



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1



2



3



4



5



6



7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1) А можно представить в виде $1111a$, где $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$

Если $A \cdot B \cdot C = n^2$, где n - какое-то натуральное число, то

$$1111a \cdot BC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = n^2 \quad \begin{aligned} n^2 : 11 &\Rightarrow n : 11 \Rightarrow n^2 : 11^2 \\ n^2 : 101 &\Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2 \end{aligned}$$

11 и 101 - простые, значит, они полностью содержатся в B и C .
разложения

$C < 100$, значит $B : 101$. Из всех вариантов для B , подходит
 $0 < a < 10$ $B \in \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$

только $B = 202$ (т.к. содержит цифру 2)
 $0 < a < 10$ и $B \not\equiv 11$, значит, $C : 11$. Аналогично, из всех
вариантов для C подходит только $C = 33$ (содержит цифру 3)
 $C \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$

Тогда, $n^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 33 \cdot 202 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6a \Rightarrow 6a$ - квадрат натурального числа. Из всех $0 < a < 10$ подходит только $a = 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A = 1111 \cdot 6 = 6666$, тогда $n^2 = A \cdot B \cdot C = 6666 \cdot 202 \cdot 33 =$
 $= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6^2 = 6666^2$ (удовлетворяет условию)

Ответ: $(A; B; C) = (6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$ (равные значения K при $(x, y) = (x-1, y+1)$, где $x \neq 0; -1$ и $y \neq 0; -1$)

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{y+1}{(x-1)(y+1)} + \frac{x-1}{(x-1)(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} - \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x+y+2)(x-1)(y+1) - (x+y+2)(xy)}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{(x+y+2)(xy+x-y-1-xy)}{xy(x-1)(y+1)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}, \text{ значит } x-y-1=0$$

т.к. $x > 0$ и $y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow x+y+2 > 0$.

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 + (-y)^3 + (-1)^3 + 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-1) - (-1)^3 = (x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y) - (-1)^3 = 0 - (-1)^3 = 0 + 1 = 1.$$

Единственно возможное значение выражения $M = 1$. Ответ. $M = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3. a) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi(x+y)) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{2\pi x + \pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x - \pi(x+y)}{2}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\cos\left(\left(\frac{3}{2}x + \frac{y}{2}\right)\pi\right) \cdot \cos\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\pi\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos(\pi(1,5x + 0,5y)) = 0 & \pi(1,5x + 0,5y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} & 1,5x + 0,5y = 0,5 + k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos(\pi(0,5x - 0,5y)) = 0 & \pi(0,5x - 0,5y) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} & 0,5x - 0,5y = 0,5 + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2k + 1 - y, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2n + 1 + y, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k + 1 - y}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2n + 1 + y, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Подкоординаты (x, y) будут:

Ответ: a) $\left(\frac{2k+1-y}{3}, y\right) (k \in \mathbb{Z})$ и $(2n+1+y, y) (n \in \mathbb{Z})$

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \quad \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$$

Значит, неравенства верны, если $\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \neq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \quad (\text{т.к. } \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] = \frac{3\pi}{2})$$

не достигается только при $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$ и $\arccos \frac{y}{4} = \pi$

Теперь рассмотрим целые y от -4 до 4

$$y = -4: \quad 2n+1-4 = 2n-3, \quad n: -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$$

$$x: -5 \ -3 \ -1 \ 1 \ 3 \ 5$$

$$\frac{2k+1-y}{3} = \frac{2k-1}{3}$$

если $k \div 3$, то $k=3t$, $\frac{2 \cdot 3t - 1}{3} = 2t - \frac{1}{3}$ - только нецелые значения.

Если y-четн. (пусть $y=2t$), то $x=2n+1+y=2n+1+2t=2(n+t)+1 \Rightarrow x$ будет принимать все нечетные значения.

Исключим $(x, y) = (5, -4)$ ($\frac{2k+1-y}{3} = \frac{2k-1}{3}$)

Если y-нечетн. (пусть $y=2t+1$), то $x=2n+1+2t+1=2(n+t+1) \Rightarrow x$ будет принимать все четные значения

$$x = \frac{2k+1-y}{3} = \frac{2k-2t-1}{3} \quad \text{Если } y=2t, \text{ то } x = \frac{2k-2t-1}{3} = \frac{2(k-t-1)}{3} + 1.$$

$$\text{Если } k-t-1 \div 3, \text{ то } x = 2p+1 - \text{нечетное.}$$

Если $y=2t+1$, то $x = \frac{2k-2t}{3} = \frac{2(k-t)}{3}$. Если $k-t \div 3$, то $x = 2q$ - четное.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, нам подходят (x, y) такие, что: $\left. \begin{array}{l} (x, y) \neq (5, -4) \\ x, y \text{ разной четности} \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right\}$ (продолжение №3)

