



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N1.)

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, \quad a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

П.к. $A \cdot B \cdot C$ являются квадратами натуральных чисел, то любой простой множитель входит в произведение $A \cdot B \cdot C$ в чётной степени.

Потому простой множитель 101 числа A входит либо в какое-то из чисел B и C , но C -двугзначное, значит, $B = 101 \cdot b$, $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

По условию хотя бы 1 цифра числа B -это 7, значит, $b=7$, а $B=707$.

Аналогично, простой множитель 11 числа A входит в число C : $C = 11 \cdot c$, $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

По условию хотя бы 1 цифра числа C -это 1, значит, $c=1$, а $C=11$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7$$

Значит, $a=7$.

Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(N 2.)

$$x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}, \quad x \neq 4$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}, \quad y+x+3 > 0$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y = 16$$

$$x - y = 4$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = \\ &= 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N3)

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y = 0$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

или

$$\cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$



$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x - 3\pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - 3y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 + 2k - x, k \in \mathbb{Z}$$

$$3y = x - 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{x - 1 - 2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x; 1+2k-x), k \in \mathbb{Z};$

$$(x; \frac{x-1-2n}{3}), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8) \arccos \frac{x}{7} - \operatorname{arcsinh} \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \geq -1 \\ \frac{x}{7} \leq 1 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{4} \geq -1 \\ \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{\arccos \frac{x}{7} > -\frac{\pi}{2}}_{[0; \pi]} + \underbrace{\arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}_{[-\pi; 0]}$$

Неравенство верно для всех x, y , удовлетв. ОДЗ, кроме случая, когда левая часть равна 0.

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{4} \neq 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} x \neq 7 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

1) Рассмотрим вид $(x; 1+2k-x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 1+2k-x \geq -4 \\ 1+2k-x \leq 4 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2k \geq x-5 \\ 2k \leq x+3 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} k \geq \frac{x-5}{2} \\ k \leq \frac{x+3}{2} \end{cases}$$

$x = -7:$

1) Рассмотрим вид $x+y=1+2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$x = 1+2k-y, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 1+2k-y \geq -7 \\ 1+2k-y \leq 7 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2k \geq y-8 \\ 2k \leq y+6 \end{cases} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} k \geq \frac{y-8}{2} \\ k \leq \frac{y+6}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$y = -4: \quad -6 \leq k \leq 1 \quad - 8$ реш-й

$y = -3: \quad -5 \leq k \leq 1 \quad - 7$ реш-й

$y = -2: \quad -5 \leq k \leq 2 \quad - 8$ реш-й

$y = -1: \quad -4 \leq k \leq 2 \quad - 7$ реш-й

$y = 0: \quad -4 \leq k \leq 3 \quad - 8$ реш-й

$y = 1: \quad -3 \leq k \leq 3 \quad - 7$ реш-й



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмейте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{lll} y=2 : & -3 \leq k \leq 4 & - 8 \text{ реш-й} \\ y=3 : & -2 \leq k \leq 4 & - 7 \text{ реш-й} \\ y=4 : & -2 \leq k \leq 5 & - 6 \text{ реш-й} \quad (y=4 \text{ при } x=7 \text{ - не угл.}) \end{array}$$

2) Рассмотрим реш-й $x-3y = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$
 $x = 1+2n+3y, n \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+2n+3y \geq -7 \\ 1+2n+3y \leq 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2n \geq -3y-8 \\ 2n \leq -3y+6 \end{array} \right. \stackrel{(x)}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} n \geq \frac{-3y-8}{2} \\ n \leq \frac{-3y+6}{2} \end{array} \right. \quad \text{некор.}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{lll} y=-4 : & 2 \leq n \leq 9 & - 8 \text{ реш-й} \\ y=-3 : & 1 \leq n \leq 7 & - 7 \text{ реш-й} \\ y=-2 : & -1 \leq n \leq 6 & - 8 \text{ реш-й} \\ y=-1 : & -2 \leq n \leq 4 & - 7 \text{ реш-й} \\ y=0 : & -4 \leq n \leq 3 & - 8 \text{ реш-й} \\ y=1 : & -5 \leq n \leq 1 & - 7 \text{ реш-й} \\ y=2 : & -7 \leq n \leq 0 & - 8 \text{ реш-й} \\ y=3 : & -8 \leq n \leq -2 & - 7 \text{ реш-й} \\ y=4 : & -10 \leq n \leq -3 & - 8 \text{ реш-й} \quad (y=4 \text{ при } x=7 \text{ - не угл.}) \end{array}$$

Множество всех реш-й: $(8+7) \cdot 4 + 7 + (8+7) \cdot 4 + 7 =$
 $= 15 \cdot 8 + 14 = 134$

Ответ: 134.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N4.)

