



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (лины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1. Из условия A имеет вид $A = X \cdot 111$, где $X \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. $111 = 11 \cdot 101$, 11 и 101 — простые числа.

Т.к. C не может делиться на 101 (C-двухзначное), а одно из чисел B и C делится на 101 (т.к. должно выполняться условие $A \cdot B \cdot C = n^2$ ($n \in N$)), то B: 101 (т.к. 101 — простое и должно входить в произв. A · B · C в чётной степени). Заметим, что B \neq 11, т.к. тогда $B \geq 11 \cdot 101 = 1111$, но B — трёхзначное. Отсюда C: 11, ~~аналогично тому~~, т.к. 11 — простое и должно входить в A · B · C в чётной степени т.к. $A \cdot B \cdot C = n^2$.

Т.к. B: 101 и трёхзначное, то B может быть 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909. Из этих



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вариантов, что B есть 'под' условие, что B есть 2, подходит только 202. $B = 202$.

$C: 11$ и ~~двухзначное~~. Т.е. C может быть 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Из этих вариантов под условие, что B есть 3, подходит только 33. $C = 33$. Имеем:
 $A \cdot B \cdot C = X \cdot 1111 \cdot 202 \cdot 33 = X \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3$,
где $X \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Числы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом nat. числа, нужно, чтобы все простые делители входили в него в чётной степени. Отсюда $X: 2$ и $X: 3$. Таких nat. чисел от 1 до 9 только одно — 6. Т.е. $X = 6$, $A = 6 \cdot 1111 = 6666$. ~~т.к.~~ $A \cdot B \cdot C = 6666 \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ — квадрат nat. числа.
Т.е. таких троек всего одна $(6666, 202, 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Изначально $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$. После
уменьши x на 1 и увеличи y на 1,
получим новое выражение $K' = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} +$
 $+ \frac{2}{(x-1)(y+1)}$. $K = K'$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}.$$

Заметим, что: $x \neq 0; y \neq 0; x \neq 1; y \neq -1$.
Т.к. в знаменателе не м.б. 0.

Преобразуем: $\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$.

Домножим обе части на $xy(x-1)(y+1) \neq 0$.

$$(y+x+2)(x-1)(y+1) = (y+x+2)(xy).$$

Равенство выполняется, если $y+x+2=0 \Leftrightarrow$

~~в таком случае $x=-2-y \Leftrightarrow x+y=-2$~~ .

~~Представим в так.~~

$$\begin{aligned} & (-2-y)^3 - y^3 - 3y(-2-y) = -y^3 - 6y^2 - 12y - 8 - y^3 \\ & + 6y + 3y^2 = -2y^3 - 3y^2 - 6y - 8. \end{aligned}$$

Но по условию $x>0$ и $y>0 \Rightarrow x+y>0$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит такое невозможно и $x+y+2 \neq 0$
Позовем обе части на $(x+y+2)$.

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$xy + x - y - 1 = xy$$

$$x - y = 1.$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = \\ &= 1 \cdot (x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy = \\ &= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2. \quad \text{т.к. } x-y=1, \end{aligned}$$

то $M = (x-y)^2 = 1$. Достигается например, при $(x; y) = (2; 1)$.

Ответ: $M = 1$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ЧИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

BA $\frac{3\pi}{2}$, он реалнз., только когда $\arcsin \frac{x}{5} = -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5$, а $\arccos \frac{y}{4} = \pi$ $\Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4$. Из всех

пар нам не подойдёт только $(5; -4)$.
~~Найдём все пары, состоящие из возможных значений x, y . Найдём пары вида $(y+1+2k; y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это пары $(-5; -4); (-3; -4); (-1; -4); (1; -4); (3; -4)$.~~

Тогда ответом будут служить все пары, полученные в пункте а,

где $x \in [-5; 5]$ и где $y \in [-4; 4]$. Заметим, что пары $(y+1+2k; y)$ означают разную четность x и y .

