

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

① A - четырёхзначное число, состоящее из одинаковых цифр, поэтому

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, \text{ где } a - \text{натуральное число от 1 до 9}$$

A·B·C - квадрат, то есть все приведенные множители входят в A·B·C в четной степени. Поэтому

$$A \cdot B \cdot C : 101^2 \Rightarrow \begin{cases} a : 101 \\ B : 101 \\ C : 101 \end{cases} \Rightarrow B : 101$$

П.к. B содержит цифру 2, B = 202. Тогда:

$$\begin{cases} A \cdot B = a \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \\ A \cdot B \cdot C : 2^2 \\ A \cdot B \cdot C : 11^2 \\ A \cdot B \cdot C = a \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C : 22 \\ 2a \in \{1; 4; 9\} \\ a = 2 \\ C : 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ C = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2222 \\ B = 202 \\ C = 33 \end{cases}$$

* П.к. C содержит цифру 3

Ответ: $\{(2222; 202; 33)\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~~(2) $\frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$~~

$$(2) \frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = \\ = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 17$$

Ответ: $\{17\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \text{ a) } (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi x \\ \beta = \pi y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \\ \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} (\cos \frac{\beta-\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha+\beta}{2}) = \frac{1}{2} (\cos \frac{3\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \\ \cos \frac{3\alpha+\beta}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \pi + 2\pi k \\ 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \pi r \\ \beta = \pi r + \pi + 2\pi k \\ \alpha = \pi r \\ \beta = -3\pi r + \pi + 2\pi l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

~~Однако { (r; r+1+2k); (r; -3r+1+2l) | k, l ∈ ℤ }~~

$$\begin{cases} x = r \\ y = r + 1 + 2k \\ x = r \\ y = -3r + 1 + 2l \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\{(r; r+1+2k); (r; -3r+1+2l) \mid k, l \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Запишите, что

$$\forall a, b \in [-1; 1] \quad \arcsin a + \arccos b \leq \frac{3\pi}{2}$$

Поэтому данному нер-ву удовлетвржат все пары $(x; y)$, при которых $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ определено, кроме тех, для которых $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $(5; 0)$ - ед. пара, не удовлетвржащ данному нер-ву. Она удовлетвржет уравнению из пункта а. Поэтому ответ на вопрос - это кол-во всех пар $(x; y)$, удовлетвржащих ур-во из а. а, для которых определено $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$ (т.е. $-5 \leq x \leq 5$ и $-4 \leq y \leq 4$), таким что $x, y \in \mathbb{Z}$ минус одна.

Посчитаем кол-во пар:

x и y имеют разную чётность. Если x чётно ($x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ - всего 6), то y чётно ($y \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$), если x чётно ($x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ - всего 5)

но y нечётно ($y \in \{-3; -1; 1; 3\}$ - всего 4). Запишем, что любые комбинации чётных чисел разной чётности подходят, поэтому ответ равен:

$$6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 1 = 49$$

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(4) k - число билетов, которое было выделено в конце месяца.
~~всего~~ n - общее кол-во школьников. Тогда:

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} - \text{вер-ть в начале месяца},$$

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} - \text{вер-ть в конце месяца},$$

$$k > 4, k \in \mathbb{Z}$$

Условие:

$$\begin{cases} \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \\ k \in \mathbb{Z} \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 = k(k-1) \\ k \in \mathbb{Z} \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - k - 30 = 0 \\ k \in \mathbb{Z} \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = \boxed{6}$$

Ответ: 6



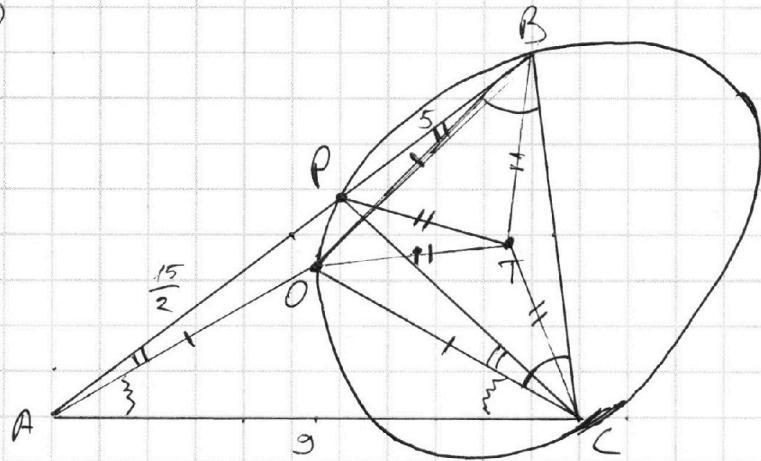
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(5)