Пусть n - кол-во одиннадцатиклассников,
 x - кол-во билетов в конце месяца.

1) Начало месяца.

Всего способов выбрать 4 учеников на концерт:

$$\binom{n}{4}$$

~~Мы два благоприятных способа, в к-х
Петя и Вася в концерт попадут на концерт,
их: $\binom{n-2}{2}$~~

Рассмотрим благоприятные случаи. Петя и
Вася получили билеты, к ним осталось
выбрать еще своих учеников из оставшихся
ст., способов сделать это:
 $\binom{n-2}{2}$.

Тогда вер-ть, что Петя и Вася вместе
попадут на концерт:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{4}} = \\ &= \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{2! n!} = \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

2) Конец месяца.

Всего способов выбрать учеников на концерт:

$$\binom{x}{n}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Бесприматных случаев: C_{n-2}^{x-2} (к Пете и Вале выбирать себе $x-2$ гномов из оставшихся).

Тогда вер-ть, что Пете и Вале вместе идут из пошага, ровно: $P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$

$$= \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{(n-2)! \cdot x!}{(x-2)! n!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

3) Пс. услово $11P_1 = P_2$.

$$\frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}, n > 2$$

$$11 \cdot 12 = x(x-1)$$

$$X^2 - X - 11 \cdot 12 = 0$$

$$X = \begin{cases} -11 & \text{не уд. } X > 0 \\ 12 \end{cases}$$

Значит, в конце месяца будет 12 бисектов всего.

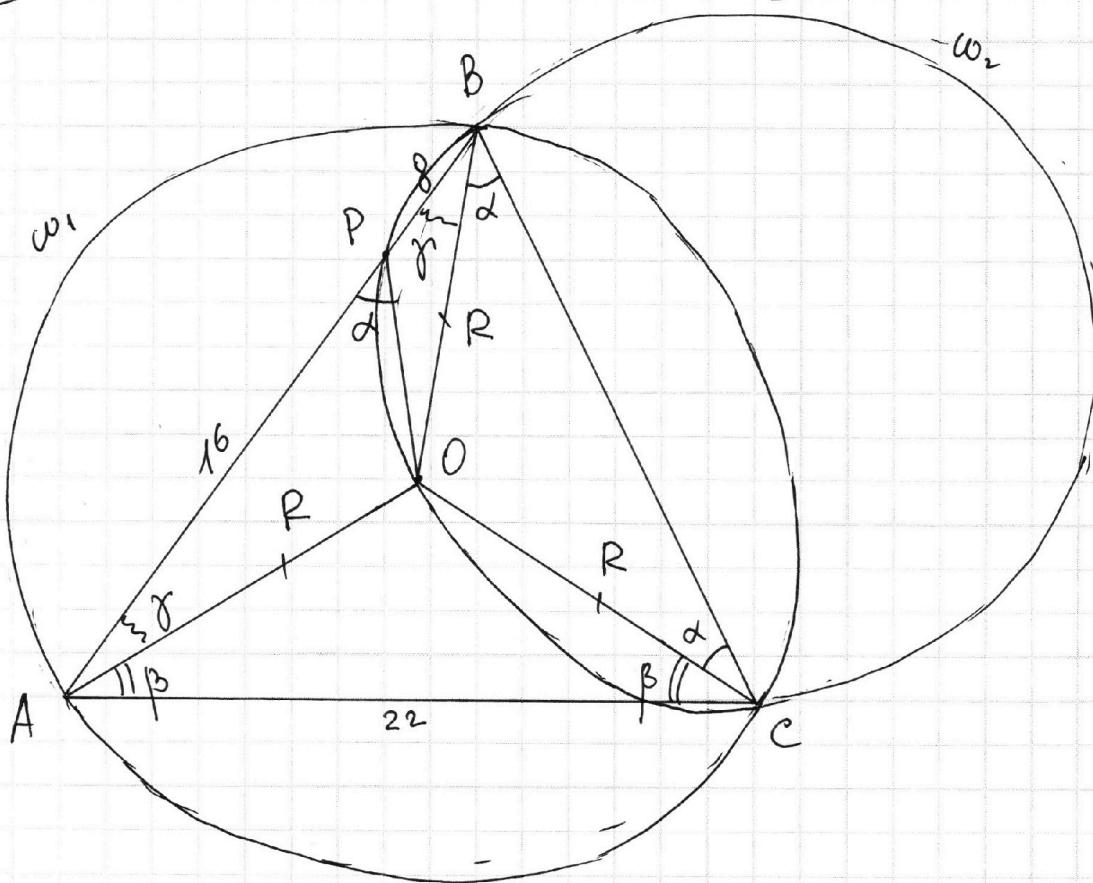
Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5.



