2} = \frac{(y-2)!}{(x-2)!(y-x)!}$$

$$\Rightarrow \cancel{(y-1)(y-3)} \cdot \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{(y-3)(y-2)(y-1)y}} = \frac{12}{y(y-1)} \text{ - бер. } 6 \text{ нач. } \\ \text{месяца}$$

$$C_y^x = \frac{y!}{x! \cdot (y-x)!} \quad x < y$$



$\underbrace{\dots}_{x-2}$

$$C_{y-2}^{x-2} = \frac{(y-2)!}{(x-2)!(y-x)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(y-2)!}{(x-2)!(y-x)!} \cdot \cancel{\frac{(y-x)! \cdot x!}{y!}} =$$

$$= \frac{(y-2)! \cdot (x-2)! \cdot (x-1) \cdot x}{(x-2)!(y-2)!(y-1) \cdot y} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)}$$