



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию А можно записать как  $\overline{aaaq} \Rightarrow A = 111 \cdot q = 11 \cdot 101 \cdot \overline{q}$

1) т.к

$A \cdot B \cdot C = n^2$ ,  $A \cdot B \cdot C \mid 101$ , 101 - простое, то  $A \cdot B \cdot C \mid 101^2$

$A \mid 101$  но  $A \nmid 101^2$  (ошибочно)

↓

$B \cdot C \mid 101$ ,  $C \leq 99 \Rightarrow C \nmid 101$

↓

$B \mid 101$

↓

$B = \overline{B0B}$ , где B - цифра

т.к B записан B есть 7, то B=7

$B = 707$

2) т.к  $A \cdot B \cdot C = n^2$ ,  $A \cdot B \cdot C \mid 11$ , 11 - простое, то  $A \cdot B \cdot C \mid 11^2$

$A \mid 11$  но  $A \nmid 11^2$  (ошибочно, т.к  $A = 11 \cdot 101 \cdot q$ )

$B = 707 \nmid 11$

↓

$C \mid 11 \Rightarrow C = \overline{cc}$ , где c - цифра

из условия  $c=1$

↓

$C = 11$

3)  $n^2 = 11 \cdot 707 \cdot q = 11 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot q \Rightarrow q = 7$   
(q - цифра)

↓

$A = 7777$

Ответ: (7777; 707; 11)

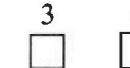


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

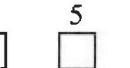
1



3



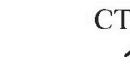
4



5



6



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Исходя из условия, составим уравнение:

$$1) K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

↓

$$y+x+3=0 \quad \text{или} \quad xy = (x-4)(y+4)$$

невозможно

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$\begin{aligned} & \text{т.к } x>0 \\ & y>0 \end{aligned}$$

$$4(x-y) = 16$$

$$x-y = 4$$

$$\begin{aligned} 2) M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 12xy = 4(x^2 + y^2 + xy) - 12xy = \\ &= 4(x^2 + y^2 - 2xy) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.










СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x+y = 2k+1 \\ x-y = 2l+1 \end{cases} \quad \leftarrow \quad x-y = 1 + \cancel{2l+1}$$

~~Extrakt~~  
~~gilt für alle~~

$$\text{Ort: } (x, 2k+1-x), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(x, x-2l-1), \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе  $n$  учеников. Тогда вероятность в начале месяца, что и Толя и Вася пойдут на концерт:

$$A = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)}$$

Пусть в конце месяца продали  $x$  билетов:

$$A' = \frac{x}{n} \cdot \frac{(x-1)}{n-1}$$

Известно, что  $11A = A'$

$$\frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

$$x = 12 \quad x = -11$$

невозможно из условия задачи

¶

$$x = 12$$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

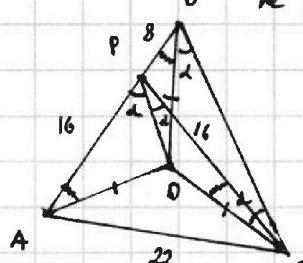
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделал чертеж:

$$1. AO = OB = OC = R (\text{вн. вр.}) \Rightarrow \triangle BOC - p/\delta \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC = \alpha$$

(не будем указывать  $w_1$  и  $w_2$ , чтобы

не загромождать)



2.  $\triangle POB$  - вписаный

«

$$\angle OCB = \angle OPA = \alpha$$

$$\angle CPO = \angle CBO = \alpha$$

$$3. \angle OCP = \angle OBP = \beta \quad (\triangle POB - \text{вписаный})$$

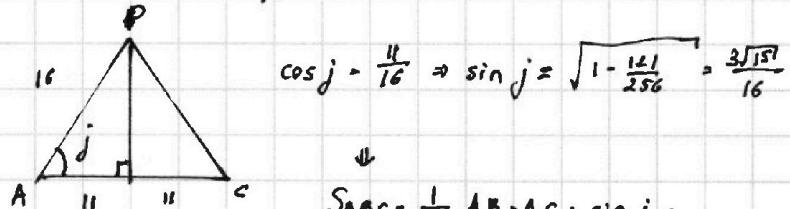
$$\angle OBP = \angle BAO \quad (\triangle OBA - p/\delta)$$