- 1) $OA = OB = OC = R$ (как радиусы окр-ти ω_1).
- 2) $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, $\angle OAC = \angle OCA = \beta$, $\angle BAO = \angle ABO = \gamma$.
- 3) $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.
- 4) $OPBC$ - внс. в окр-ти $\omega_2 \Rightarrow \angle APO = \angle OCB = \alpha$.
- 5) Т-ма синусов для $\triangle AOP$: $\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\pi - \alpha - \gamma)} \Leftrightarrow \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\alpha + \gamma)} \Rightarrow R \sin(\alpha + \gamma) = 16 \sin \alpha$.
- 6) Т-ма синусов для $\triangle ABC$: $\frac{22}{\sin(\alpha + \gamma)} = 2R \Rightarrow R \sin(\alpha + \gamma) = 11$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7) R \sin(\alpha + \gamma) = 16 \sin \alpha \Rightarrow 16 \sin \alpha = 11 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{11}{16}.$$

$$R \sin(\alpha + \gamma) = 11$$
$$8) \alpha < 90^\circ : \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{11^2}{16^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(16-11)(16+11)}{16^2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 27}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

$$9) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot (16+8) \cdot 22 \cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 24 \cdot 22 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16} =$$
$$= \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Объем: } \frac{99\sqrt{15}}{2}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N6)

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

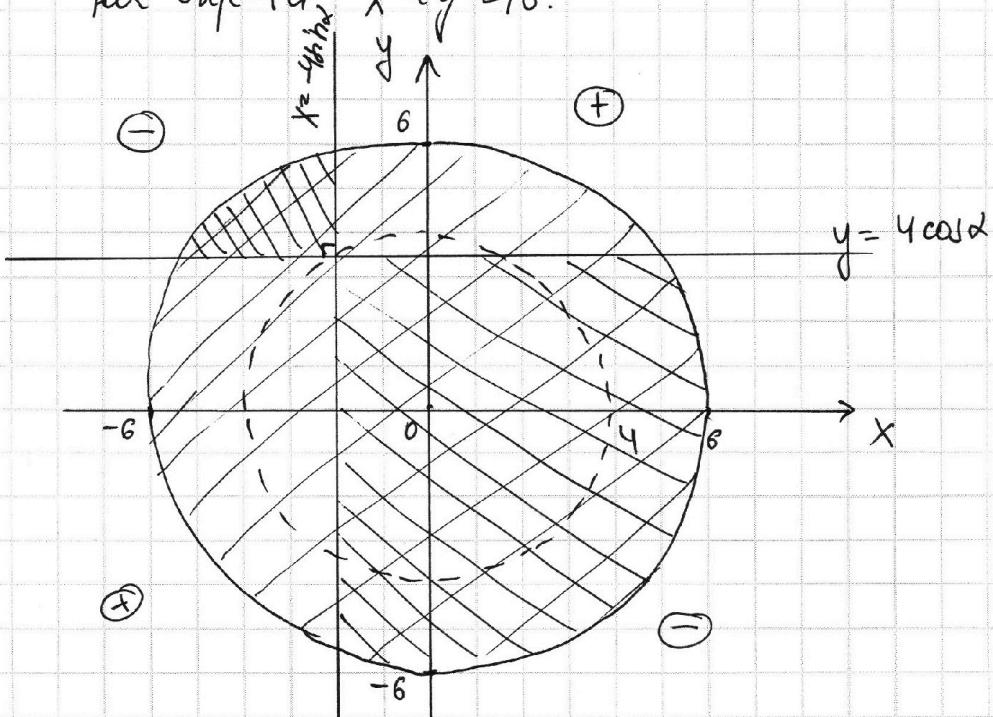
Второе ур-е задаёт круг с центром в начале координат и радиусом 6.

