МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N1) A можно представить в виде $1111a$, где $a \in \{1, 2, ..., 9\}$

Если $A \cdot B \cdot C = n^2$, где n - какое-то натуральное число, то

$1111a \cdot BC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = n^2$. $\quad n^2 \vdots 11 \Rightarrow n \vdots 11 \Rightarrow n^2 \vdots 11^2$

$n^2 \vdots 101 \Rightarrow n \vdots 101 \Rightarrow n^2 \vdots 101^2$

11 и 101 - простые, значит, они полностью содержатся в разложениях B и C.

$C < 100$, значит $B \vdots 101$. Из всех вариантов для B подходит
$0 < a < 10$ $\quad B \in \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$
только $B = 202$ (т.к. содержит цифру 2)
$0 < a < 10$ и $B \not\vdots 11$, значит, $C \vdots 11$. Аналогично, из всех вариантов для C подходит только $C = 33$ (содержит цифру 3)
$(C \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\})$

Тогда, $n^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 33 \cdot 202 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6a$. $\Rightarrow 6a$ - квадрат натурального числа. Из всех $0 < a < 10$ подходит только $a = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 1111 \cdot 6 = 6666$, тогда $n^2 = A \cdot B \cdot C = 6666 \cdot 202 \cdot 33 =$
$= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6^2 = 6666^2$. (удовлетворяет условию)

Ответ. $(A; B; C) = (6666; 202; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}$ (равные значения K при $(x;y)$ и $(x-1;y+1)$, где $x\neq 0;1$, $y\neq 0;-1$)

$$\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}+\frac{2}{xy}=\frac{y+1}{(x-1)(y+1)}+\frac{x-1}{(x-1)(y+1)}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy}-\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}=0$$

$$\frac{(x+y+2)(x-1)(y+1)-(x+y+2)(xy)}{xy(x-1)(y+1)}=0$$

т.к. $x>0$, $y>0 \Rightarrow x+y>0 \Rightarrow x+y+2>0$.

$$\frac{(x+y+2)(xy+x-y-1-xy)}{xy(x-1)(y+1)}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+2=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right.$$, значит, $x-y-1=0$

$$M=x^3-y^3-3xy=x^3+(-y)^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot(-1)-(-1)^3=\underbrace{(x-y-1)}_{=0}(x^2+y^2+1+xy+x-y)-(-1)^3=0-(-1)^3=0+1=1.$$

Единственно возможное значение выражения $M=1$.

Ответ. $M=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N3.) а) $(\sin\pi x+\sin\pi y)\sin\pi x=(\cos\pi x+\cos\pi y)\cos\pi x$

$\sin^2\pi x+\sin\pi x\sin\pi y=\cos^2\pi x+\cos\pi x\cos\pi y$

$\cos^2\pi x-\sin^2\pi x+\cos\pi x\cos\pi y-\sin\pi x\sin\pi y=0$

$\cos 2\pi x+\cos(\pi(x+y))=0$

$2\cos\left(\frac{2\pi x+\pi x+\pi y}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x-\pi x-\pi y}{2}\right)=0 \quad |:2$

$\cos\left(\left(\frac{3}{2}x+\frac{y}{2}\right)\pi\right)\cdot\cos\left(\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\pi\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos(\pi(1{,}5x+0{,}5y))=0\\ \cos(\pi(0{,}5x-0{,}5y))=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\pi(1{,}5x+0{,}5y)=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \pi(0{,}5x-0{,}5y)=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}1{,}5x+0{,}5y=0{,}5+k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 0{,}5x-0{,}5y=0{,}5+n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}3x=2k+1-y,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=2n+1+y,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2k+1-y}{3},\ k\in\mathbb{Z}\\ x=2n+1+y,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$ Подходят (x,y) вида:

Ответ. а) $\left(\frac{2k+1-y}{3},\ y\right),(k\in\mathbb{Z})$ и $(2n+1+y,\ y),(n\in\mathbb{Z})$

б) $\arcsin\frac{x}{5}+\arccos\frac{y}{4}<\frac{3\pi}{2}$ $\left\{\begin{array}{l}-1\le\frac{x}{5}\le1\\ -1\le\frac{y}{4}\le1\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}-5\le x\le5\\ -4\le y\le4\end{array}\right.$