4. Из п. 2, 3 и  $OP$  - общая сторона,  $OA = OC$

«

$$\triangle APO = \triangle CPO \Rightarrow AP = CP = 16$$

5.  $\triangle APC - p/\delta :$



$$\cos j = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin j = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$\text{S}_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin j =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} =$$

$$= \frac{3 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

Ответ:  $\frac{99\sqrt{15}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак,  $P_{max} = 6\pi + 12$  при  $\alpha = 45^\circ$

$\omega = 35^\circ$

$\beta = 225^\circ$

$\gamma = 315^\circ$

~~$225^\circ$~~

Ответ:  $6\pi + 2\sqrt{2}$ ,  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

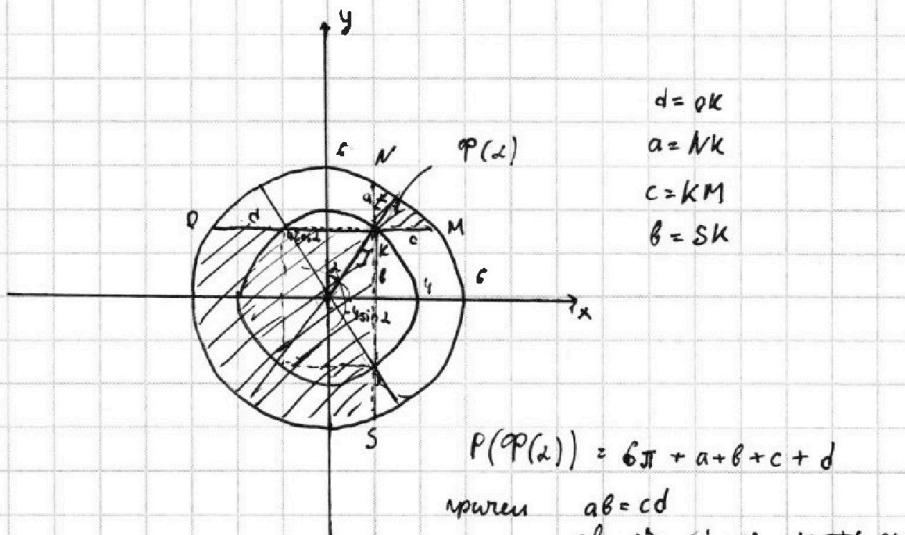
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{array} \right. \text{ - ур-е окр-ти с центром } (0,0) \text{ и радиусом 6}$$

(\*) если  $\begin{cases} x = -4 \sin \alpha \\ y = 4 \cos \alpha \end{cases}$ , то  $x^2 + y^2 = 16$  - ур-е окр-ти с центром  $(0,0)$  и радиусом 6

Далее рассмотрим задачу на графике

Построим график



$$P(P(\alpha)) = 6(\pi + 8 \cos \alpha + 8 \sin \alpha)$$

отсюда,

$$\text{то } P_{\max} \text{ при } \cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{т.к. } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \text{const} = 1)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

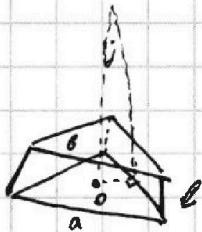


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

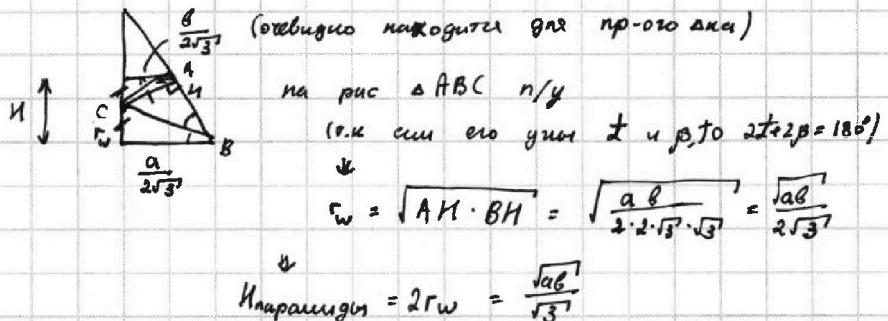
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду со сторонами основания  $a$  и  $b$



