



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1. А - число вида $\overline{kkkk} = k \cdot 1111 = k \cdot 101 \cdot 11$, где $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
 если произведение $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot k \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального
 числа, это нам. число : 101 (число 101 - простое), тогда это
 квадрат кратен 101^2 , значит, $(B \cdot C) \cdot 101$
 число С - двузначное, $0 < C < 101 \Rightarrow C \neq 101$, тогда $B \cdot 101 :$
 $B \in \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}$.

По условию в записи В есть цифра 2 $\Rightarrow B = 202$

тогда $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot k \cdot 2 \cdot 101 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot k \cdot C$
 в квадрате нам. числа все простые множители имеют
 четную степень, значит, $(k \cdot C) : 1111$, $(k \cdot C) : 2$
 если $k = 1$: $C : 22 \Rightarrow C \in \{22; 44; 66; 88\}$ - не подж., но условие в
~~если цифра 3~~

если $k = 2$: $C : 11 \Rightarrow C \in \{22; 33\}$ (есть тройка), но тогда
 $0 < k < 11 \Rightarrow k : 11 \Rightarrow C : 11$, в С есть цифра 3 $\Rightarrow C = 33$

тогда $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot k \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k$

$2 \cdot 3 \cdot k$ - квадрат, тогда $k : 2, k : 3 \Rightarrow k = 6$ (и.к. $k < 10$). - при
 других k $A \cdot B \cdot C$ - не полный квадрат

тогда единственная тройка $(A; B; C)$: $A = 6 \cdot 1111 = 6666, B = 202, C = 33$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}. \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

если x уменьшить на 1, y - увеличить на 1:

$$k_1 = \frac{(x-1)+(y+1)+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

$$K = k_1: \quad \frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

$$x+y+2 > 0 \quad (x>0, y>0) \Rightarrow xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

$$\text{тогда } U = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1 -$$

при этом удовлетворяющим условию x и y $U=1$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) - \cos(\pi x + \pi y)) = \frac{1}{2} (\cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y))$$

$$-\cos 2\pi x + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y) - \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) = \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y)$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(\pi x - 2\pi x) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\pi x - 2\pi x = \pi x + \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \pi x - 2\pi x = -\pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 - 2x = x + y + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - 3x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 - 2x = -x - y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

любые пары действ. чисел, удовлетворяющие ^{хотя бы одному из} условия, являются решениями

Очевидно: ~~все~~ все пары действ. $(x; y)$ такие, что

$$y = 1 - 3x - 2n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{5\pi}{2}$$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$y \in [-4; 4]$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ — неравенство суммы арккосинусов

всегда имеет место

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases}$$

$$\text{Этому соответствует: } \frac{x}{5} = 1, \frac{y}{4} = -1$$

$$x = 5; y = -4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

небходимо найти пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению
 $(y = 1 - 3x - 2k, x \in \mathbb{Z} \text{ или } y = x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z})$.

при $y = 1 - 3x - 2k$, $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ запишем все возможные пары $(x; y)$ и проверим, подходит ли они одновременно уравнению

Будем: ① подходит 1-му, ② подходит 2-му, ③ не подходит одновременно

$(5; 4)$	①	$(4; 4)$
$(5; 3)$	○	$(4; 3)$
$(5; 2)$	①	$(4; 2)$
$(5; 1)$	○	$(4; 1)$
$(5; 0)$	✗	$(4; 0)$
$(5; -1)$	○	$(4; -1)$
$(5; -2)$	①	$(4; -2)$
$(5; -3)$	○	$(4; -3)$
$(5; -4)$	①	$(4; -4)$

всего пар $(x; y)$ при $x \in [-5; 5]$ и $y \in [-4; 4]$

$$9 \cdot 11 = 99$$

из уравнений видно, что x и y должны иметь разную четность, тогда

$y = 1 - 3x$ или $y = x - 1$ имеют одинаковую четность, а период 2n или 2k подразумевает достижение равенства.