т.е. это пары $(x; y)$ для $x \in \{-5; -4; -3; \dots; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ и $y \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$, что ~~х и у разной четности~~. Пары $(x; 1+2k-3x)$ также означают разную

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

четности X и Y . Т.к. Если X -чёт, $3X$ -чёт, $1+2k-3X$ -неч.; если X -неч., $3X$ -неч., $1+2k-3X$ -чёт. Значит, аналогично парам предыдущего вида, это пары $(X; Y)$, где $X \in \{-5; -4\} \dots; 4; 5\}$, $Y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, X и Y -разной четности. Исключая пару $(5; -4)$.

Ответ: да. Переберём такие пары. Посчитаем количество.
Если X -чёт, то Y -неч. ~~Чётных~~ Чётных ~~нечётных~~ таких $X = -5, Y = -4$. Всего пар $5 \cdot 4 = 20$. Если X -неч., то X -чёт. Таких $X = -6, Y = -5$. Число пар: ~~6 · 5 = 30~~, ~~6 · 5 = 30~~, но одна из них $(5; -4)$, то есть осталось 29. Всего пар 29.
нар $20 + 29 = 49$.

Ответ: 49 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Б) Область определения $\arcsin x$ и $\arccos x$ — $[-1; 1]$. Поэтому, т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $x \in \{-5; -4; -3; \dots; 3, 4, 5\}$, а $y \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$.

~~Рассмотрим, какие пары подходят под $(y+1+2k; y)$, $k \in \mathbb{Z}$, это пары $(-5; -4); (-3; -4); (-1; -4); (1; -4)$~~

~~Заметим, что если и $\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{3\pi}{4}$ и $\arccos \frac{y}{4} \geq \frac{3\pi}{4}$, то сумма $\geq \frac{3\pi}{2}$~~

~~то есть они не подходят.~~

~~$\arcsin \frac{x}{5}$ Заметим, что $\arccos \frac{y}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; а $\arcsin \frac{x}{5} \in [0; \pi]$. Значит.~~

~~$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ на $\frac{3\pi}{2}$~~

~~достаточно заметить, что $\arcsin \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi] \Rightarrow$~~

$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, при любых x, y , подходящих под область определения.

Нам не подходит только случай равенст-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. A) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\cancel{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cancel{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$\cdot \cos \pi x$. Сократим обе части на 2.

Равенство достигается, когда $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} =$

$$= 0, \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$x - y = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим случай,

когда $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \neq 0$. Разделим обе части на $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$.

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

~~нормирую обе части на $\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x$.~~

~~$\tan \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \tan \pi x$.~~

Сделаем замену
 $\frac{\pi x + \pi y}{2} = \alpha; \quad \pi x = \beta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Нужно понять, когда $\operatorname{tg} 2x \geq 0$~~
~~в произведении стоит +.~~

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Делим обе части на 2.

$$\cancel{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)} = \cancel{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$$

$$-\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos(\alpha+\beta) = 0$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y+2x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{3x+y=1+2k, k \in \mathbb{Z}}$$

Имеем решения вида:

$$x-y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{т.е. пары } (y+1+2k; y), \text{ где } k \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R};$$

$$3x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или } (x; 1+2k-3x), \text{ где } k \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $(y+1+2k; y); (x; 1+2k-3x), k \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В~~за~~ ч. Пусть всего k -классников - k . В начале месяца всего вариантов распределить билеты - C_k^4 (выбрать 4 обладателя билета среди k 11-классников). А ~~всего~~ вариантов, чтобы Петя и Вася пошли на концерт - C_{k-2}^2 (отобрать 2 билета Петя и Вася и распределить оставшиеся ~~12~~ 2 билета, среди $k-2$ оставшихся людей). Тогда вероятность в начале месяца:

$$V_1 = \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{\cancel{(k-2)!}}{\cancel{(k-4)!} \cdot \cancel{k!}} = \frac{(k-2)!}{2!(k-4)!} = \frac{k!}{4!(k-4)!}$$

$$= \frac{\cancel{(k-2)!} \cdot 1 \cdot 2}{\cancel{(k-2)!} \cdot \cancel{(k-1)!} \cdot k} = \frac{12}{(k-1) \cdot k}$$

В конце месяца пусть билетов стало n .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда всего вариантов распределить $n \times C_k^n$, а вариантов, чтобы Петя и Вася гостили вместе — C_{k-2}^{n-2} .
(Аналогично случаю в начале месяца).