а) Из того, что  $\exists$  шар  $W$ :

рассмотрим ~~одинаковую~~ плоскость  $j$ :



Если  $\ell$  - боковое ребро пирамиды,

$\angle$  - искомый угол,

$$\text{т.о. } \tan \angle = \frac{\ell}{a-b} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}(a-b)} = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (x = \frac{\sqrt{ab}}{a-b})$$

б) Из того, что  $\exists$  шар  $R \Rightarrow$  сущ. сечение  $\Omega$  боковой грани пирамиды,  
т.е. бок. гр. пирамиды - описаная окружность

$$\ell = \sqrt{H^2 + (a-b)^2}$$

$$4\ell^2 = 4H^2 + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$4 \cdot \frac{ab}{3} + 4a^2 + 4b^2 - 8ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$4ab + 12a^2 + 12b^2 - 24ab = 3a^2 + 3b^2 + 6ab$$

$$9a^2 + 9b^2 - 26ab = 0$$

$$9(a^2 + b^2 - 2ab) = 8ab$$

$$\frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{8}{9} = x^2 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \angle = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$$\angle = \arctan \left( \frac{2\sqrt{6}}{9} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

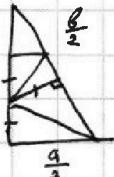
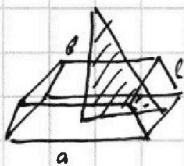
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Докажем, что если основание пирамиды  $n$ -угольник (правильный), то для  $n \geq 4$  условие не может выполняться.

а) рассмотрим  $n=4$



$$r_w = \sqrt{\frac{ab}{4}} = \frac{\sqrt{ab}}{2} \quad H = \sqrt{ab}$$

аналогично  
 $l = \frac{a+b}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{H}{l} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$H^2 + (a-b)^2 = l^2$$

$$4 \cdot ab + 4a^2 - 8ab + 4b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$3a^2 + 3b^2 - 6ab = 0$$

$$a-b = 0$$

¶

такое не является  
пирамидой

б) для  $n \geq 5$  очевидно, условие не выполняется

Отв:  $\arctg \left( \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

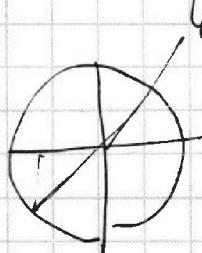
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi y = \sin \pi y \cdot 2 \cos \pi x$$

$$\tan \pi y = \tan \frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$\pi y = \frac{\pi(x-y)}{2} + \alpha \pi k$$

$$\pi y = \cancel{\pi y} - \cancel{\pi x} + \alpha \pi k$$

$$2\pi y = \pi x - \pi y + \alpha \pi k$$

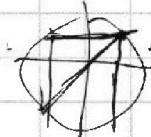
$$\pi y = \pi x + \alpha \pi k$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x + \alpha \pi k)$$

$$(\cos 2\pi y) \Rightarrow$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos(\pi x + \alpha \pi k) = \cos(2\pi y)$$



50

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x + \alpha \pi k) = 0$$

|

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

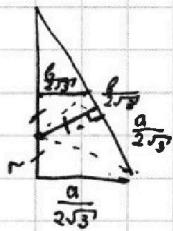
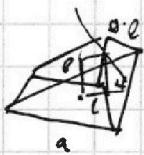


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чертежи



$$\frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{ab}{4 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{ab}{12}} = \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{1}{a-b} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}(a-b)} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a-b} = x$$

$$2l = a+b$$

$$l = \sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

$$4h^2 + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$\cancel{x} + \cancel{y \sin \alpha}$$

$$\frac{4ab}{3} + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$4ab + 4a^2 + 4b^2 - 8ab = 3a^2 + 3b^2 + 6ab$$

$$a^2 + b^2 - 10ab = 0$$

$$(a-b)^2 = 8ab$$

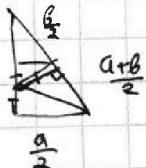
$$x^2 = \frac{ab}{(a-b)^2} = 8$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

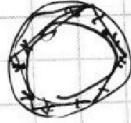
$$\operatorname{tg} \angle = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$$