из набора знач. $x \in (-5; -4; -3; \dots; 5)$ 6 нечетных и 5 четных, из набора знач. $y \in (-4; -3; -2; \dots; 4)$ 4 нечетных и 5 четных.

тогда наборов $(x; y)$ с разной четностью $6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 50$, из них один $(5; -4)$ не удовлетворяет неравенству. Тогда если $50 - 1 = 49$ пар целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе n учеников ($n > 4$ — так же вероятность попасть на концерт была бы равна 1 и не менялась в 2,5 раза), а всего билетов k .

тогда начальная вероятность попасть на концерт была равна $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$ ($\frac{4}{n}$ — вер-ть, что попадёт Тима, $\frac{3}{n-1}$ — вер-ть, что когда один билет уже у Тимы, попадёт Вася).

когда билетов стало k , вер-ть стала равной

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{k^2-k}{n(n-1)}$$

по условию ~~вероятность~~ вероятность в 2,5 раза меньше:

$$2,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{k^2-k}{n(n-1)}$$

$$k^2 - k = 30$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k-6)(k+5) = 0$$

$k=6$ или $k=-5$ — не подр. по смыслу, билетов не может быть меньше 0

тогда всего было 6 билетов

Ответ: 6

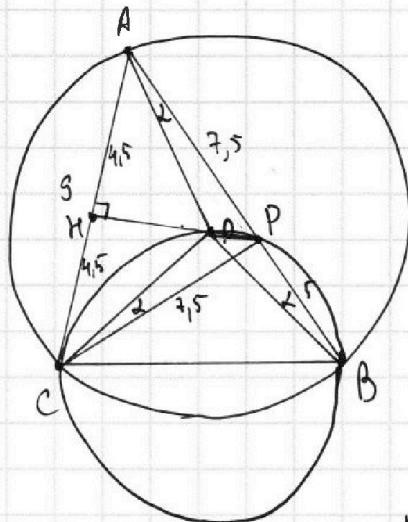
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№5.



Дано: $AP = 7,5$, $PB = 5$, $AC = 9$

Найти S_{ABC}

Решение: $OA = OB = OC$ (O -центр опис.

$$\text{окр.)} \Rightarrow \triangle OAB - \text{pr}\delta \Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$$

четверекут. $\square OPA$, $\square OPB$ - впис. \Rightarrow

$\angle OCP = \angle OBP$ (впис. углы, опирающиеся на \widehat{OP}), тогда $\angle OAB = \angle OBP = \angle OCP = \alpha$

$$\angle OAB = \angle OBP = \angle OCP = \alpha$$

но т. синусов для $\triangle OAP$:

$$\frac{OP}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \angle OPA}$$

для $\triangle OPC$:

$$\frac{OP}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin \angle OPC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \frac{OA}{\sin \angle OPA} = \frac{OC}{\sin \angle OPC}$$

$OA = OC$, тогда $\sin \angle OPA = \sin \angle OPC$, тогда $\angle OPA = \angle OPC$ или $\angle OPA + \angle OPC = 180^\circ$
 $\triangle APC$ существует $\Rightarrow \angle APC = \angle OPA + \angle OPC < 180^\circ \Rightarrow$
 $\angle OPA + \angle OPC \neq 180^\circ \Rightarrow \angle OPA = \angle OPC$

$\triangle OPC = \triangle OPA$ (по 2 углам и стороне между ними $\angle OCP = \angle OAP = \alpha$,

$\angle OPC = \angle OPA$, (по 2 сторонам и углу между ними -

$$OC = OA, OP - общ., \angle COP = 180^\circ - \alpha - \angle CPO = 180^\circ - \alpha - \angle APO = \angle AOP \Rightarrow$$

$$AP = CP = 7,5$$

тогда $\triangle APC - \text{pr}\delta$, если H -середина AC , $PH \perp AC$,

$$AH = 4,5, \text{ из прилож. } \triangle APH \cos \angle HAP = \frac{AH}{PA} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5} = \cos \angle CAB$$

$$\triangle ABC - \text{остр.} \Rightarrow \sin \angle CAB > 0 \Rightarrow \sin \angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (7,5 + 5) \cdot \frac{4}{5} = 9 \cdot 2 \cdot 2,5 = 45$$