Тогда вероятность в конце месяца

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^n} = \frac{\frac{(k-2)!}{(n-2)!(k-n)!}}{\frac{k!}{n!(k-n)!}} = \frac{\frac{(k-2)!}{(n-2)!}}{\frac{(k-2)!(k-1)\cdot k}{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}} = \frac{(n-1)\cdot n}{(k-1)\cdot k}.$$

Из условия $V_2 = 2,5V_1$,

$$\frac{(n-1)\cdot n}{(k-1)\cdot k} = 2,5 \frac{12}{(k-1)\cdot k}$$

$$(n-1)n = 30.$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6)(n+5) = 0$$

$n = -5$ — не подх., т.к. выбрали ~~4~~ билетов

$n = 6$ — подходит.

$n > 4$

~~4~~ билетов

Ответ: 6 билетов.

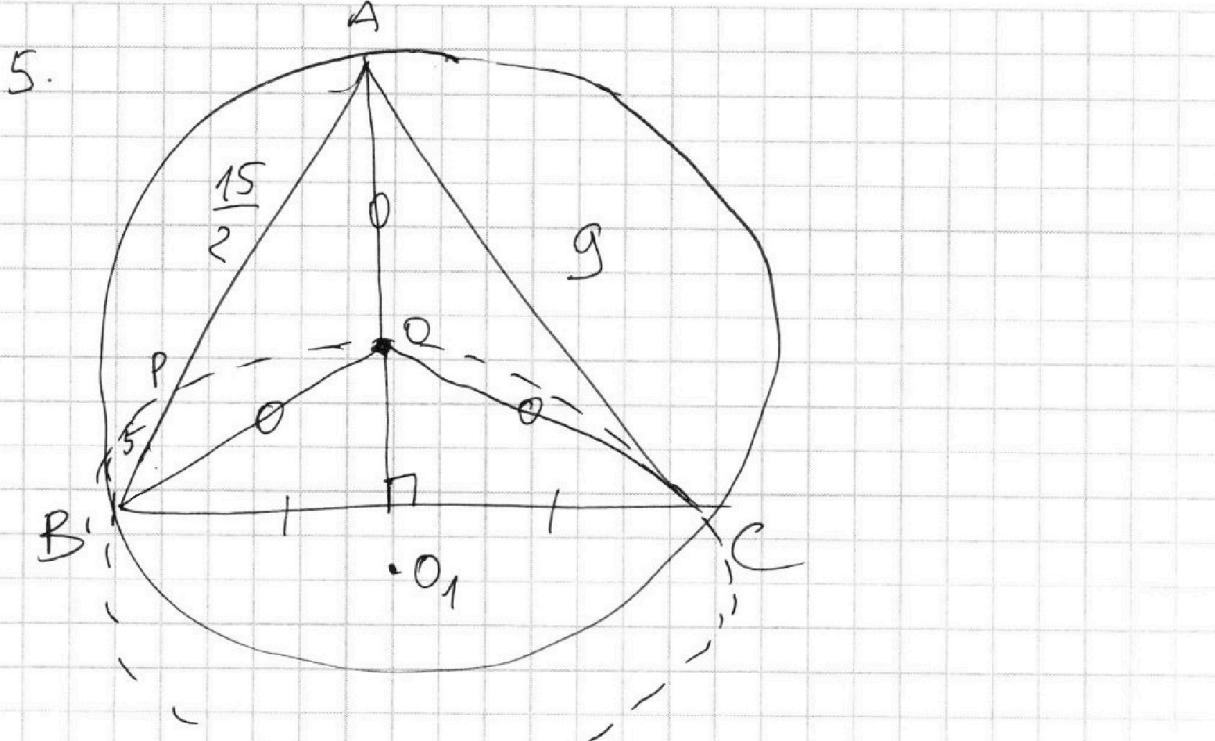
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассчитаем степень точки Q по оси,

$$\omega_2. \text{ Это } AP \cdot AB = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{375}{4}$$

Заметим, что расстояние от A до центра ω_2 (назовём его ρ),

$$\text{равно } R^2 + \frac{375}{4}, \text{ где } R - \text{ радиус } \omega_1.$$