T - централь ω_2

R - радиус ω_1 ,
r - радиус ω_2

$$\angle OBC = \angle OCB = x \quad (OB = OC)$$

$$\angle PBO = \angle PCO = \beta \quad (\text{отмеченная на } PO)$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \gamma \quad (OA = OC)$$

$$\frac{BC}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AP+PB}{\sin(\alpha-\beta+\gamma)} = 2R - \text{некр. ачесов}$$

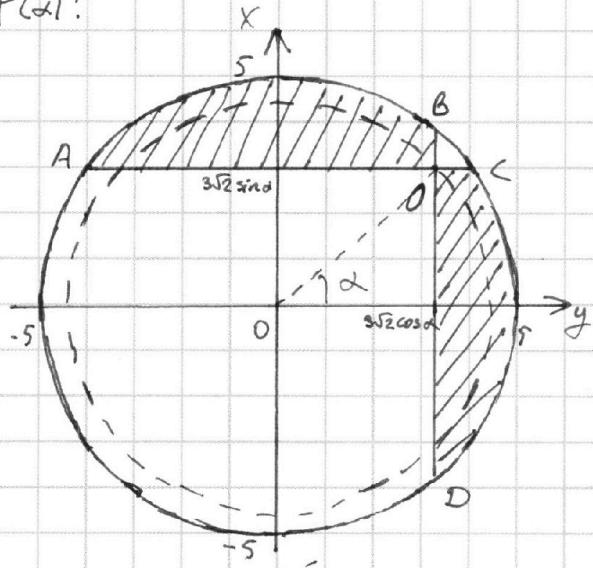
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Phi(\alpha)$:



Рассмотрим точки

A, B, C, D, O фигуры $\Phi(\alpha)$ (см. рис.).

Заметим, что периметр разделяется на дуги

AB, CD и на отрезки AO, BO, CO, DO :

$$P = AB + CD + AO + BO + CO + DO$$

Заметим, что дуговая длина дуг сохраняется

(не зависит от α):

$$\angle(AOB) + \angle(COD) = 2\angle AOB = 180^\circ$$

Поэтому длина дуг (суммарная) также не зависит от α .

Поэтому макс. периметр достигается при макс. сумме $AO + BO + CO + DO$. Рассмотрим точки A, B, C, D :

$$A(A_x, A_y), B(B_x, B_y), C(C_x, C_y), D(D_x, D_y)$$

$$A_x = C_x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$B_y = D_y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$A_y = -C_y = -\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$B_x = -D_x = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

Рассмотрим сумму длии отрезков:

$$AO + BO + CO + DO = AC + BD = (C_x - A_x) + (B_x - D_x) = \\ = 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha})$$

Потока периметр $\Phi(\alpha)$ равен:

$$P = 2\pi \cdot 5 + 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}) =$$

$$= 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha})$$

Чтобы найти максимум, рассмотрим $\frac{dP}{dt}$,

$$\text{где } t = 18 \sin^2 \alpha:$$

$$P = 5\pi + 2(\sqrt{25-t} + \sqrt{25+t})$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{25-t}} + \frac{1}{\sqrt{25+t}}$$

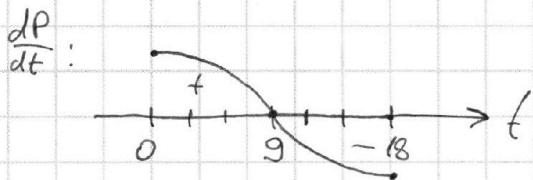


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



9 - точка максимума
 $P(9) = 5\pi \times 2(9+9) = [5\pi + 16] = M$ -
 макс. периметр.