Объем: 45

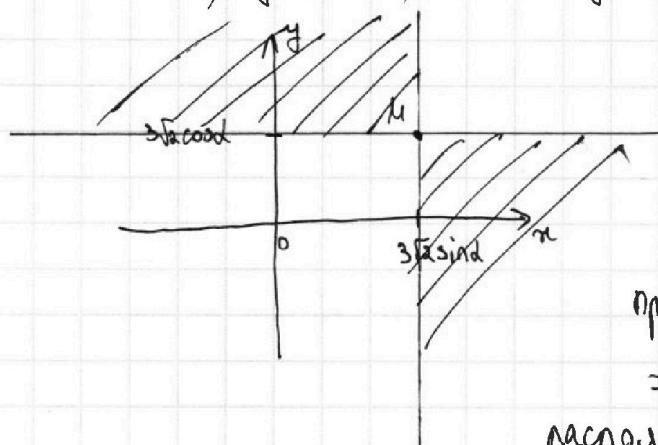
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

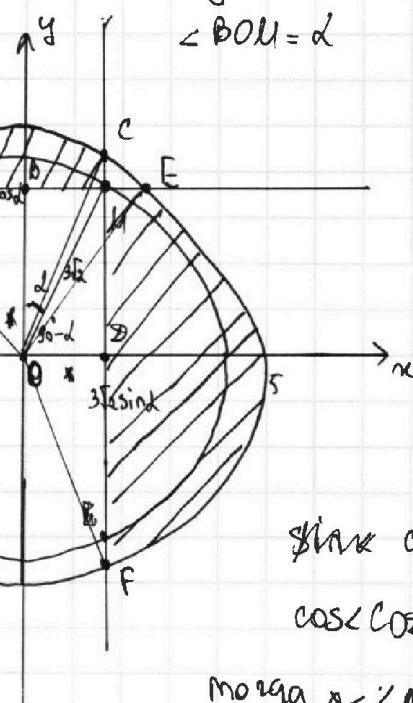
16. Круг $x^2 + y^2 \leq 25$ — круг с центром $(0;0)$ и радиусом 5 на коорд. плоскости $(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0$ — где прямые $(x = 3\sqrt{2}\sin\alpha; y = 3\sqrt{2}\cos\alpha)$ и где части плоскости, ограниченные ими.



Заметим, что расстояние OM от начала координат до точки пересечения этих прямых равно $\sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = 3\sqrt{2}$. Эта точка расположена на окружности с центром в начале координат и радиусом $3\sqrt{2}$.

Площадь фигуры ABCD выражается формулой:

$$(3\sqrt{2} < 5, \text{ т.к. } (3\sqrt{2})^2 = 18 < 5^2 = 25)$$



$$BM = 3\sqrt{2}\sin\alpha, MO = 3\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$DF = \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}, CM = DF - DM = \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} - 3\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$AB = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}, EM = AB - BM = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} - 3\sqrt{2}\sin\alpha$$