~~Решения~~ $\{(-5; -4), (-5; -2), (-5; 0), (-5; 2), (-5; 4)\}$ } 3 реш.
 $\{(-4; -3), (-4; -1), (-4; 1), (-4; 3)\}$
 $\{(-3; -4), (-3; -2), (-3; 0), (-3; 2), (-3; 4)\}$ } 9 реш. $9 \times 5 = 45$ реш.
 $\{(-2; -3), (-2; -1), (-2; 1), (-2; 3)\}$
 $\{(4; -3), (4; -1), (4; 1), (4; 3)\}$ } 3 реш.
 $\{(5; -2), (5; 0), (5; 2), (5; 4)\}$ - 4 реш. $(5, -4)$ исключено
 $45 + 4 = 49$

Ответ: 49 решений



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) Пусть было x одинаковых билетов (с учетом Пети и Васи), и в конце месяца стало n билетов.

Вероятность Пете и Васе попасть в начале месяца: $\frac{1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^2}{C_x^4}$

$1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^2$ — благоприятные исходы
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 билет билет 2 билета
 Пете Васе другим людям
 C_x^4 — всевозможные исходы.
 $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 2!}{x!} = \frac{(x-2)! \cdot 4!}{x(x-1)(x-2)! \cdot 2!} = \frac{12}{x(x-1)}$

Аналогично, вероятность Пете и Васе попасть в конце месяца: $\frac{1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}$

$1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^{n-2}$ — благоприятные исходы
 $\uparrow \quad \uparrow$
 Пете Васе $n-2$ билетов
 остальных
 C_x^n — n билетов всем — всевозможные исходы
 $\frac{1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{(x-2)! \cdot (n-2)!}{x!} = \frac{(x-2)! \cdot n!}{x(x-1)(x-2)! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$

Известно также, что $\frac{n(n-1)}{x(x-1)} = 2,5$ $\frac{n(n-1)}{12} = 2,5$

$n = 6$ или $n = -5 < 4$

не подходит. Значит, в конце месяца было выделено 6 билетов.

Ответ: 6.



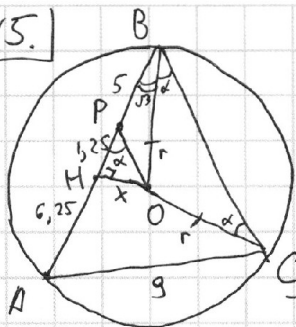
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15.



Пусть OH - перпендикуляр на AB (сер. пер. к AB , г.к. O - центр опис. окр.). Тогда $HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(7,5+5) = \frac{12,5}{2} = \frac{25}{4}$; $HP = HB - PB = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$

Пусть $OB = OC = r$ и $\angle OBC = \alpha$. (в $\triangle OBC \angle OCB = \angle OBC = \alpha$), а также $\angle OBP = \beta$, и $OH = x$.

Т.к. $OCBP$ - впис., то $\angle OPH = 180 - \angle OPB = 180 - (180 - \angle OCB) = \angle OCB = \alpha$. По теор. синусов в $\triangle ABC$: $2r = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{9}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

$$\text{В } \triangle OHB: \sin \beta = \frac{x}{r} \left(\frac{OH}{OB} \right), \cos \beta = \frac{HB}{OB} = \frac{25}{4r}$$

$$\text{В } \triangle OHP: \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}}, \cos \alpha = \frac{5}{4\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}}$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{9}{2r}$$

$$\frac{9}{2r} = \frac{x}{4r\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}} + \frac{25}{4r} + \frac{5}{4\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}} \cdot \frac{x}{r} = \frac{30x}{4r\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{9}{2r} = \frac{30x}{4r\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}}$$

$$x = \frac{3}{5} \sqrt{x^2 + \frac{25}{16}} \Rightarrow \frac{5}{3} x = \sqrt{x^2 + \frac{25}{16}} \Rightarrow \frac{25}{9} x^2 = x^2 + \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{16x^2}{9} = \frac{25}{16}$$

$$x = \frac{15}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{5^2 \cdot 3^2}{16^2}$$

Тогда, $r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{256} + \frac{625 \cdot 16}{256}} = \sqrt{\frac{25(9+400)}{256}} = \frac{5}{16} \sqrt{409}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{9}{2r\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}} = \frac{72}{15\sqrt{409}}; \cos(\alpha + \beta) = \frac{403 \cdot 225 - 72^2}{409 \cdot 225} = \frac{3}{15} \sqrt{\frac{9649}{409}}$$

По теор. косинусов в $\triangle ABC$: $BP = \frac{625}{4} + BC^2 - 2BC \cdot \frac{3}{15} \sqrt{\frac{9649}{409}}$

$$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC = BC^2 = 4r^2 \cdot \sin^2 \angle BAC \Rightarrow 81 + \frac{625}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{4} \cos \angle BAC = \frac{25 \cdot 409}{64}$$

$$16225 \cos^2 \angle BAC - 14400 \cos \angle BAC + 15184 - 10225 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}} = \frac{15}{16} = \frac{15}{16} = 0,6, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