$\rho = AO + OO_1$, где O_1 — центр ω_2 ,
т.к. центры окр. являются точками
пересечения сер. линий Δ , BC — в обеих Δ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ЧИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть наша точка имеет коорд. X и Y , тогда вертикальный отрезок имеет длину $2\sqrt{25-X^2}$; горизонтальный $2\sqrt{25-Y^2}$ (находим координату точки на окружности (пусть k) и откладываем на 2, т.к. отрезок от координаты $-k$ до $k \Rightarrow$ длина $2k$).
Сумма длин отрезков: $2(\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2})$.
Сумма $\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2}$, ввиду того, что X и Y - координаты точки на окружности с $R=3\sqrt{2}$, т.е. верно $X^2+Y^2=18$, принимает наибольшее значение, когда $X^2=Y^2$. Т.к. $X^2+Y^2=18$, то $X^2=Y^2=9$, отсюда $\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2} \leq 8$, а $2(\sqrt{25-Y^2} + \sqrt{25-X^2}) \leq 16$. Наиб. значение достигается в тех точках, где $X=Y=9$, то есть $(3;3); (3;-3); (-3;3); (-3;-3)$.
Т.к. $X=3\sqrt{2} \sin \alpha$, а $Y=3\sqrt{2} \cos \alpha$, из этих



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

точек, поделив коорд. на $3\sqrt{2}$, получим λ .

$$(3;3) - \sin \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(3;-3) - \sin \lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}; \cos \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-3;3) - \sin \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(-3;-3) - \sin \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Утого, получим ~~$\lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$~~

$$\lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

А сам периметр (наибольший) ~~равен~~
наибольшей сумме отрезков, плюс сумма
дыр, то есть $16 + 5\pi$. $M = 16 + 5\pi$

Ответ: $M = 16 + 5\pi$

$$\lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

но y -шотр. \sin УГЛА ЭТОЙ ТОЧКИ.

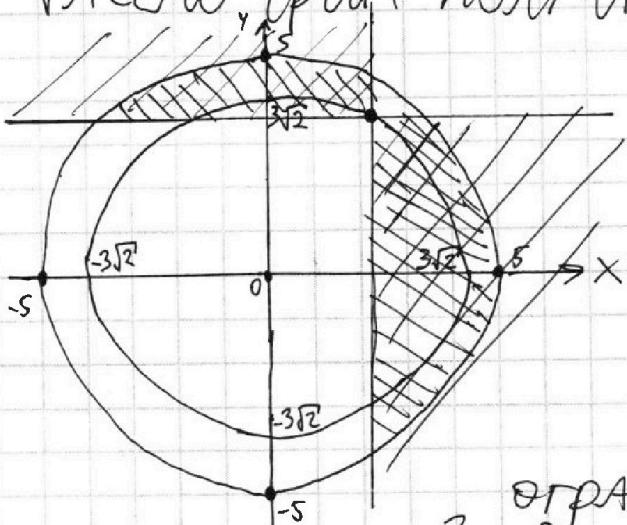
У НАС НАОБОРОТ $x = \sin$, $y = \cos$, но от переноса положения осей, окружность не меняет положение и размера.

Коэффициент $3\sqrt{2}$ лишь увеличивает радиус окружности. Докажем, что все такие точки лежат на расстоянии $\neq 3\sqrt{2}$ от точки $(0; 0)$:

$$r = \sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} = \sqrt{18(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} =$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ ч.т.д.}$$

Рассмотрим получающуюся фигуру.



$$x^2 + y^2 = 25. \text{ А также границы}$$

Границами фигуры

являются 2 перпендикулярных отрезка, параллельных осям, проходящих через точку $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$,

ограниченных окружностью



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

этой окружности, отсекаемые 2 хмя
выме упомянутыми отрезка ми.