Макс. периметр. достигается при:

$$t = 18 \sin^2 \alpha = 9 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}}$$

Ответ: $M = 5\pi + 16$; достигается при $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Пусть $\Phi_1(\alpha)$ - фигура, которая задается уравнением:

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$\Phi_2(\alpha)$ - фигура, которая задается уравнением:

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$\text{Тогда } \Phi(\alpha) = \Phi_1(\alpha) \cap \Phi_2(\alpha)$$

Рассмотрим $\Phi_1(\alpha)$ и $\Phi_2(\alpha)$:

$\Phi_1(\alpha)$:

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \iff$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

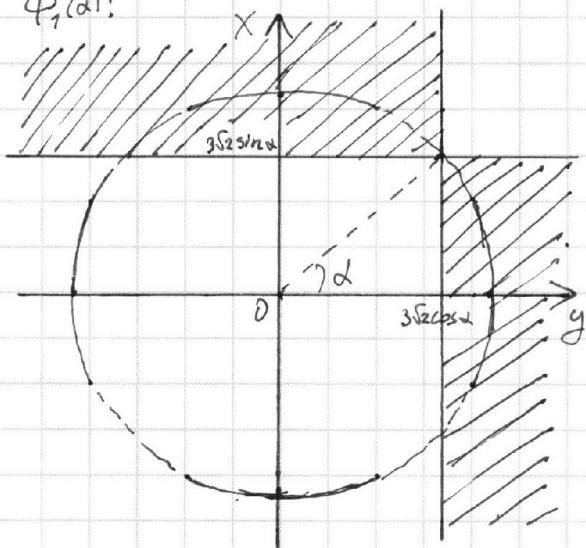
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha < 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha > 0 \end{cases}$$

$$x - 3\sqrt{2} \sin \alpha = 0$$

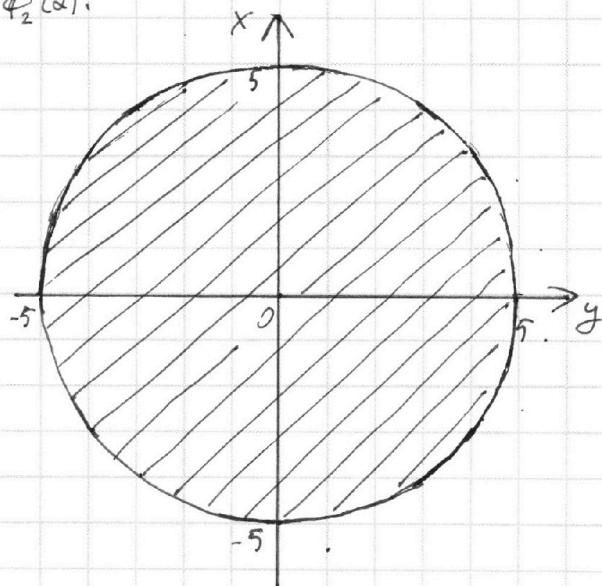
$$y - 3\sqrt{2} \cos \alpha = 0$$

Изобразим на плоскости фигуры $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$, $\Phi(\alpha)$:

$\Phi_1(\alpha)$:



$\Phi_2(\alpha)$:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(8) \quad a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi x \\ \beta = \pi y \end{cases}$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha \neq -\tan \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \sin \alpha \neq 0 \\ \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0 \\ \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x + y = \pi + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = r \\ x = \frac{1}{3}(1+2k-r), r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Oberen: } \left\{ \left(\frac{1}{3}(1+2k-r); r \right) \mid r \in \mathbb{R} \text{ and } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \cos(\beta - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\beta-\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha+\beta}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\alpha+\beta}{2} + \cos \frac{\beta-\alpha}{2} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

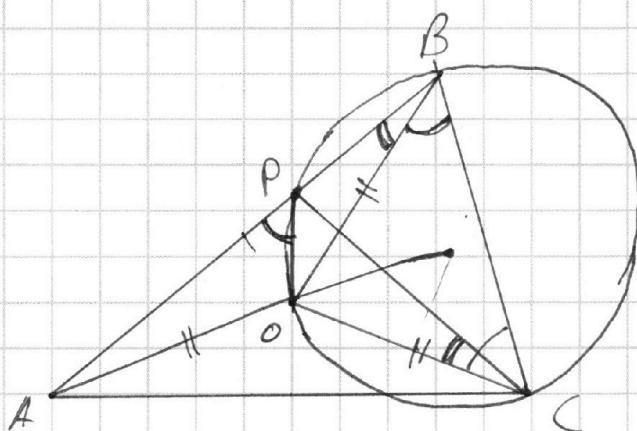
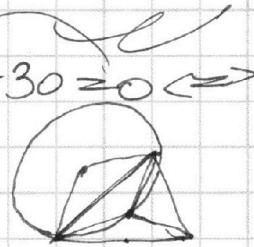


- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{k \cdot k-1}{n \cdot n-1} \Leftrightarrow k^2 - k - 30 = 0 \Leftrightarrow k = 6$$



$$\begin{cases} \frac{PB}{\sin(\alpha-\beta)} = R = 2r \\ \frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} \\ \frac{9}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = 2R \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{5} \cdot \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = 2\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10} \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R \Rightarrow \sin\angle ACB = \frac{25}{18} \sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2r \Leftrightarrow BC = 4r \cdot \sin\alpha \cos\alpha = 2R \cos\alpha$$

$$\frac{R}{\sin(\alpha-\beta)} = 2r$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\beta') \operatorname{tg}\alpha' &= (1 - \operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\beta') (1 - \operatorname{tg}\alpha') \Leftrightarrow \\ 2\operatorname{tg}^2\alpha' + 2\operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\alpha' &= 1 - \operatorname{tg}^2\alpha' - \operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}^2\alpha' \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}^3\alpha' - 3\operatorname{tg}^2\alpha' - 3\operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\alpha' + 1 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\cancel{(\operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\alpha')} - 1 \cdot \cancel{(\operatorname{tg}\beta' - 1)(\operatorname{tg}\alpha' - 1)} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 11 \cdot 101 \cdot C \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 2 \cdot 101$$

$$AB = 2 \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C \Rightarrow \boxed{C=22} \Rightarrow \begin{cases} C=22 \\ A=101 \\ B=202 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2222 \\ B=202 \\ C=33 \end{cases}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$= \sin(\pi(x + \frac{1}{2})) + \sin(\pi(y + \frac{1}{2})) \sin(\pi(x + \frac{1}{2}))$$

$$\begin{cases} C=22 \\ A=101 \\ B=202 \\ C=33 \\ A=2 \\ C=11 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \leq \frac{x+y+2}{xy} \quad \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\Rightarrow xy + x - y - 1 = xy \Rightarrow \boxed{x=y+1} \quad x = y + 1$$

$$M = \cancel{x^3 y^3} - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y =$$

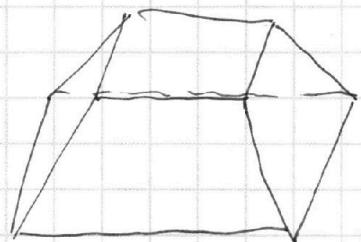
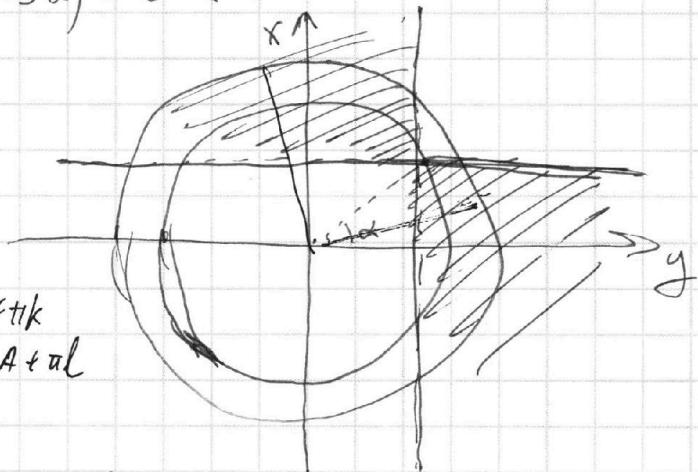
$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha > 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha < 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha = 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$



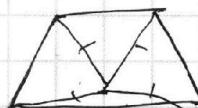
$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + \beta = \pi + 2\alpha \Leftrightarrow$$



$$\sin \alpha + \sin \beta = \cos \alpha + \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} \Leftrightarrow$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1 + \frac{1}{\tan \beta}}{1 - \frac{1}{\tan \beta}} = 1 \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