По теор. синусов в $\triangle BOC$: $\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin(180-2\alpha) \sin \alpha}$ ($\alpha < 90^\circ$)
по теореме $= 0,96$.

$$BC = \frac{5}{16} \sqrt{409} \cdot 0,96 = \frac{\sqrt{409}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot OB} = \frac{9 \cdot 12,5 \cdot \sqrt{409}}{4 \cdot \frac{5\sqrt{409} \cdot 2}{16}} = \frac{9 \cdot 16 \cdot 25}{8 \cdot 8 \cdot 2} = 9,5 = 45.$$

Ответ. 45

(45)
чис. окр.



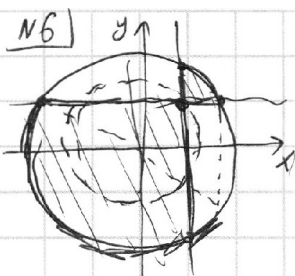
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

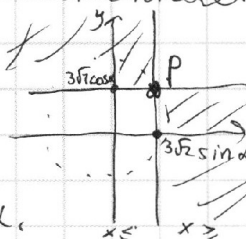
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 \leq 25$ ограничивает круг радиуса 5 с центром в начале координат.

Первое нер-во выполняется, если (x, y) принадлежит данной области.

Пусть P - точка

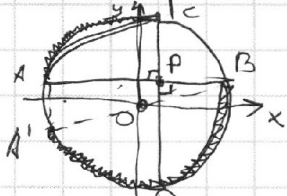


пересечения $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$.

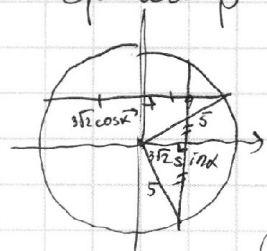
P всегда лежит от начала координат на расстоянии $\sqrt{18}$, т.к. (пусть $O(0,0)$). $OP^2 = (3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 18(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 18$. $OP = \sqrt{18}$.

Т.е., точка P будет принадлежать окружности с центром в O и радиус $\sqrt{18} < 5$. $\square$

Периметр ограничиваемой фигуры складывается из длин двух хорд окружности $x^2 + y^2 \leq 25$ и двух дуг этой же окружности. ~~Сумма~~ Сумма длин двух дуг всегда постоянна, т.к. (рис.) если отразить одну из дуг относительно оси (например, абсцисс), то две дуги объединятся в одну, при этом концы этих дуг диаметрально противоположны (изначалась симметрия относительно одной оси, потом стала относительно двух $\Rightarrow$ относительно центра $(0,0)$). Т.е., периметр фигуры зависит только от суммы длин хорд.



По т. Пифагора из рисунка следует, что сумма их длин равна: $L = 2 \cdot (\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + 2 \cdot (\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha})$. Пусть L - функция от α .



$$L(\alpha) = 2 \cdot \left(\frac{-36 + \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} + \frac{36 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{7 + 18 \cos^2 \alpha}} \right) = 72 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{7 + 18 \cos^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} \sqrt{7 + 18 \cos^2 \alpha}}$$

$$L'(\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1 \\ 25 - 18 \cos^2 \alpha = 7 + 18 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Значит, максимальное значение достигается в 1 из этих точек.

$$\text{если } \cos \alpha = 0 : L = 2 \cdot \sqrt{25} + 2 \cdot \sqrt{25 - 18} = 10 + 2\sqrt{7}$$

$$\cos \alpha = 1 : L = 2 \cdot \sqrt{25 - 18} + 2 \cdot \sqrt{25} = 10 + 2\sqrt{7}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} : L = 2 \cdot \sqrt{25 - 9} + 2 \cdot \sqrt{25 - 9} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 16$$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$. Значит, максимальное значение периметра достигается, если $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ и оно равно 16.

$$16 > 10 + 2\sqrt{7} \quad \text{т.к.}$$

$$16 > 2\sqrt{7}$$

$$36 > 28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{длины дуг}}}{5\pi} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{длины хорд}}}{16}$$

(продолжение №6)

Ответ. $M = 5\pi + 16$
при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

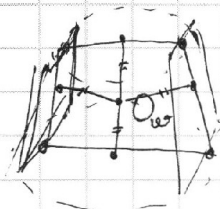
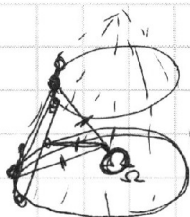
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_2 - центр шара Ω ,
 $O_{\Omega\omega}$ - центр шара ω .

[illegible]