$\arcsin\frac{x}{5}\le\frac{\pi}{2}$ и $\arccos\frac{y}{4}\le\pi$

Значит, неравенство верно, если $\left[\begin{array}{l}\arcsin\frac{x}{5}\ne\frac{\pi}{2}\\ \arccos\frac{y}{4}\ne\pi\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{5}\ne1\\ \frac{y}{4}\ne-1\end{array}\right.\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\ne5\\ y\ne-4\end{array}\right.$ (т.к. $\arcsin\frac{x}{5}+\arccos\frac{y}{4}\le\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$ и достигается только при $\arcsin\frac{x}{5}=\frac{\pi}{2}$ и $\arccos\frac{y}{4}=\pi$)

~~Теперь рассмотрим целые y от -4 до 4~~

~~$y=-4$. $2n+1-4=2n-3$, n: -1 0 1 2 3 4; x: -5 -3 -1 1 3 5~~

~~$\frac{2k+1-4}{3}=\frac{2}{3}k-1$ если $k\,\vdots\,3$, то $k=3t$, $\frac{2\cdot3t}{3}-1=2t-1$ - только нечётн. знач.~~

Если y - четн. (пусть $y=2t$), то $x=2n+1+y=2n+1+2t=2(n+t)+1\Rightarrow x$ будет принимать все нечётные значения. ~~$x=\frac{2k+1-2t}{3}$~~

Исключим $(x,y)=(5,-4)$ ~~$\left(\frac{2k+1-y}{3}=\frac{2k+1-2t}{3}\right)$~~

Если y - нечетн (пусть $y=2t+1$), то $x=2n+1+2t+1=2(n+t+1)\Rightarrow x$ будет принимать все чётные значения

$x=\frac{2k+1-y}{3}=$ ~~$\frac{2}{3}k+\frac{1-y}{3}$~~. Если $y=2t$, то $x=\frac{2k-2t-2+3}{3}=\frac{2}{3}(k-t-1)+1$. Если $k-t-1\,\vdots\,3$, то $x=2p+1$ - нечетное.

~~2)~~ Если $y=2t+1$, то

$x=\frac{2k-2t}{3}=\frac{2}{3}(k-t)$. Если $k-t\,\vdots\,3$, то $x=2q$ - четное.

(продолжение №3б)

Значит, нам подходят (x, y) такие, что: $\begin{cases} (x,y) \neq (5,-4) \\ x, y \text{ разной четности} \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$

~~Ответ~~. б) $(-5;-4)$, $(-5;-2)$, $(-5;0)$, $(-5;2)$, $(-5;4)$ } 9 реш.
$(-4;-3)$, $(-4;-1)$, $(-4;1)$, $(-4;3)$
$(-3;-4)$, $(-3;-2)$, $(-3;0)$, $(-3;2)$, $(-3;4)$ } 9 реш
$(-2;-3)$, $(-2;-1)$ $(-2;1)$ $(-2;3)$ } $9 \times 5 = 45$ реш.
– – – – } 9 реш
$(4;-3)$, $(4;-1)$, $(4;1)$, $(4;3)$
$(5;-2)$, $(5;0)$, $(5;2)$, $(5;4)$ – 4 реш ($(5,-4)$ исключено)

$45 + 4 = 49$.

Ответ. б) 49 решений

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4) Пусть было x одиннадцатиклассников (с учетом Пети и Васи), и в конце месяца стало n билетов.

Вероятность Пете и Васе попасть в начале месяца: $\frac{1\cdot 1\cdot C_{x-2}^{2}}{C_x^4}$

$\underbrace{1}_{\text{билет Пете}}\cdot\underbrace{1}_{\text{билет Васе}}\cdot\underbrace{C_{x-2}^{2}}_{\text{2 билета другим людям}}$ — благоприятные исходы

C_x^4 — всевозможные исходы.

