

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



~~1~~ [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

~~2~~ [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

~~3~~ [5 баллов] Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

~~4~~ Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

~~5~~ [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

~~6~~ [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

- 1) $A, B, C \in \mathbb{N}$: . A - 4x знакое число вида $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$
 • B - 3x знакое число вида $\overline{a_1 a_2 a_3}$, где
 $a_1 = 1 \vee a_2 = 1 \vee a_3 = 1$
 • C - 2x знак числа $\overline{c_1 c_2}$, где
 $c_1 = 5 \vee c_2 = 5$
 • $A \cdot B \cdot C = m^2$, $m \in \mathbb{N}$

$$m^2 : 1111 \quad | \Rightarrow \begin{cases} m^2 : 11^2 \\ m^2 : 101^2 \end{cases} \quad \text{т.к. } 11 \text{ и } 101 \text{ простые числа}$$

$$A : 1111 \quad | \Rightarrow B \cdot C : 1111 \quad \text{заметим, что} \quad \begin{cases} B : 11 \\ C : 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 101 \\ C = 55 \end{cases} \quad \text{т.к. } 11 \text{ число из } [11, 99] \subset \text{одно} \\ \text{число из } [101, 999] \subset \text{одно}$$

$$\hookrightarrow A : 5 \& A : 1111 \quad | \Rightarrow A < 10000 \Rightarrow A = 5555 \quad \text{т.к. } (m^2 : 25 \& m^2 : 101)$$

$$\text{Ответ: } (5555; 101; 55)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad x > 0 \quad y > 0$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy \quad M = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \\ \cancel{\frac{1}{x-3}} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{(x-3) + (y+3) + 1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \\ \left\{ \begin{array}{l} y > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 3 *$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3(x^2 + y^2 - 2xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = \boxed{27} \end{aligned}$$

Ответ: $M = 27$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) a) \quad x, y \in \mathbb{R} : \quad (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\pi x = a \quad \& \quad \pi y = b \Rightarrow (\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a - \cos^2 a = \sin a \sin b + \cos a \cos b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2a = \cos(a-b) \Leftrightarrow \cos 2a + \cos(a-b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3a-b}{2} = 0 \\ \cos \frac{a+b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-b}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{a+b}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + j\pi, j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = \pm \frac{\pi}{2} + 2j\pi, j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Tarzi bee napa rucus buga $(3x, y = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$$\cancel{(3x+y)} \quad (x; \pm 3x - \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}); \quad (x; 3x + 1, -2k, k \in \mathbb{Z});$$

$$(x; -x + \pm \frac{\pi}{2} + 2j\pi, j \in \mathbb{Z}); \quad (x; -x - \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, j \in \mathbb{Z})$$

$$3) \quad \text{arccos} \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} < 2\pi$$

$$x \in [-4; 4] \quad ; \quad y \in [-9; 9]$$

~~$\forall t \in \{-1, 1\} \quad \arccost \leq \pi$~~

$$\Rightarrow \arccos \frac{y}{x} \leq \pi$$

точка

\Rightarrow нам не подходит одна пара $-y = -9 \quad \& \quad x = -4$

Все остальные пары, если обл. решением a), где решениям

и нулиста



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Переберём:

~~$x = 1$~~ :

~~$x = 2$~~ :

~~$x = 3$~~ :

Заметим, что пары $(x_1, -x-1+2k)$

равных по той же

чисел x_1 и x_2 конеч-

пара будет

построена, где x_1 и x_2 не числа: $\begin{cases} 8 \\ 10 \end{cases}$ где есть

Заметим, что где пары $(x_1, -x-1+2k)$

будут аналогичны, т.к. где есть пара x_1 и x_2

также x_1 есть $\exists k \in \mathbb{Z}$: $2j+1+2k=x$

также x_1 есть $\exists k \in \mathbb{Z}$: $2j+2k=x$

\Rightarrow где $\begin{cases} x \in \{-1; 1\} \\ x \in \{1; 3\} \end{cases}$: $x \neq 2$ пар 10

$\begin{cases} x \in \{1; 3\} \\ x \in \{-1; 1\} \end{cases}$: $x \neq 2$ пар 9

тогда $10 \cdot 10 + 9 \cdot 9 = 88$

НО -1 пары т.к. ограничение

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(6)

n человек k билета $\rightarrow n$ человек $(n+k)$ билетов

$P(\text{Вася и Петя получат по билету}) \rightarrow *3,5*$

$$n+k=?$$

$P(A)$

Посчитаем $P(\text{Вася и Петя получат по билету})$ в начале месяца некоторое время.