(из предшущ. A-B — BM || Ox, MO || Oy)

$$\sin\alpha \cos\angle AOB = \frac{OB}{OA} = \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5}$$

$$\cos\angle COD = \frac{OD}{OC} = \frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}$$

$$\text{Площадь } \angle AOC, \angle AOB + \angle BOD - \angle BOC =$$

$$= \arccos \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5} + 90^\circ - \arccos \frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}$$

$$\text{аналогично } \angle COF = \arcsin \frac{3\sqrt{2}\cos\alpha}{5} + 90^\circ - \arcsin \frac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметр фигуры $P(\alpha)$: $M = AM + MC + AC + MF + MF + EF =$

$$= AB + BM + CM + \frac{2\pi \cdot 5 \cdot \angle AOC}{360^\circ} + MF + FD + DF + \frac{2\pi \cdot 5 \cdot \angle EOF}{360^\circ} =$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + 3\sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \sin \alpha + \\ &\quad + 3\sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - 3\sqrt{2} \cos \alpha + \frac{\pi}{36} (180^\circ + \arccos \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5}) + \\ &\quad + \arcsin \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5} - \arccos \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} - \arcsin \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5} = \end{aligned}$$

$$2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + \frac{\pi}{36} (180^\circ + (\arccos \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5} + \arcsin \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5}) -$$

$$- (\arcsin \frac{3\sqrt{2} \cos \alpha}{5} + \arccos \frac{3\sqrt{2} \sin \alpha}{5}))$$

$$\arcsin \beta + \arccos \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ поэтому}$$

$$M = 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + \frac{\pi}{36} (180^\circ + 50^\circ - 90^\circ) =$$

$$= 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) + 5\pi$$

знач. M максимальна, когда максимальна выражение:

$$\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}$$

поскольку $\sin^2 \alpha = t$, тогда введем функцию ($\sin^2 \alpha \in [0; 1]$)

$f(t) = \sqrt{25 - 18t} + \sqrt{7 + 18t}$ и найдем её максимум на отрезке $[0; 1]$

$$f'(t) = \frac{-18}{2\sqrt{25 - 18t}} + \frac{18}{2\sqrt{7 + 18t}} = -\frac{9}{\sqrt{25 - 18t}} + \frac{9}{\sqrt{7 + 18t}}$$

$$f'(t) = 0: \frac{9}{\sqrt{7 + 18t}} = \frac{9}{\sqrt{25 - 18t}}$$

$$\sqrt{7 + 18t} = \sqrt{25 - 18t}$$

$$7 + 18t = 25 - 18t$$

$$36t = 18$$

$$t = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c} X \bullet + - \\ 0 \nearrow \frac{1}{2} \downarrow 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} f'(t) \\ f(t) \end{array}$$

максимум функции $f(t)$ - при $t = \frac{1}{2}$, тогда

максимум и при $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$, $\forall \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{тогда } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2},$$

$$M_{\max} = 2 \left(\sqrt{25 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}} \right) + 5\pi = 2(\sqrt{16} + \sqrt{18}) + 5\pi = 16 + 5\pi$$

$$\text{Ответ: } M_{\max} = 16 + 5\pi, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

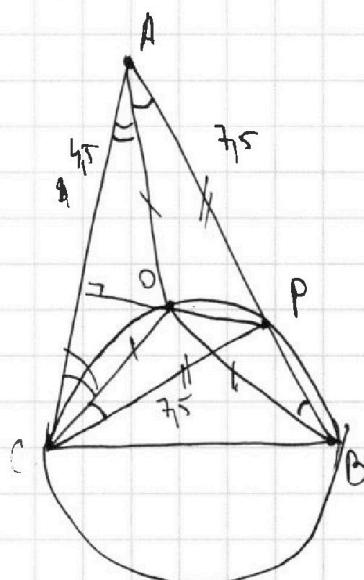
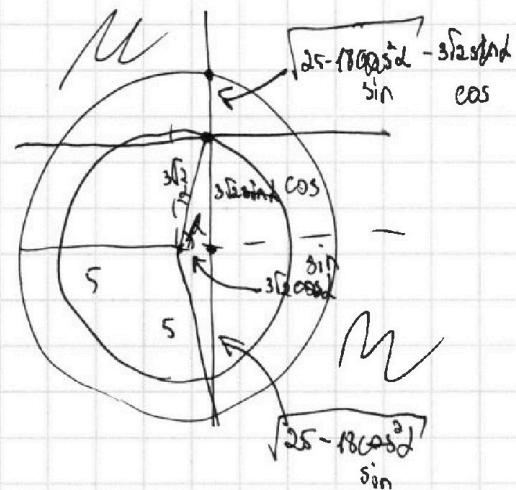
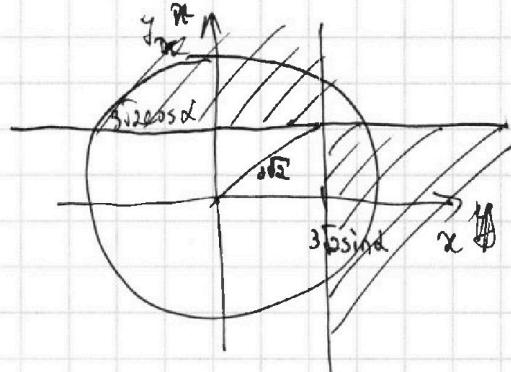
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