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}=\frac{\frac{(x-2)!}{(x-4)!\,2!}}{\frac{x!}{(x-4)!\,4!}}=\frac{(x-2)!\cdot 4!}{x(x-1)(x-2)!\,2!}=\frac{12}{x(x-1)}.$$

Аналогично, вероятность Пете и Васе попасть в конце месяца: $\frac{1\cdot 1\cdot C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}$

$\underbrace{1}_{\text{Пете}}\cdot\underbrace{1}_{\text{Васе}}\cdot\underbrace{C_{x-2}^{n-2}}_{\text{n-2 билета остальным}}$ — благоприятные исходы

C_x^n — n билетов всем — всевозможные исходы

$$\frac{1\cdot 1\cdot C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n}=\frac{\frac{(x-2)!}{(x-n)!\,(n-2)!}}{\frac{x!}{(x-n)!\,n!}}=\frac{(x-2)!\cdot n!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{x(x-1)}$$

Известно также, что $\frac{n(n-1)/\cancel{x(x-1)}}{12/\cancel{(x-1)x}}=2,5$ $\quad\frac{n(n-1)}{12}=2,5$

$n^2-n-30=0$

$(n-6)(n+5)=0$

$n=6$ или $n=-5<4$ не подходит. Значит, в конце месяца было выделено 6 билетов.

Ответ. 6.

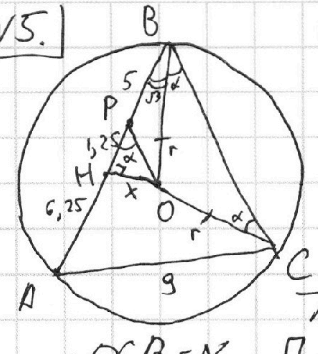
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N5.



Пусть OH-перпендикуляр на AB (сер. пер. к AB, т.к. O-центр опис. окр.). Тогда $HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(7{,}5+5) = \frac{12{,}5}{2} = \frac{25}{4}$; $HP = HB - PB = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$

Пусть $OB = OC = r$ и $\angle OBC = \alpha$. (в р/б $\triangle OBC$ $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$), а также $\angle OBP = \beta$, и $OH = x$.

Т.к. OCBP-впис., то $\angle OPH = 180 - \angle OPB = 180 - (180 - OCB) = \angle OCB = \alpha$. По теор. синусов в $\triangle ABC$: $2r = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow r = \frac{9}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

$\Downarrow$

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{9}{2r}$

В $\triangle OHB$: $\sin\beta = \frac{x}{r}\left(\frac{OH}{OB}\right)$, $\cos\beta = \frac{BH}{OB} = \frac{25}{4r}$

В $\triangle OHP$: $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}}$, $\cos\alpha = \frac{5}{4\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}}$

$OP = \sqrt{OH^2+HP^2} = \sqrt{x^2+\frac{25}{16}}$

$$\frac{9}{2r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}}\cdot\frac{25}{4r} + \frac{5}{4\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}}\cdot\frac{x}{r} = \frac{30x}{4r\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}}$$, т.е. $\frac{9}{2r} = \frac{30x}{4r\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}}$

$\frac{36}{60}\sqrt{x^2+\frac{25}{16}} = x$

$x = \frac{3}{5}\sqrt{x^2+\frac{25}{16}} \Rightarrow \frac{5}{3}x = \sqrt{x^2+\frac{25}{16}} \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = x^2 + \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{16x^2}{9} = \frac{25}{16}$

$x = \frac{15}{16} \Leftarrow x^2 = \frac{5^2\cdot 3^2}{16^2}$

Тогда, $r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{256} + \frac{625\cdot 16}{256}} = \sqrt{\frac{25(9+400)}{256}} = \frac{5}{16}\sqrt{409}$

~~$\sin(\alpha+\beta) = \frac{9}{2\cdot\frac{15\sqrt{409}}{16}} = \frac{72}{15\sqrt{409}}$; $\cos(\alpha+\beta) = \sqrt{\frac{409\cdot 225 - 72^2}{409\cdot 225}} = \frac{3}{15}\sqrt{\frac{9649}{409}}$~~

~~По теор. косинусов в $\triangle ABC$: $81 = \frac{625}{4} + BC^2 - 2BC\cdot\frac{3}{15}\sqrt{\frac{9649}{409}}$~~

