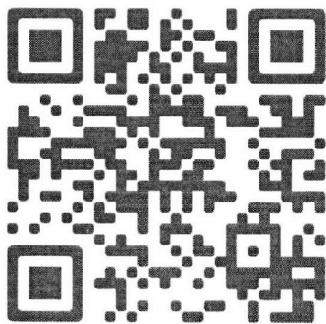




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



~~X~~ [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

~~X~~ [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

~~X~~ [5 баллов] ~~X~~ Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

~~X~~ Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

~~X~~ [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

~~X~~ [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- ① $A, B, C \in \mathbb{N}$:
- A - $1 \times$ значное вида $\overline{aaaa}$
 - B - $3 \times$ значное вида $\overline{a_1 a_2 a_3}$, где $a_1 = 1 \vee a_2 = 1 \vee a_3 = 1$
 - C - $2 \times$ значное вида $\overline{c_1 c_2}$, где $c_1 = 5 \vee c_2 = 5$
 - $A \cdot B \cdot C = m^2, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} m^2 : 1111 \\ 101 \cdot 11 = 1111 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} m^2 : 11^2 \\ m^2 : 101^2 \end{cases} \text{ т.к. } 11 \text{ и } 101 \text{ простые числа}$$

$$\begin{array}{l} A : 1111 \\ m^2 : (1111)^2 \end{array} \Rightarrow B \cdot C : 1111 \quad \text{Заметим, что}$$
$$\begin{cases} B < 1000 < 1111 \\ C < 100 < 101 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B : 11 \\ C : 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 101 \\ C = 55 \end{cases} \text{ т.к. } 11 \text{ число из } [11, 99] \text{ с } 5 \text{ делителем} \\ - 55, \text{ число из } [101, 999] \text{ с } 1 \text{ делителем}$$

$$\Leftrightarrow A : 5 \& A : 1111 \& A < 10000 \Rightarrow A = 5555$$

иначе $(m^2 : 25 \& m^2 : 25)$

$$\text{Ответ: } (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y-3} + \frac{1}{(x-3)(y-3)}, \quad x > 0 \text{ и } y > 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy \quad M_{**} = ?$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \\ \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y-3} + \frac{1}{(x-3)(y-3)} = \frac{(x-3)+(y-3)+1}{(x-3)(y-3)} = \frac{x+y-5}{(x-3)(y-3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y-5}{(x-3)(y-3)} \\ \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 3^*$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = \overset{*}{(x-y)} \overset{**}{(x^2+xy+y^2)} - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3(x^2 + y^2 - 2xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = \boxed{27} \end{aligned}$$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 а) $x, y \in \mathbb{R} : (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$
 $= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$
 $\pi x = a \text{ \& } \pi y = b \Rightarrow (\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a (\neq)$
 $\Leftrightarrow \sin^2 a - \cos^2 a = \sin a \sin b + \cos a \cos b \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\cos 2a = \cos(a-b) \Leftrightarrow \cos 2a + \cos(a-b) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3a-b}{2} = 0 \\ \cos \frac{a+b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-b}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a+b}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi j, j \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = \pm 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = \pm 1 + 2j, j \in \mathbb{Z} \end{cases}$
 Тогда все пары чисел вида $(3x, y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z})$;
 $(3x, y = -1 - 2k, k \in \mathbb{Z})$; $(x, 3x + 1 - 2k, k \in \mathbb{Z})$;
 $(x, -x + 1 + 2j, j \in \mathbb{Z})$; $(x, -x - 1 + 2j, j \in \mathbb{Z})$ ← ответ

3 б) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = 2\pi$

$x \in [-4; 4]$; $y \in [-9; 9]$

~~$\forall t \in [-1; 1] \arccos t \leq \pi$~~
 $\rightarrow$ достигается $\forall$ при $t = -1$

$\Rightarrow$ нам не подходит одна пара $y = -9 \text{ \& } x = -4$
 Все остальные $\rightarrow$ если свл. решением а), свл. решением
 и пункта б)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Переберём:

~~$x=1$~~
 ~~$x=2$~~
 ~~$x=3$~~

Заметим, что y ~~возможны~~
равных по четности
чисел x_1 и x_2 по-во
пара будет одинаково

рассматриваем две пары: z и nz чисел: z ~~и~~ nz четно
и nz нечетно.

Заметим, что две пары вида 2)

будет аналогично, т.к. две числа вида x и $x+1$
где x и $j \in \mathbb{Z}$ $\exists k \in \mathbb{Z}$: $2j+1+2k=x$
или $2j+2k=x$

и найдем какое четность меняется $\Rightarrow$ 10 четно
и 9 нечетно.