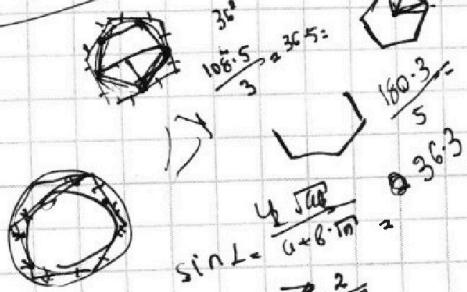


$$\frac{a+b}{2}$$



$$\sin \angle = \frac{4\sqrt{ab}}{(a+b)\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{11}{5} = \frac{22}{10}$$





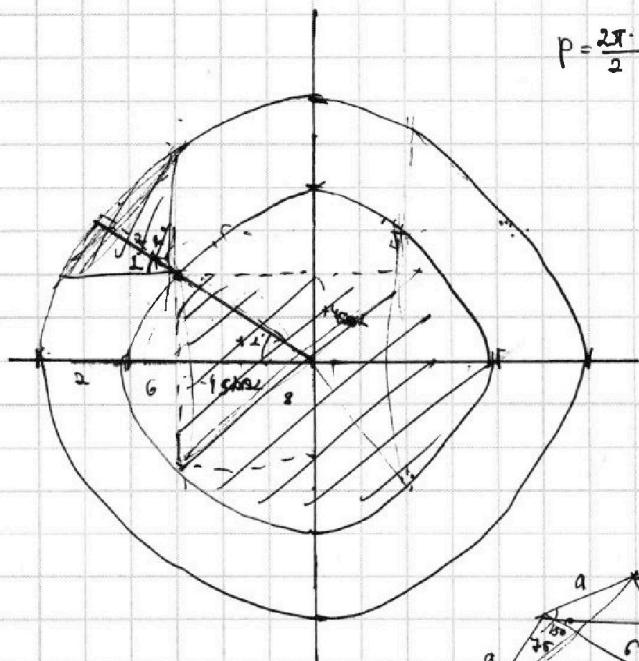
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чертежи



$$4\pi + \pi$$

$$P = \frac{2\pi \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$$



$$1) 3 - 10^{\circ} / 180^{\circ}$$

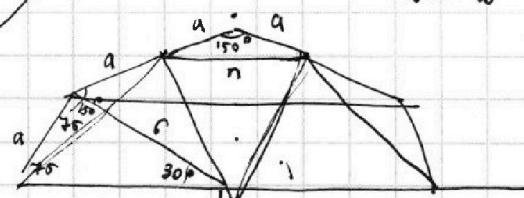
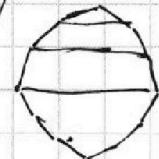
$$4 - 360^{\circ}$$

$$5 - 540^{\circ}$$

$$180(n-2)$$

$$\frac{30 \cdot 12}{180 \cdot 10} = \frac{12}{2} =$$

$$= 30 \cdot 5 = 150^{\circ}$$



$$\sqrt{2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 36 \cdot 2 - 2 \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

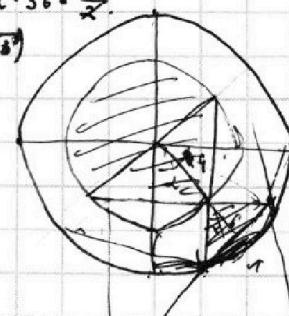
$$a^2 = 36(2-\sqrt{3})$$

$$n =$$

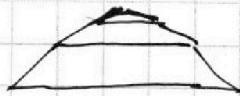
$$n = a^2 \cdot 2 + 2a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n^2 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \cdot 36$$

$$n =$$



$$12\pi$$



$$\frac{2\pi}{4} = \frac{2\pi \cdot 2}{8} =$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi \cdot 2}{8} = \frac{\pi}{2}$$

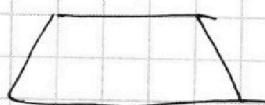
$$n^2 = 36 \cdot 2 - 2 \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 36(2-\sqrt{3})$$

$$n = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$a^2 + b^2$$

$$(4+6\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sin \alpha + \cos \alpha)$$



$$a + b$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓	✓	✓			
✗	✗	✗				

Черновик

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

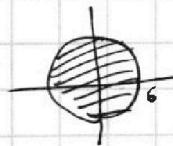
$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$$

$$y = \frac{16 \sin \cos 5\alpha + 4x \cos y}{x} = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\pi x + \pi y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$xy = 2k + \frac{1}{2}$$