Чтобы найти множество удовлетв. первому ур-ю, воспользовавшись вторым образом действий:

$$\begin{aligned} x &= -4 \sin \alpha && -\text{ прямая паралл. оси } Oy \\ y &= 4 \cos \alpha && -\text{ прямая паралл. оси } Ox \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \sin^2 \alpha \\ y^2 &= 16 \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16 - \text{ окр-ть, с центром в начале координат и радиусом 4.}$$

Прямые $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$ пересекаются на окр-ти $x^2 + y^2 = 16$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} \quad (1)$$

↑
длина
дуги окр-ти
 $\in \varphi(\alpha) =$
= половина
периметра окр-ти

↑
длина
прямой
 $y = 4\cos\alpha \in \varphi(\alpha)$

↑
длина
прямой
 $x = -4\sin\alpha \in \varphi(\alpha)$

$$(1) 6\pi + 4\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 4\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} \leq$$

$$\begin{aligned} &= 6\pi + \frac{4}{3}\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha} + \frac{4}{3}\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha} \\ M' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha} \cdot \left(+\frac{4}{3} \cdot 2\cos\alpha \right) \cdot \left(+\sin\alpha \right) + \\ &+ \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha} \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot 2\sin\alpha \right) \cdot \left(\cos\alpha \right) = \\ &= \frac{16}{27} \cos\alpha \sin\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\alpha}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M' &= \frac{\cancel{4^2}}{2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}} \cdot \left(+4 \cdot 2\cos\alpha \right) \cdot \left(+\sin\alpha \right) + \\ &+ \frac{\cancel{4^2}}{2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}} \cdot \left(-4 \cdot 2\sin\alpha \right) \cdot \left(\cos\alpha \right) = \\ &= \frac{16 \sin\alpha \cos\alpha}{\cancel{4^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$2\sin\alpha \cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \text{или } 9 - 4\cos^2\alpha = 9 - 4\sin^2\alpha$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 0 \\ 2\alpha &= \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha &= \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \operatorname{tg}\alpha = -1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \mid \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} M &= 6\pi + 2 \cdot 6 + 2\sqrt{20} = \\ &= 6\pi + 12 + \cancel{2\sqrt{5}} 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$2) \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} M &= 6\pi + 4\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} = 6\pi + 4\sqrt{36 - 8} = \\ &= 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$6\pi + 12 + 4\sqrt{5} < 8\sqrt{7} + 6\pi$$

$$12 + 4\sqrt{5} < 8\sqrt{7}$$

$$3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{7}$$

$$M_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7} \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 6\pi + 8\sqrt{7} \text{ при } \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11,101$$

$$B = 101 \cdot 6 = 707$$

$$C = 11 \cdot c = 11$$

$$ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a &= 7 \\ a &= 9 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 7 \\ c &= 1 \\ c &= 7 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

$$a = 7$$

$$\begin{array}{r} 1111 | 11 \\ 101 | 101 \\ 1 \end{array}$$

$$ABC = \cancel{7}x^2 \cdot 101 \cdot 7^2$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

~~Решение~~

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x-y+y+4+3}{(x-4)(y+4)} \quad X \neq 4$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4) \quad xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y = 16$$

$$x - y = 4$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 + 4y^2 - 8xy$$

$$= 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА
_____ из _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta +$$

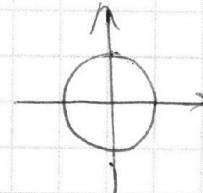
$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\pi x + \pi y$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$



$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x - 3\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