Всего групп из n человек - C_n^1

Групп из n человек, в которых Петя и Вася - C_{n-2}^2

(выбираем двух из n (1 условие) и добавляем 2 человека из $(n-2)$ человек (C_{n-2}^2), переплюнув получаем C_{n-2}^2)

$$\Rightarrow \cancel{\text{Условие}} \text{ В конце месяца } P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^1} =$$

$$\frac{\frac{n-2}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot 1}{(n-1)n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично посчитаем $P(A)$ в конце месяца:

Всего групп из $n+k$ человек - C_n^{n+k}

с Васей и Петей - C_{n-2}^{2+k}

$\Rightarrow P(A)$ в конце месяца

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{n+k}} = \frac{(n+k)(n+k-1)}{(n-2)n}$$

по условию:

$(n+k)(n+k-1) \neq 0$, т.к. может ≥ 4

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{(n-2)n} = 3,5 \quad \frac{12}{(n-2)n} \Rightarrow 12 = (n+k)(n+k-1) \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=-10 \\ n>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=3 \Rightarrow k+h=7 \quad \cancel{\text{Условие}}$$

Ответ: ~~Билеты~~ В конце месяца было выдано 7 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

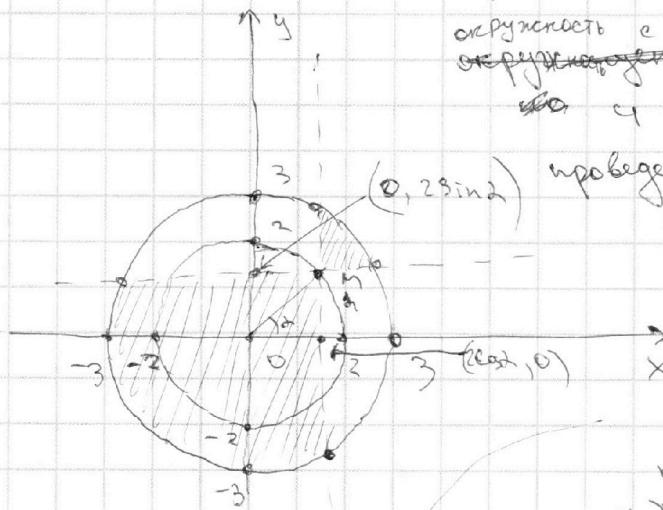
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{6} \quad f(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \cos \alpha) \geq 0$$

Изображим

1) Для задачи задачи ~~степеней~~ окружность с центром в начале координат



2) $\exists P(P(z)) = \text{однократн.}$
~~однократн.~~ значение
 переменной P является
 в z заключением от z

$\exists l(\Phi(l))$ — фиксий, \exists такое
значение которого — сумма
длин отрезков проведённых
на прямых, заключенных
на окружности

Занесем, что $P(\Phi(\omega)) = \pi + l(\Phi(\omega))$, т.е. неравенство, упомянутое выше, то есть $\Phi(\omega) \geq \pi$, непротиворечиво и, следовательно, оно верно для всех ω .

Таким образом, $\max(P(\Phi(\omega))) = \pi + \max(l(\Phi(\omega)))$

зато можно воспользоваться
отрезком OM $(\cos \beta, \sin \beta)$ где \vec{OM} - то
параллелепипедического угла β , а
значит прямые пересекут Ox и
 Oy в точках $(2 \cos \beta, 0)$ и $(0, 2 \sin \beta)$
соотв. А в силу первого условия
в системе, нас интересуют точки
круга надо брать более этих двух
прямых, надо писать.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что точки пересечения прямых с окружностью радиуса 3 (граничицы круга) будут иметь координаты:

$$(2 \sin \alpha; -\sqrt{9-4 \sin^2 \alpha}) \cup (2 \sin \alpha; \sqrt{9-4 \sin^2 \alpha}) \cup (2 \cos \alpha; \sqrt{9-4 \cos^2 \alpha})$$

$$(2 \cos \alpha; -\sqrt{9-4 \cos^2 \alpha})$$

$$\text{Тогда } l(\Phi(\alpha)) = \sqrt{(9-4 \sin^2 \alpha) + (-\sqrt{9-4 \sin^2 \alpha})^2} + \sqrt{(9-4 \cos^2 \alpha) + (-\sqrt{9-4 \cos^2 \alpha})^2} =$$

$$= 2\sqrt{9-4 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{9-4 \cos^2 \alpha}$$