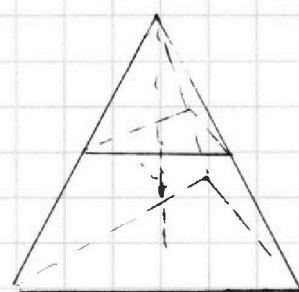
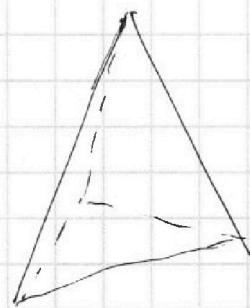
$$(x - 3\sqrt{2}\sin d)(y - 3\sqrt{2}\cos d) \leq 0$$

$$x \leq 3\sqrt{2}\sin d, y \geq 3\sqrt{2}\cos d$$

$$\text{или } x > 3\sqrt{2}\sin d, y < 3\sqrt{2}\cos d$$



$$\cos d = \frac{45}{75} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$



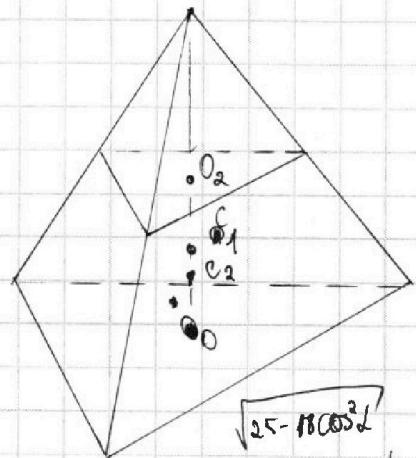


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

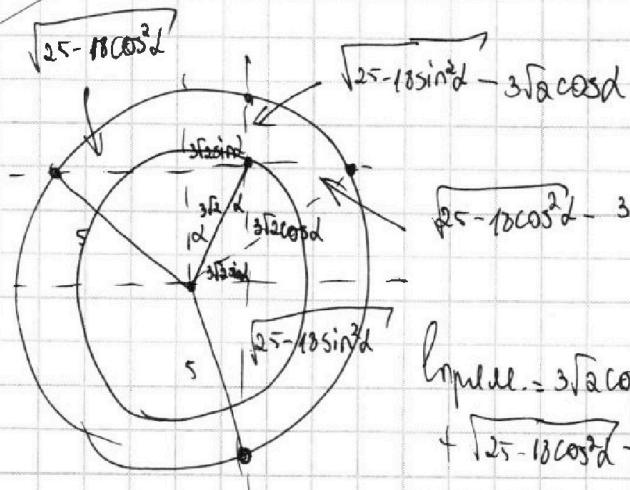
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



с O_1 -центром и ($l_1 = CO = CO_2$)