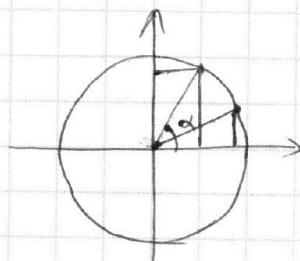
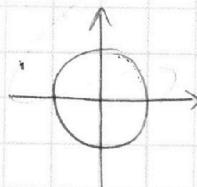
$$\pi x - 3\pi y = \pi + 2\pi k$$

$$x + y = 1 + 2k$$

$$x - 3y = 1 + 2k$$

$$y = 1 + 2k - x$$

$$3y = x - 1 - 2k$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{24}{\sin 2\gamma}$$

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{24}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$R = \frac{12}{\cos \alpha}$$

$$\frac{22}{\sin(\gamma+\alpha)} = 2R$$

$$\frac{11}{\sin(\gamma+\alpha)} = R$$

$$\frac{11}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 1$$

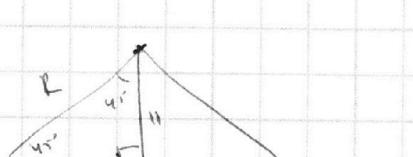
$$\alpha+\beta = 45^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$\frac{12}{\cos \alpha} = 11\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{11\sqrt{2}}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{n(n+1)} = \frac{x(x-1)}{(n-1)n}$$



$$R^2 = 2 \cdot 11^2$$

$$R = 11\sqrt{2}$$

$$x(x-1) = 12 \cdot 11$$

$$x = 12$$

$$x^2 - x - 12 \cdot 11 = 0$$

$$x = \frac{12}{-11 - \text{иск}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

466249

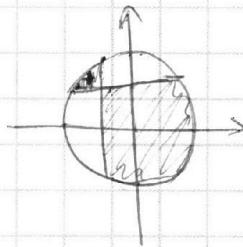
$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x = -4 \sin \alpha$$

$$x = -4 \sin \alpha$$

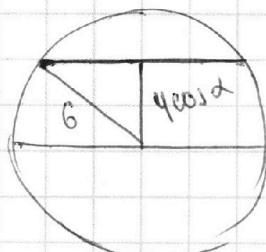
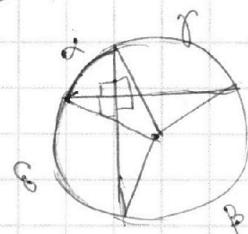
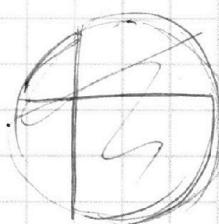
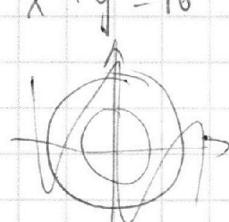
$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x = -4 \sin \alpha$$

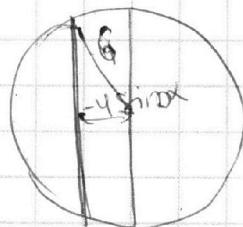


$$y = 4 \cos \alpha$$

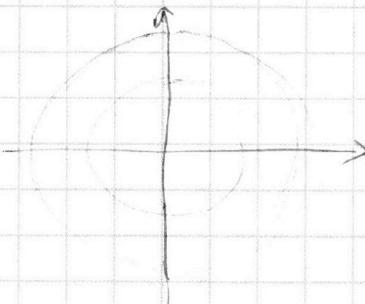
$$\begin{aligned}x^2 &= y^2 + 16 \sin^2 \alpha \\y^2 &= 16 \cos^2 \alpha \\x^2 + y^2 &= 16\end{aligned}$$



$$2\sqrt{36 - 46 \cos^2 \alpha} \in \mathbb{R}$$



$$2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\pi - \beta - \alpha)}$$

$$\frac{22}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R$$

$$\frac{256}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sqrt{35}}{16}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\pi - \beta - \gamma)}$$

$$\frac{22}{\sin(\beta + \gamma)} = 2R$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\frac{11}{\sin(\alpha + \gamma)} = R$$

$$11 = R \sin(\alpha + \gamma)$$

$$16 \sin \alpha = 11$$

$$\sin \alpha = \frac{11}{16}$$

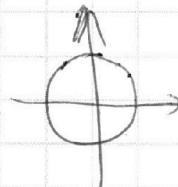
$$\sin(\beta + \gamma) = ?$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$R \sin(\alpha + \gamma) = 11$$

$$16 \sin \alpha = 11$$

$$\sin \alpha = \frac{11}{16}$$



$$\sin(\beta + \gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \cos \alpha$$