~~$$l(\Phi(\alpha)) = 2\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9-4 \cos^2 \alpha} =$$~~

$$= 2\sqrt{7+(4 \cos^2 \alpha - 2)} + 2\sqrt{7-(4 \cos^2 \alpha - 2)}$$

~~$$\text{Заметим, что } (\sqrt{7+(4 \cos^2 \alpha - 2)})^2 + (\sqrt{7-(4 \cos^2 \alpha - 2)})^2 = 14$$~~

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(\sqrt{7+(4 \cos^2 \alpha - 2)})^2 + (\sqrt{7-(4 \cos^2 \alpha - 2)})^2}{2}} \stackrel{\text{по нер-ву Коши о средних}}{\geq} \sqrt{7+(4 \cos^2 \alpha - 2)} + \sqrt{7-(4 \cos^2 \alpha - 2)}$$

$$\Rightarrow l(\Phi(\alpha)) \leq 2\sqrt{7}, \text{ достигается при равенстве}$$

где α паралл., то есть при таком α , что $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

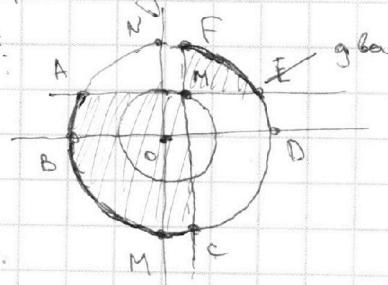
$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135^\circ \cup \alpha = 225^\circ \cup \alpha = 315^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \cup \alpha = 135^\circ \cup \alpha = 225^\circ \cup \alpha = 315^\circ$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \cup \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow при полученных α - максимум, $\Rightarrow l(\Phi(\alpha)) \leq \pi + 2\sqrt{7}$

Лемма: $\angle AFB = \angle CED$ (измеряется дугами окружности круга), M - центр. точки



измеряется дугами окружности

по направлению прямых

$$NF = NC \quad | \quad AB = ED$$

$$AC = FE \quad | \quad ND$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$BC = AC + FE$$

$$\text{Отсюда: } l(\Phi(\alpha)) \leq \pi + 2\sqrt{7}, \alpha = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right]$$



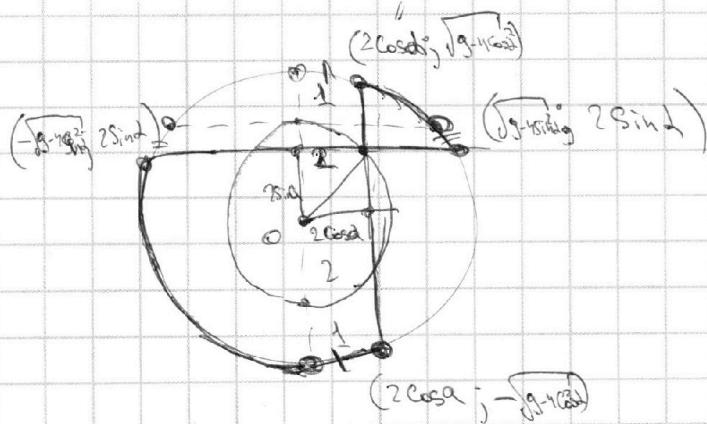
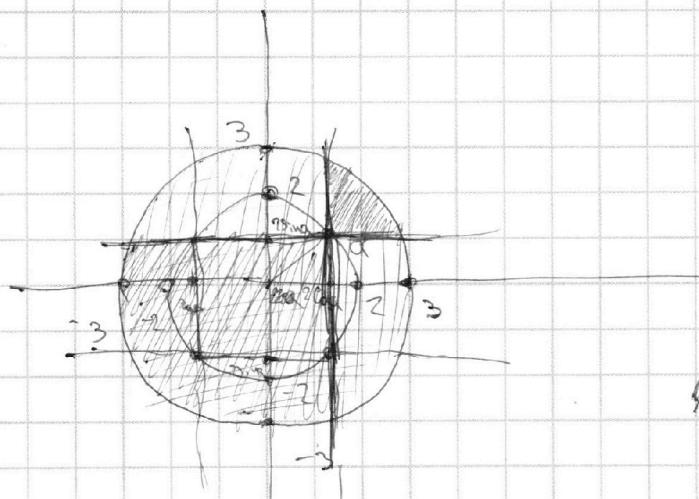
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos \varphi)^2 + (y - 2\sin \varphi)^2 \geq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \text{--- кружок с } R=3$$



$$x^2 + y^2 = 9 \quad y = \pm \sqrt{9 - x^2}$$

$$l_{sp} = 2\sqrt{9 - 4t^2} + 2\sqrt{9 - 4t^2}$$

$$L_{sp} = \text{const} \quad (\text{i.e. рисунок}) \Rightarrow \min(L(\varphi(t))) = \min l(\varphi(t))$$