т.к. ~~отрезки~~ \perp , дуги, которые
они отсекают равны в сумме 180° .
Это также верно из-за симметрии
~~картины~~ рисунка. Поэтому, при
любом положении точки, сумма
длины дуговых ~~поворотосмы~~
на границе фигуры - $\frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi$
(половина длины окружности $x^2+y^2=25$,
т.к. её радиус - 5). Рассмотрим
всех отрезков. Их наибольшая
длина - 10; когда точка имеет
координаты $(0; 3\sqrt{2})$; $(0; -3\sqrt{2})$, такую
длину имеет вертикальный отрезок
A в точках $(3\sqrt{2}; 0)$; $(-3\sqrt{2}; 0)$ - гори-
зонтальный. (В этих случаях
отрезки совпадают с диаметром)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 5

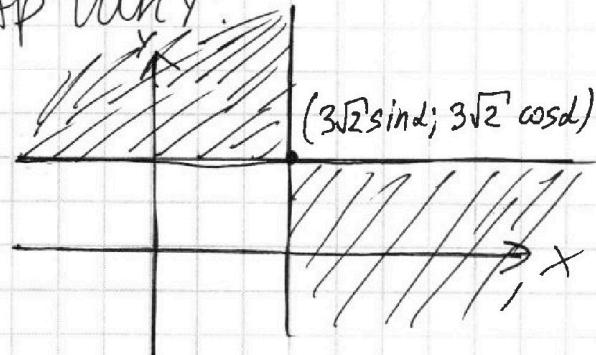
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Второе неравенство задаёт круг с радиусом 5 и центром в точке $(0; 0)$. Корни первого неравенства $(3\sqrt{2}\sin\alpha; 3\sqrt{2}\cos\alpha)$. Соответственно первое неравенство ~~задаёт круг~~, если: равносильно:

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

то есть, на самом деле задаёт круговую картину:



Все такие точки расположаются на окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$. Поскольку на единичной окружности координата каждой точки по X -коорд. \cos угла этой точки, а $\cos\alpha$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чирновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy.$$

$$(\sin \pi x +) \sin \pi y \quad -2-2y$$
$$x^2 + xy + y^2 - 3$$

$$90 - 150 = -60$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$30 \quad 480 - 180 = 3$$

$$90 - 150 = -60$$

$$x + y = -2$$

6

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline -108 \end{array}$$

$$\frac{(k-3)(k-2)}{1 \cdot 2}$$

$$(x+y)^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = \cancel{-8}^{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos^2 y = \frac{k!}{(y!)^2 (k-y)!} =$$

$$= \frac{(k-3)(k-2)(k-1)k}{(2y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3xy)}.$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y.$$

$$\begin{aligned} (-2 - 2y) \left(x^2 + xy + y^2 \right) - 3xy &= \\ \operatorname{tg} \pi x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} &= 1. \end{aligned}$$

$$= -2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 - 2y^3 - 3x^2y =$$

$$\binom{y}{k} \rightarrow \frac{k!}{y!(k-y)!} = \binom{y-2}{k-2} = \frac{(y-2)!}{(y-2)!(k-2-y)!} = \frac{-s \cancel{*} y}{(k-4+1) \cdots k} \cdot \frac{\cancel{y-2} \cdot (y-3) \cdots \cancel{k}}{(k-2-y+1) \cdots k}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = X \cdot 1111; X \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad t_8$$

$$111 = 11 \cdot 101; \quad 101 - \text{простое.}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$101; \quad B = 101 \cdot Y; \quad X \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad (202)$$

$\frac{\pi}{2}$

33

(202)

(6666)