$\Rightarrow$ две $\begin{cases} \forall x \in [1; 4] : x \cdot 2 \text{ пар } 10 \\ \forall x \in [1; 4] : x \cdot 2 \text{ пар } 9 \end{cases}$

тогда их $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 88$

НО -1 пара т.к. ограничение

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ n человек $\rightarrow$ n человек $(1+k)$ билетов

$P(\text{Вася и Петя купят по билету}) \rightarrow \times 3,5 \times$

$1+k=?$

$P(A)$

Посчитаем $P(\text{Вася и Петя купят по билету})$ ~~В начале~~ ~~в конце~~

Всего групп из n человек $- C_n^1$

Групп из n человек, в которых Петя и Вася $- C_{n-2}^2$

(фиксируем двух ~~из~~ (1 случай) и добираем 2 человека из $(n-2)$ человек (C_{n-2}^2) , перемножив получаем C_{n-2}^2)

$\Rightarrow$ ~~в начале~~ ~~в конце~~ $P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^1} =$

$$= \frac{\frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{2}}{\frac{n!}{(n-1)!1!}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично посчитаем $P(A)$ в конце месяца:

Всего групп по $1+k$ человек $- C_n^{1+k}$

с Васей и Петей $- C_{n-2}^{2+k}$

$\Rightarrow P(A)$ в конце месяца

$$= \frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{1+k}} = \frac{(n-2)(3+k)}{(n-1)n}$$

По условию:

$$\frac{(1+k)(3+k)}{(n-1)n} = 3,5 \cdot \frac{12}{(n-1)n} \Rightarrow 42 = (1+k)(3+k) \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=10 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow k=3 \Rightarrow 1+k=4$

Ответ: ~~в начале~~ в конце месяца было выдано 4 билета.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что точки пересечения прямых с окружностью радиуса 3 (границы круга) будут иметь координаты:

$$(2\sin\alpha; -\sqrt{9-4\sin^2\alpha}), (2\sin\alpha; \sqrt{9-4\sin^2\alpha}), (2\cos\alpha; \sqrt{9-4\cos^2\alpha});$$

$$(2\cos\alpha; -\sqrt{9-4\cos^2\alpha})$$

$$\text{Тогда } \ell(\Phi(\alpha)) = \sqrt{9-4\sin^2\alpha} - (-\sqrt{9-4\sin^2\alpha}) + (\sqrt{9-4\cos^2\alpha} - (-\sqrt{9-4\cos^2\alpha})) = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

$$\text{Если } \cos\alpha = t \text{ то } \ell(\Phi(\alpha)) = 2\sqrt{5+4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} =$$

$$= 2\sqrt{7+(4\cos^2\alpha-2)} + 2\sqrt{7-(4\cos^2\alpha-2)}$$

$$\text{Заметим, что } (\sqrt{7+(4\cos^2\alpha-2)})^2 + (\sqrt{7-(4\cos^2\alpha-2)})^2 = 14$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(\sqrt{7+(4\cos^2\alpha-2)})^2 + (\sqrt{7-(4\cos^2\alpha-2)})^2}{2}} \stackrel{\text{по н-ву Коши о средних}}{\geq} \frac{\sqrt{7+(4\cos^2\alpha-2)} + \sqrt{7-(4\cos^2\alpha-2)}}{2}$$

$$\Rightarrow \ell(\Phi(\alpha)) \leq 2\sqrt{7}, \text{ достигается при равенстве}$$

двух корней, то есть при таком α , что $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

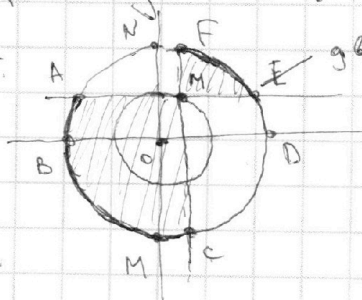
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = 45^\circ \vee \alpha = 135^\circ \vee \alpha = 225^\circ \vee \alpha = 315^\circ$$

$$\text{или } \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \vee \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi j, j \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{при целых } \alpha - \text{максимум } \Rightarrow \rho(\Phi(\alpha)) \leq \pi + 2\sqrt{7}$$

Лемма:



два концентрич. круга
на параллельных прямых

$$NF = MC$$

$$AB = ED$$

$$\Rightarrow ND$$

$$BC = AC + FE$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\text{Ответ: } \rho(\Phi(\alpha)) \leq \pi + 2\sqrt{7}, \alpha = \left[\frac{\pi}{4} + \pi k, j \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