O_2 -центром R ($l_2 = |O_2; AB|$)



$$\text{Периметр} = 3\sqrt{2}\cos d + \sqrt{25 - 18\sin^2 d} + \\ + \sqrt{25 - 18\cos^2 d} - 3\sqrt{2}\sin d + 3\sqrt{2}\sin d : \\ = 2(\sqrt{25 - 18\cos^2 d} + \sqrt{25 - 18\sin^2 d})$$

$$\sqrt{25 - 18\sin^2 d} + \\ \sqrt{25 - 18\cos^2 d}$$

0 1

$\frac{1}{2}$ $\frac{l}{2}$

$\sqrt{7}$

$\sqrt{25}$

$\sqrt{16}$

$\sqrt{56}$

44 (8)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



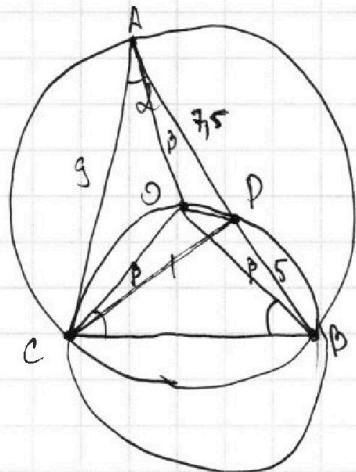
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



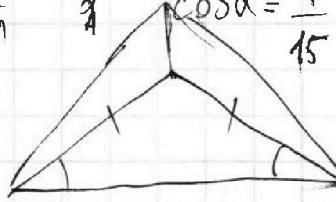
$$CP^2 = 9^2 + 7.5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7.5 \cdot \cos 15^\circ$$

$$BC^2 = 9^2 + 12.5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12.5 \cdot \cos 15^\circ$$

$$CP = 7.5 = AP$$

$$\angle PAO = \angle PBO = \angle OCP$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{So } \frac{1}{2} ACAB \sin 15^\circ$$



$$\frac{1 \cdot 9 \cdot 12.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{5 \cdot 2} =$$

$$\frac{1 \cdot 9 \cdot 12.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{5 \cdot 2} = 45$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \sin \pi \alpha = 2$$

$$\sin^2 \pi \alpha + \sin^2 \beta = \cos^2 \pi \alpha + \cos^2 \pi \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin^2 \pi \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \pi \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \pi \beta = \cos^2 \pi \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \pi \beta + \frac{1}{2} \cos^2 \pi \alpha$$

$$\sin^2 \pi \alpha = \cos^2 \pi \alpha + \cos^2 \pi \beta$$

$$\sin^2 \pi \alpha - \cos^2 \pi \alpha = -\cos 2\pi \alpha = \cos \pi(2\pi \alpha)$$

$$\cos(\pi - 2\pi \alpha) = \cos \pi(2\pi \alpha)$$

$$\pi - 2\pi \alpha = \pi(2\pi \alpha) \quad \text{или} \quad 2\pi \alpha - \pi = \pi(2\pi \alpha)$$

$$1 - 2\alpha = 2\pi \alpha$$

$$3\alpha = 1 - y$$

$$y = 1 - 3\alpha$$

и первое?

$$2\alpha - 1 = 2\pi \alpha$$

$$y = \alpha - 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. n однокл., добавивших ^{столько} баллов

$$P_1 = \frac{n}{n} \cdot \frac{5}{n-1} \quad P_2 = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}$$

$$\frac{25 \cdot 10}{n(n-1)} = k^2 - k \quad k^2 - k - 30 = 0 \\ k=6 \quad \text{отвергнуто}$$

$$\text{знач.: } P_1 = \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 3}{11 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$1. A = 101 \cdot 11 \cdot k, \quad k \in [1; 9]$$

$$B = 202 \quad A \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 202$$

$$C = 2 \cdot 11 \cdot k \cdot C = m^2$$

$$k=1 \Rightarrow C=22 \\ k=2 \Rightarrow \dots$$

$$2. K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$K \in \mathbb{N} \quad \frac{x+y+2}{xy} \Rightarrow \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{xy+x-y-1}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - (x(y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1)) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

5.