$$-\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{7} > -\frac{\pi}{2}$$

α

β

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \geq -1 \\ \frac{x}{7} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{7} \geq -1 \\ \frac{y}{7} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -4 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{7}$$

$$\sin \beta = \frac{y}{7}$$

Метод координатных осей

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

2,2

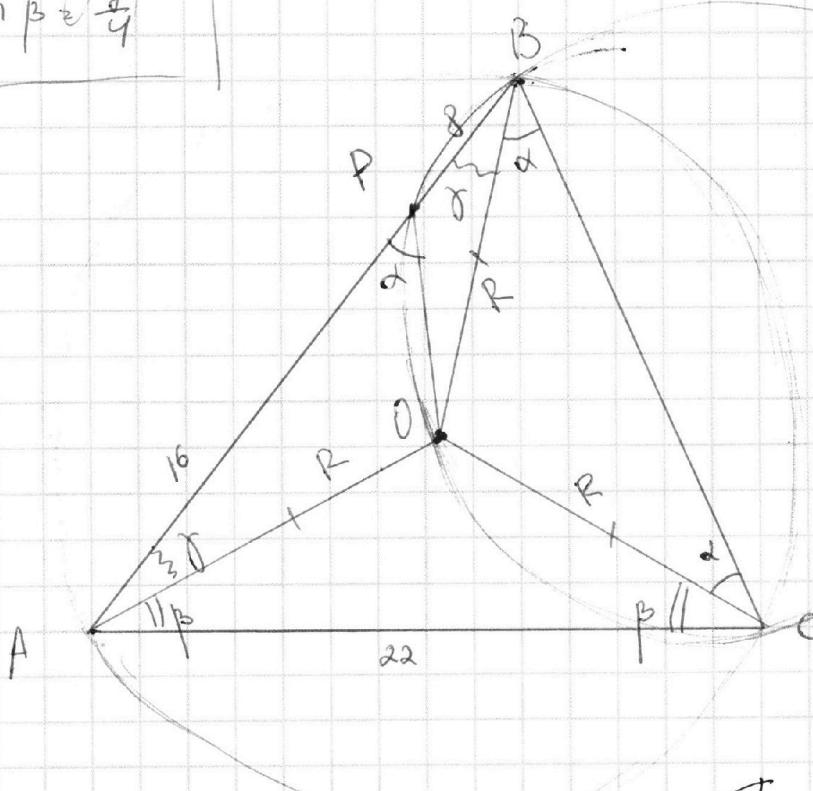
$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 184 \\ 45 \\ \hline 488 \end{array}$$

$$\sqrt{5^2} = 2,3$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$3\sqrt{5} = 2,8$$

$$\cancel{\text{as}} \quad \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2\sqrt{x}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} > -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{y}{4}$$

$[0, \pi]$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$



$$[-\pi, 0]$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$$x = 7 \sin \theta$$

$$1 + 2k - x \geq -4$$

$$\begin{aligned} &\cancel{1} \quad 2k \geq x - 5 \\ &\cancel{1} \quad k \geq \frac{x-5}{2} \end{aligned}$$

$$-\frac{11}{2} = -5,5$$

$$x = -5$$

$$\underbrace{00000}_{n} \underbrace{00000}_0$$

$$1 + 2k - x \leq 4$$

$$\begin{aligned} 2k &\leq x + 3 \\ k &\leq \frac{x+3}{2} \end{aligned}$$

$$60000$$

$$P(\text{Первое}) \cdot P(\text{Второе})$$

$$\begin{aligned} &\frac{x^{15}}{8} \\ &+ \frac{14}{120} \\ &\hline 134 \end{aligned}$$

Беско конс бар C_n^4

$$\text{уф. } \begin{array}{c} \text{б} \\ \text{о} \\ \text{о} \\ \text{о} \\ \text{о} \end{array} \begin{array}{c} \text{н} \\ \text{о} \\ \text{о} \end{array}$$

$$C_{n-2}^2$$

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2! (n-4)!} \cdot \frac{n!}{n!}$$

$$= \frac{4!(n-2)!}{2! n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot n(n-1)} \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(x-2)! (n-x)!} = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot x!}{(x-2)! n!} \cdot \frac{x(x-1)}{(n-1)n}$$