101

150

-30

120

45

135

225

315

30

60

90

120

150

180

210

240

270

300

330

360

390

420

450

480

510

540

570

600

630

660

690

720

750

780

810

840

870

900

930

960

990

1020

1050

1080

1110

1140

1170

1200

1230

1260

1290

1320

1350

1380

1410

1440

1470

1500

1530

1560

1590

1620

1650

1680

1710

1740

1770

1800

1830

1860

1890

1920

1950

1980

2010

2040

2070

2100

2130

2160

2190

2220

2250

2280

2310

2340

2370

2400

2430

2460

2490

2520

2550

2580

2610

2640

2670

2700

2730

2760

2790

2820

2850

2880

2910

2940

2970

3000

3030

3060

3090

3120

3150

3180

3210

3240

3270

3300

3330

3360

3390

3420

3450

3480

3510

3540

3570

3600

3630

3660

3690

3720

3750

3780

3810

3840

3870

3900

3930

3960

3990

4020

4050

4080

4110

4140

4170

4200

4230

4260

4290

4320

4350

4380

4410

4440

4470

4500

4530

4560

4590

4620

4650

4680

4710

4740

4770

4800

4830

4860

4890

4920

4950

4980

5010

5040

5070

5100

5130

5160

5190

5220

5250

5280

5310

5340

5370

5400

5430

5460

5490

5520

5550

5580

5610

5640

5670

5700

5730

5760

5790

5820

5850

5880

5910

5940

5970

6000

6030

6060

6090

6120

6150

6180

6210

6240

6270

6300

6330

6360

6390

6420

6450

6480

6510

6540

6570

6600

6630

6660

6690

6720

6750

6780

6810

6840

6870

6900

6930

6960

6990

7020

7050

7080

7110

7140

7170

7200

7230

7260

7290

7320

7350

7380

7410

7440

7470

7500

7530

7560

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 3\sqrt{2} \sin \angle \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \angle \end{array} \right.$ $(x \geq 3\sqrt{2})$
 $x \leq 3\sqrt{2} \cos \angle$
 $y \geq 3\sqrt{2} \sin \angle$
 $S = \frac{abc}{4R}$ $\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = 187.5$
 $\frac{15 \cdot 25}{2} = 187.5$ $125 = 10 \cdot 5^3 \cdot 3$ - степень А осн. ω_2
 $\frac{15 \cdot 25}{2} = 187.5$ KAE $S = KAE^2$
 $\frac{15}{2} \cdot R = 187.5$ $R^2 + KAC^2 = S^2$
 $\frac{15}{2} \cdot R = 187.5$ $\sqrt{S^2 + R^2}$
 $\frac{15}{2} \cdot R = 187.5$
 $\frac{15 \cdot R}{2} = 187.5$
 $15 \cdot R = 375$
 $R = 25$
 $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} =$ $x^2 \cdot (x - R)^2$

I

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

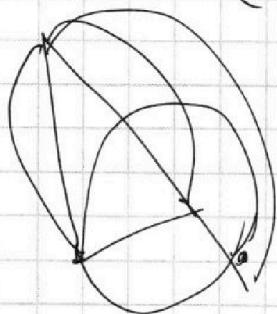
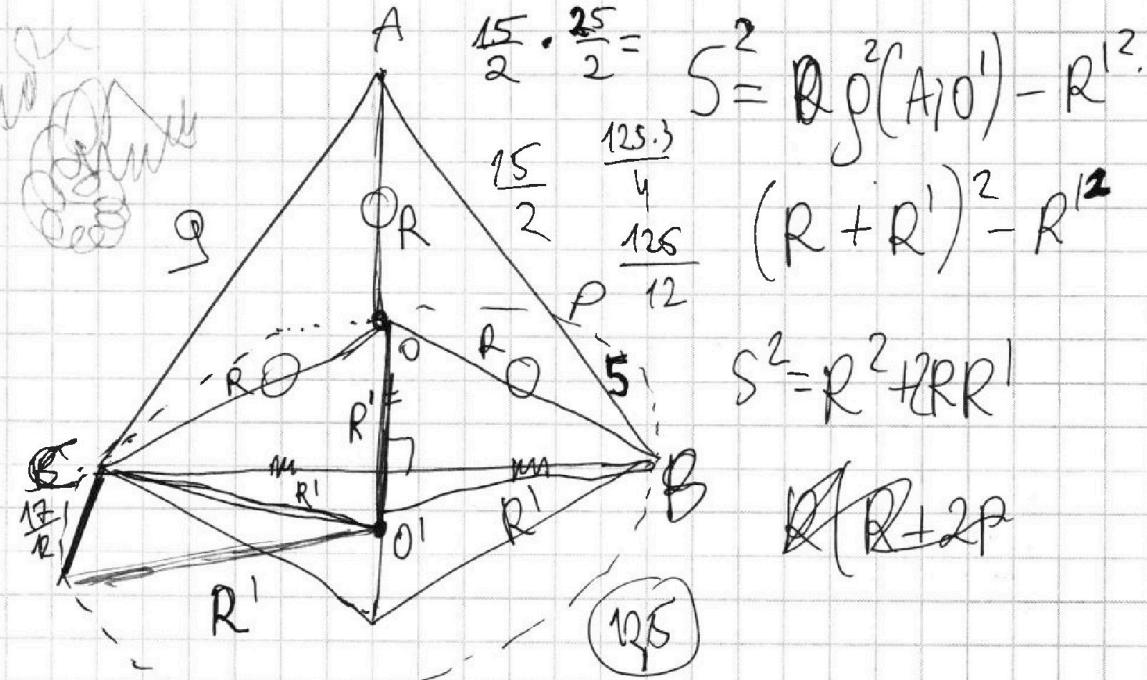
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$RAC^2 + R^2 = j^2$$