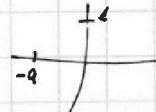


$$(x+a)(y-b) \leq 0$$

$$x = -4 \sin \alpha$$

$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



$$(x+a)(y-b) \leq 0$$

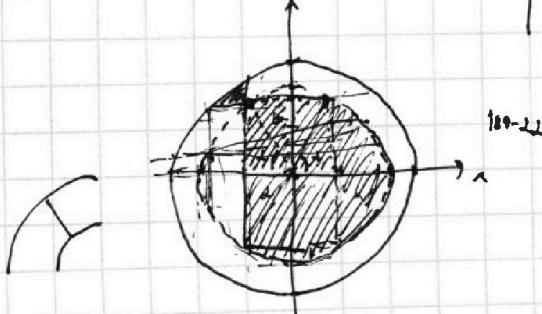
$$(x+a)^2 \leq$$

$$y \geq 0$$

$$xy - xb + ay - ab$$

$$\frac{2\pi \cdot 4}{360} (360 - 22 - 180 + 22) = \frac{2\pi \cdot 4}{2} = 4\pi$$

$$2 + \sin 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$r_w = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(a+b)}{4\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{(a+b)}{2\sqrt{3}}$$



$$2l = a + b$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

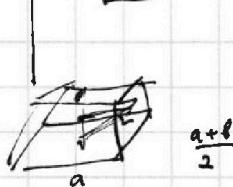
$$4h^2 + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$\tg \alpha = \frac{h}{(a-b)}$$

$$a-b = x$$



$$b = k a$$

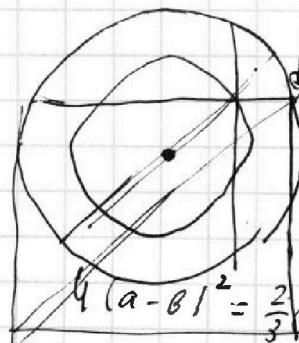


$$a-b = a(1-k)$$

$$a+b = a(1+k)$$

$$\tg \alpha = \frac{a+b}{2\sqrt{3}(a-b)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \lambda$$



$$12a^2 + 12b^2 - 24ab = 2a^2 + 2b^2 + 4ab$$

$$10a^2 + 10b^2 - 28ab$$

$$12a^2(1-k)^2 = 2 \cdot gk^2(1+k)^2$$

$$6 + 6k^2 - 12k = 1 + k^2 + 2k$$

$$5k^2 - 14k + 5 = 0$$

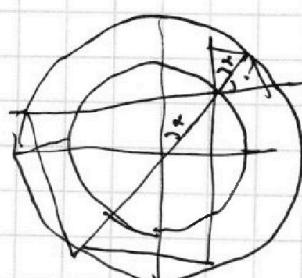
$$\Delta = 196 - 100 =$$

$$y = \frac{2}{3} \lambda^2$$

$$12 = \lambda^2$$

$$\lambda = 2\sqrt{3} \quad \tg \alpha = 1$$

$$\lambda = 45^\circ$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

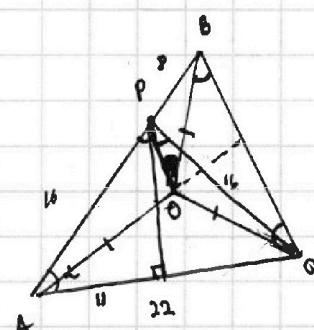
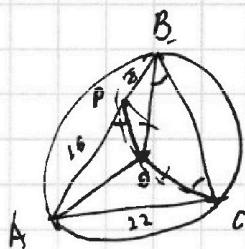
 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$16 \cdot 24 = 22 \cdot ?$$



$$\sin 2\alpha = \frac{11}{16}$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$S = 22 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{\frac{16}{2}} = \frac{22 \cdot 9 \cdot \sqrt{15}}{4} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\sqrt{256 - 121} = \sqrt{135} = \sqrt{5 \cdot 9 \cdot 3} = 3\sqrt{15}$$