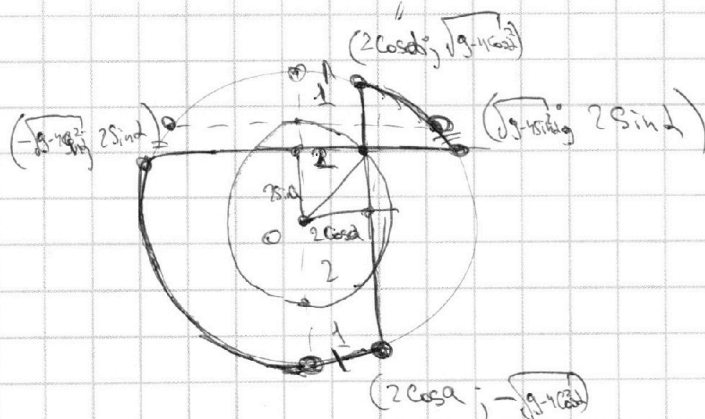
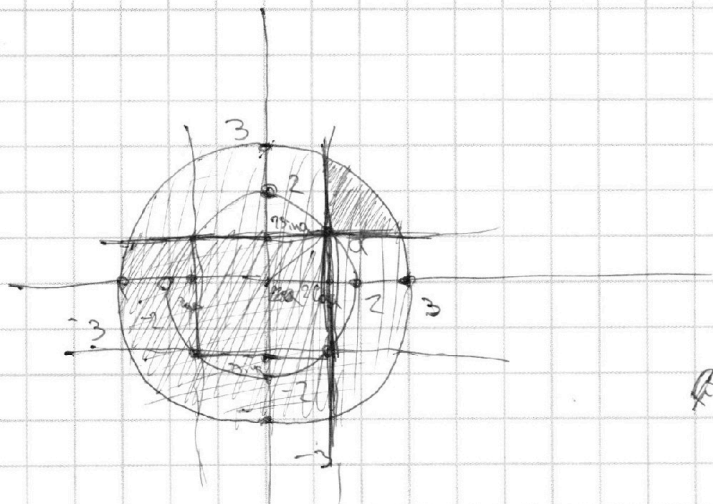
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \text{— круг с } R=3$$



$$x^2+y^2=9 \quad y=\pm\sqrt{9-x^2}$$

answer

$$L_{\text{up}} = 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

$$L_{\text{ср}} = \text{const (т.е. постоянная)} \Leftrightarrow \text{Min}(L(\alpha)) = \text{min } l(\alpha)$$

(можно потом посчитать)

$$\text{min } l(\alpha) = ?$$

$$\cos x = t \Rightarrow l(\alpha) = 2\sqrt{9-4t^2} + 2\sqrt{9-4(1-t^2)}$$

$$\frac{2\sqrt{7-m} + 2\sqrt{7+m}}{2} = \frac{2\sqrt{7-(4t^2-2)} + 2\sqrt{7+(4t^2-2)}}{2}$$

no more



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- ① $A, B, C \in \mathbb{N}$:
- A - четырех знач. число
 $\text{вида } \overline{xxxx}$
 - B - трехзнач, одна из цифр - 1
 - C - двухзнач, одна из - 5
- $ABC = m^2, m \in \mathbb{N}$

$$m^2: 1111$$

$$11 = 101 \cdot 11$$

$$\begin{cases} m^2: 11 \\ m^2: 101 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2: 121 \quad (11^2) \\ m^2: 101^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B \cdot C: 1111$$

$$\begin{cases} B < 100 \\ m < 1000 \end{cases} \Rightarrow B: 101 \quad C: 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{осев } B = 101 \\ \text{осев } C = 55 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{осев } A = 5555$$

② $R = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy} \quad (x > 0, y > 0)$

$$\frac{x-3}{y+3} \rightarrow R = \frac{y+x+1}{yx} = \frac{(y-3)+(x+3)+1}{(y-3)(x+3)} = \frac{y+x+1}{(y-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+1 = 0 \quad (x > 0, y > 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 3, y \neq -3, y \neq 0, x \neq 0 \\ xy - 3y + 3x - 9 = xy \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y = 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① × слово

~~4~~
~~3~~
~~2~~ - ~~выражение~~

$$P(\Pi_+, B_+) = \frac{\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}}{2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{x(x-1)} = \frac{21}{x(x-1)}$$

$$C_{n-2}^4 = \frac{n!}{(n-4)!4!}$$

$$C_{n-2}^2 = \frac{n!}{(n-4)!2!}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{n!}{(n-4)!2!} \cdot \frac{(n-4)!4!}{n!}$$

C_n^4 - всего групп по 4

C_{n-2}^2 - групп по 2, в которых всего 4 букв

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!2!}$$

$$P(\Pi_+, B_+) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{n! \cdot 2!} = \frac{12}{(n-1)n}$$

$$C_{n-2}^{4+k} = \frac{n!}{(n-4-k)! (4+k)!}$$

$$C_{n-2}^{2+k} = \frac{(n-2)!}{(n-4-k)! (2+k)!}$$

$$\Rightarrow P(B(B+)) = \frac{(4+k)!}{(2+k)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4-k)!}$$

$$12 \cdot 3,5 = \frac{(4+k)!}{(2+k)!} = (2+k+1)(2+k+2) \cdot \frac{(4+k)!}{(2+k)!}$$

$$\frac{42}{2} = 21$$

$$(3+k)(k+4) \rightarrow k=3$$

Ответ: 7