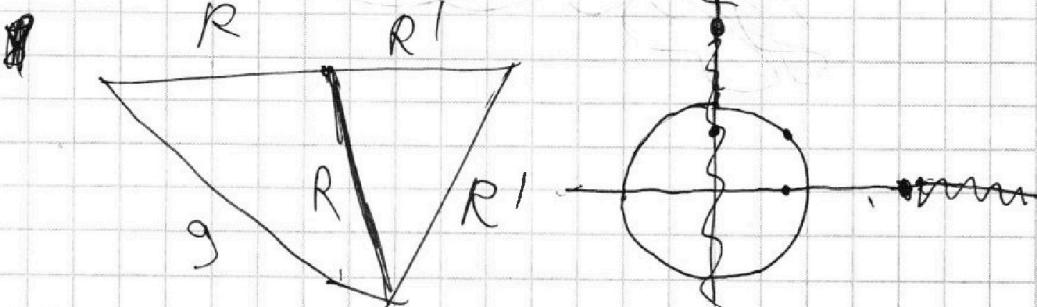
$$S^2 = R^2 + R'^2$$

$$\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) =$$

$$= j^2 - R^2.$$

(125)

(9)



I

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

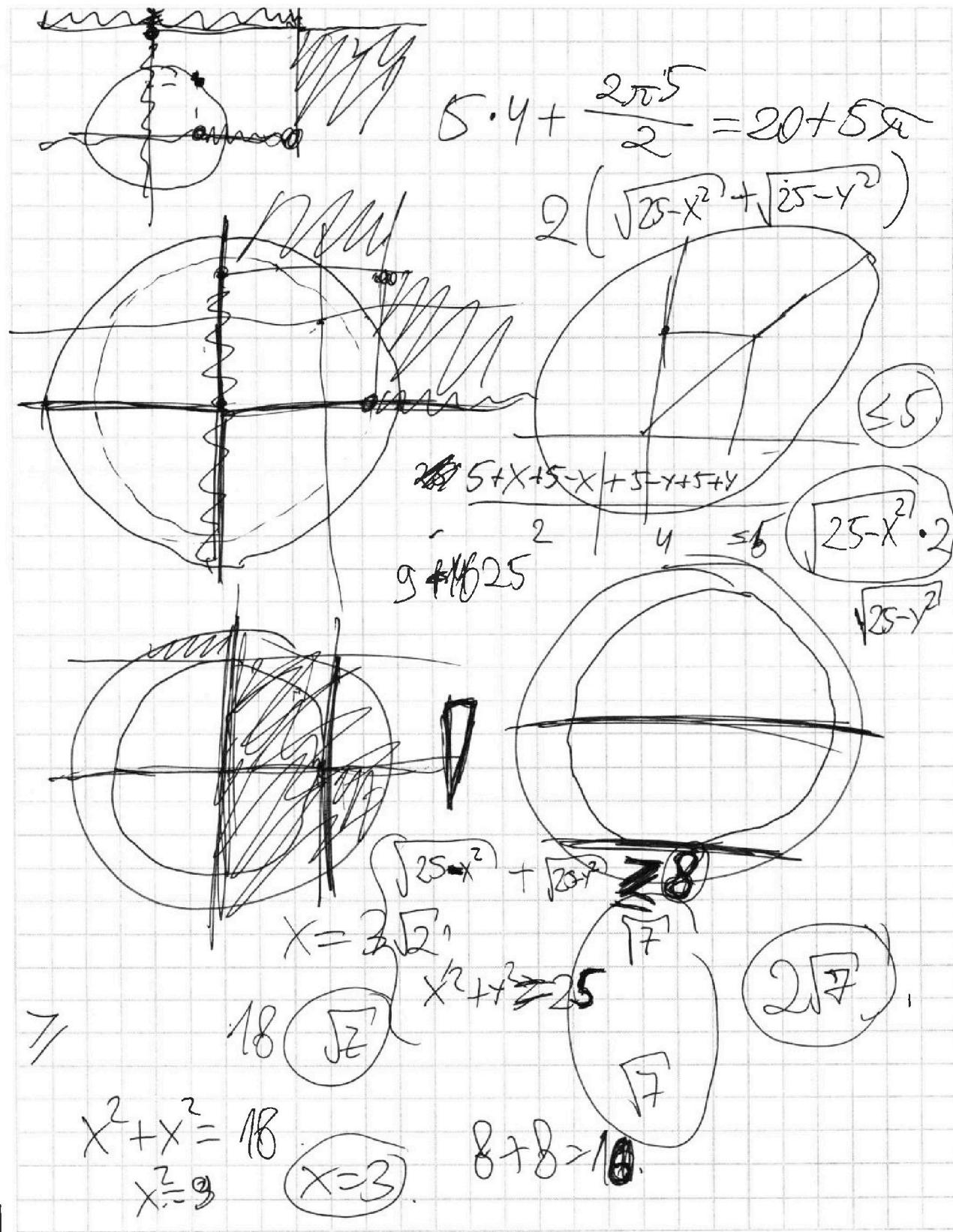
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