~~$AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cdot\cos BAC = BC^2 = 4r^2\cdot\sin^2 BAC$ $\Rightarrow 81 + \frac{625}{4} - 2\cdot 9\cdot\frac{25}{2}\cos BAC = \frac{25\cdot 409}{64} - \frac{25\cdot 409}{64}\cos^2 BAC$~~

~~теор. косинусов теор. синусов~~

~~$10225\cos^2 BAC - 14400\cos BAC + 15184 - 10225 = 0$~~

$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{25}{16}}} = \frac{15/16}{\sqrt{\frac{225}{256}+\frac{400}{256}}} = \frac{15/16}{25/16} = 0{,}6$. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}96$.

($\alpha < 90$) по условию

По теор. синусов в $\triangle BOC$: $\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}$

$BC = \frac{5}{16}\sqrt{409}\cdot\frac{0{,}96}{0{,}6} = \frac{\sqrt{409}}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot OB} = \frac{9 \cdot 12{,}5 \cdot \sqrt{409}}{4 \cdot \frac{5\sqrt{409}}{16} \cdot 2} = \frac{9 \cdot 16 \cdot 25}{5 \cdot 8 \cdot 2} = 9 \cdot 5 = 45.$$

(4 r)
опис. окр.

Ответ. 45

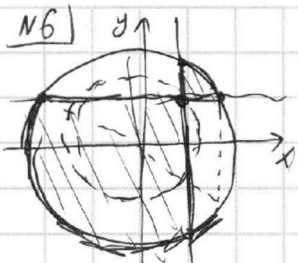
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

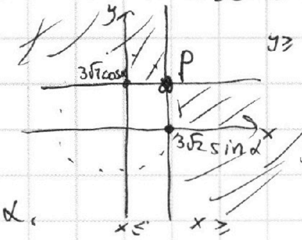
№6)



$x^2+y^2\le 25$ ограничивает ~~круг~~ радиуса 5 (с центром в начале коорд.)

Первое нер-во выполняется, если

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \le 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \ge 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}\end{array}\right.$$

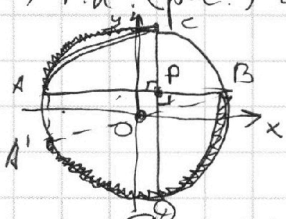


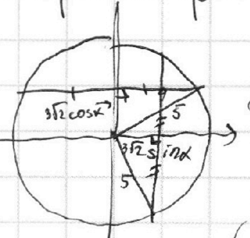
(x,y) принадлежат ~~ограничения~~ данной области. Пусть P – точка пересечения $x=3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y=3\sqrt{2}\cos\alpha$.

P всегда лежит от начала координат на расстоянии $\sqrt{18}$, т.к. (пусть $O(0;0)$). $OP^2=(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2+(3\sqrt{2}\cos\alpha)^2=18(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=18$. $OP=\sqrt{18}$.

Т.е., точка P будет принадлежать окружности с центром в O и радиусом $\sqrt{18}<5$.

Периметр ограничиваемой фигуры складывается из длин двух хорд окружности $x^2+y^2=25$ и двух дуг этой же окружности. ~~Длина~~ Сумма длин двух дуг всегда постоянна, т.к. (рис.) если отразить одну из дуг относительно оси (например, абсцисс), то две дуги объединятся в одну, при этом концы этих дуг диаметрально противоположны (изначально была симметрия относительно одной оси, потом стала относительно двух $\Rightarrow$ относительно центра $(0;0)$). Значит, сумма длин дуг равна $\frac{2\pi R}{2}=\pi R=5\pi$. Т.е., периметр фигуры зависит только от суммы длин хорд.





По т. Пифагора из рисунка следует, что сумма их длин равна: $L=2\cdot(\sqrt{25-18\cos^2\alpha})+2\cdot(\sqrt{25-18\sin^2\alpha})$. Пусть L – функция от α.

$$(L(\alpha))'=2\cdot\left(\frac{-36\cdot\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}}+\frac{36\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sqrt{7+18\cos^2\alpha}}\right)=72\sin\alpha\cos\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}-\sqrt{7+18\cos^2\alpha}}{\sqrt{25-18\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{7+18\cos^2\alpha}}\right)$$

$$(L(\alpha))'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \\ \sin\alpha=0 \Rightarrow \cos\alpha=1 \\ 25-18\cos^2\alpha=7+18\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

Значит, максимальное значение достигается в 1 из этих точек.