(можно иначе назвать)

$$\min l(\varphi) = ?$$

$$\sqrt{t^2 - m^2} + \sqrt{t^2 + m^2} \quad t \in [-\sqrt{9-m^2}, \sqrt{9-m^2}]$$

$$\frac{\sqrt{t^2 - m^2} + \sqrt{t^2 + m^2}}{2} = \sqrt{t^2 - \frac{m^2}{2}} \quad \text{по касанию}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(1) $A, B, C \in \mathbb{N}$

- A - четырехзнач. число вида \overline{xxxx}
- B - трехзнач. число из цифр 1-5
- C - двухзнач. число из 5-7

$$ABC = m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$m^2: 1111$$

$$\cdot 11 = 101 \cdot 11$$

$$\begin{cases} m^2: 11 \\ m^2: 101 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m^2: 1111 (11^2) \\ m^2: 101^2 \end{cases} \Rightarrow B \cdot C: 1111$$

$$\begin{cases} B < 100 \\ C < 100 \\ m < 1000 \end{cases} \Rightarrow B: 101 \& C: 11 \Rightarrow \begin{cases} \text{окр } B = 101 \\ \text{окр } C = 55 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{окр } A = 5555$$

(2) $R = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy}$ $(x>0, y>0)$

$$\begin{array}{|c|} \hline x=3 \\ \hline y+3 \\ \hline \end{array} \rightarrow R = \frac{y+x+1}{xy} = \frac{(y-3)+(x+3)+1}{(y-3)(x+3)} = \frac{y+x+1}{(y-3)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0? \\ x>0, y>0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3, y \neq 3, y \neq 0, x \neq 0 \\ xy - 3y + 3x - 3 = xy \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y=3$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy$$

$$3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) a) $x, y \in \mathbb{R}$: $\begin{aligned} & (\sin \pi x - \sin \pi y)^{\frac{1}{2}} \sin \pi x = \\ & = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ \Rightarrow & \pi x = a \& \pi y = b \Rightarrow (\sin a - \sin b) \sin a = \\ & = (\cos a + \cos b) \cos a \Rightarrow \sin^2 a - \cos^2 a = \sin a \sin b + \cos a \cos b \\ & - \cos 2a \quad \cos(a-b) \\ \Rightarrow & \cancel{\cos 2a} \cos 2a + \cos(a-b) = 0 \end{aligned}$

$\cos x + \cos y = ?$ $\Rightarrow 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2})$

$\cdot (\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{y}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{y}{2}$

(вспомним)

$\begin{cases} a-b = 2a+\pi \\ a-b = \pi - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+a = -\pi \\ 3a-b = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ 3x-y = 1 \end{cases}$

?) все решения $(x, -x-1)$ и $(y, 3y+1)$

?) $\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \arccos \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1) *решеб*

~~бесконечность~~

$$P(\Pi^+, B^+) = \frac{6 \cdot 5}{x \cdot (x-1)} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{x(x-1)} = \frac{21}{x(x-1)}$$

$$C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}$$

$$C_{n-2}^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$$

C_n^4 - все группы по 4

C_{n-2}^2 - группы по 2, в которых есть ч. Пара

$$\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{12}{(n-2)n}$$

$$P(\Pi^+, B^+) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)! \cdot n!}{n! \cdot 2!} =$$

$$C_n^{4+k} = \frac{n!}{(n-4-k)! \cdot (4+k)!}$$

$$C_{n-2}^{2+k} = \frac{(n-2)!}{(n-4-k)! \cdot (2+k)!} +$$

$$\Rightarrow P(B(B^+ \cap \Pi^+)) = \frac{(n+k)!}{(2+k)!} =$$

$$12 \cdot 3,5 = \frac{(4+k)!}{(2+k)!} \stackrel{k=1}{=} (2+k+1)(2+k+2) \cdot$$

~~2~~ 42

$$(3+k)(k+4) \rightarrow k=3$$

Ответ: \neq



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