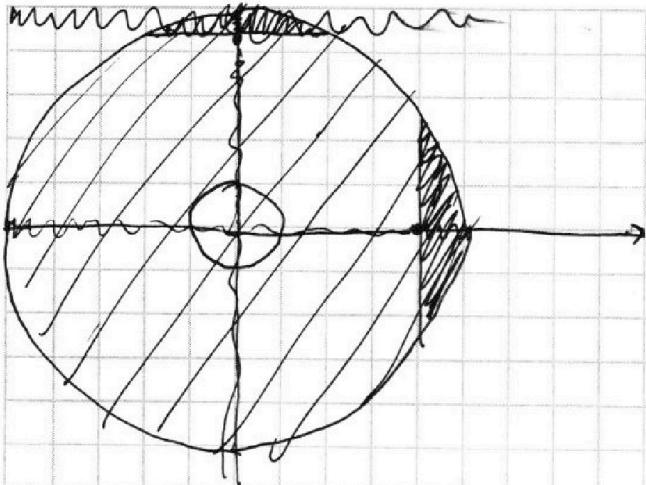


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



14 (42)

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\frac{x}{5} \in [-1, 1] \quad (-5; 5)$$

$$\frac{y}{4} \in (-4; 4)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \underline{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \underline{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \cancel{\alpha - \beta} = \cancel{\alpha + b}.$$

$$x =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{C}_k^y \cdot (-y-2)^3 - y^3 - 3y(-y-2) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$\frac{\text{C}_{k-2}^{y-2}}{\text{C}_k^y} = \frac{(k-2)! \cdot (k-y-1) \cdot (k-y)}{(y-2)! \cdot (k-y-2)!}$$

$$\frac{\text{C}_{k-2}^{y-2}}{\text{C}_k^y} = \frac{(y-1) \cdot y}{(k-1) \cdot (k-y)} = \frac{(y-1) \cdot y}{(k-1) \cdot (k-y)}$$

$$(y-1) \cdot y = -2 \quad \frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{(k-2)!}{(k-y-1)!} = \frac{(k-y+1)(k-y)(k-y+1)}{x+y=2} \quad x+y=-2$$

$$\frac{k \cdot k!}{(k-y)!} = (k-y+1)(k-y+2) \quad xy+x-y-1=xy$$

$$x-y=1$$

$$(y+2)^3 = y^3 + 3y^2 + 12y + 8 \quad \frac{y(y-1)}{k(k-1)} = \frac{1225}{k(k-1)}$$

$$\frac{(k-2)!}{(y-2)! \cdot (k-y)!} = \frac{(k-2)!}{k! \cdot k(k-1)}$$

$$30 \quad 6(5)$$

$$x = -y-2$$

$$16 - 12 + 12 - 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!