если $\cos\alpha=0$: $L=2\cdot\sqrt{25}+2\cdot\sqrt{25-18}=10+2\sqrt{7}$

$\cos\alpha=1$: $L=2\cdot\sqrt{25-18}+2\cdot\sqrt{25}=10+2\sqrt{7}$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$: $L=2\cdot\sqrt{25-9}+2\cdot\sqrt{25-9}=2\cdot4+2\cdot4=16$

$16>10+2\sqrt{7}$ т.к. $\Leftarrow 6>2\sqrt{7} \Leftarrow 36>28$

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$. Значит, максимальное значение периметра достигается, если $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$ и оно равно...

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(продолжение №6)

$M = 5\pi + 16$

длина дуг длина хорд

Ответ. $M = 5\pi + 16$

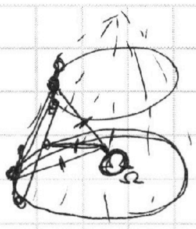
при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

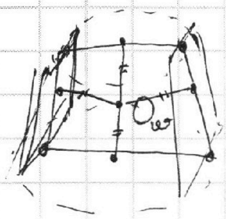
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





Пусть O_Ω - центр шара Ω,
O_ω - центр шара ω.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

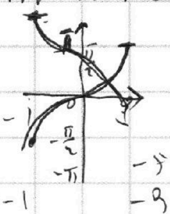
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = 1111a \quad a \in \{1 \dots 9\}$

$B = \overline{xyz} \quad x, y, z \; ? = 2$

$C = \overline{pq} \quad p, q \; ? = 3$

$1111 = 11 \cdot 101$



B	C
101	11
$\boxed{202}$	22
303	$\boxed{33}$
404	44
505	55
606	66
707	77
808	88
909	99

$\arcsin$

$\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2}$

$\left(\frac{3}{2}x + \frac{y}{2}\right)\pi$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$x^3 - y^3 - 3xy = x^3 + (-y)^3 + (-1)^3 - 3 \cdot x \cdot (-y)(-1) =$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$

$\left[\begin{array}{l} y+x+2=0 \\ (2) \end{array}\right.$

$= (x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y)$

(2) $(x-1)(y+1) = xy$

$xy + x - y - 1 = xy$

$x - y - 1 = 0$

$(\sin(\pi x) + \sin(\pi y))\sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y)\cos \pi x$

$1 - \cos^2(\pi x) + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi x)\cos(\pi y)$

$2\cos^2(\pi x) - 1 + \cos(\pi(x+y)) = 0$

$\cos(2\pi x) + \cos(\pi(x+y)) = 0$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$2n - 1 + 2t = 2(n+t) - 1$

$2n - 1 + 2t + 1 = 2(n+t)$

$\frac{2}{3}k + \frac{1-2y}{3}$

$P_1(A) = \frac{4}{x}$ $\quad P_2 =$

$Q_1(B) = \frac{3}{x}$

$\Pi \cdot B \cdot C_{x-2}^2$

$\frac{1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^2}{C_x^4}$

$\frac{P_2 \cdot Q_2}{P_1 \cdot Q_1} = 2{,}5$

$C_3^1 = 3$

$C_5^1 = 5$

$\frac{12(x-2)!}{x!} = \frac{12}{(x-1)x} = \frac{12}{x(x-1)}$

$P_1 \cdot Q_1 = \frac{12}{x(x-1)}$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{12}{x(x-1)}$

$P_2 \cdot Q_2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{(x-2)!}{x(x-1)(x-2)!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)} = \frac{30}{x(x-1)}$

$6 \quad 5$

$y = 3\sqrt{2}\cos x$

$x = 3\sqrt{2}\sin x$

$S_{ABC} - ? \quad AP = \frac{2}{15} \quad BP = 5 \quad AC = 9$