$$\rightarrow A = 1111$$

aaaa

bcd 7  
ef 1

a · 1111

$$\dots \cdot \dots = ka$$

$$1111 = \\ = 11 \cdot 101 =$$

aaaa

bcd  
ef

$$bcd \cdot ef : 1110$$

$$ef : 11 \Rightarrow ef = 11$$

121

$$bcd : 101$$

1, 2, 3, 5, 7, 9, 707

11, 13, 17, 19,

23



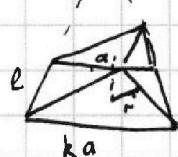
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$r = \frac{ka\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{ka}{2\sqrt{3}}$$

$$h = 2r = ka\sqrt{3} = \frac{ka}{(\sqrt{3})^2}$$

$$kH = H = \frac{ka\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$$H = \frac{ka\sqrt{3}}{(k-1)\sqrt{3}}$$

2

$$l = kL - L = (k-1)L$$

$$L = a\sqrt{\frac{k^2}{(k-1)^3} + 1}$$

$$L = \sqrt{H^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3k^2}{(k-1)} + 1}$$

$$2e = (k+1)a$$

$$2e = ka + a$$

$$a(k+1) = 2(k-1)\sqrt{\frac{3k^2+k-1}{(k-1)}}$$

$$a(k+1) = 2 \cdot a \cdot (k-1) \sqrt{\frac{k^2+3k-3}{3(k-1)}}$$

$$\sqrt{3}(k+1) = 2 \sqrt{(k-1)(k^2+3k-3)}$$

$$3k^2 + 6k + 3 = 4(k^3 + 3k^2 - 3k - k^2 - 3k + 3)$$

$$3k^2 + 6k + 3 = 4k^3 + 8k^2 - 24k + 12 \quad k^3 + 2k^2 - 8k + 4 = 12k^3 - 8k^2 - 8k + 4$$

$$12k^3 - 9k^2 - 10k + 3 = 0$$

3 : 1 3

$$4k^3 + 5k^2 - 30k + 9 = 0 \quad 12 : X 2 3 4 6 12$$

1, 3,  $\frac{9}{2}$

9 : 1, 3, 9

4 : 1, 2, 9

$$12 \cdot 27 - 3 \cdot 27 - 30 + 3 = \\ = 9 \cdot 27 - 30 + 3 = 0$$

$$4 \cdot 27 + 5 \cdot 9 - 90 + 9 =$$

$$= 120 + 28 + 9 =$$

$$1, 3, 9, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{4} \quad \frac{12 \cdot 27}{8} - \frac{9 \cdot 9}{4} - \frac{30}{2} + 3 =$$

$$= \frac{6 \cdot 27}{4} - \frac{3 \cdot 27}{4} - \frac{30}{4} + 3 =$$

$$\frac{4 \cdot 27}{8} + \frac{5 \cdot 9}{4} - \frac{30}{2} + 9 = \frac{3 \cdot 27 - 60}{4} = \frac{21}{4} + 3$$

=

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 9 - 9}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 9}{4 \cdot 4} - \frac{30 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 4} + 9 =$$

$$= \frac{9(81 + 5 - 120)}{4 \cdot 4}$$

86 14  
94



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                                       |                                       |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \text{✓} & X & & X & & \checkmark & & \\ \end{array} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+3}{2} \quad 2) \quad k = \frac{x}{x-y} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-y)(y+4)} \end{array}$$

A - - -

$$\cos 30^\circ = 2 \cos 15^\circ - 1$$

B - - -

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2} x^3 - y^3 - 12xy$$

C - - -

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2} x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\cos 60^\circ + \cos 30^\circ =$$

$$= 2 \cos 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} x^3 - y^3 - 12xy = 4(x^2 + y^2 - xy) = 4(x^2 + y^2 - 2xy) = 16$$

$$x-y = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} x^3 - y^3 - 12xy = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

$$x-y = 4$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin \pi y \cancel{\sin \frac{\pi(y-x)}{2}} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = \cancel{\cos \frac{\pi(y+x)}{2}} \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$$

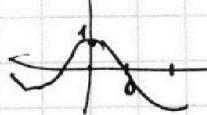
$$\cos 0^\circ + \cos'' 90^\circ = 1 = 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ \quad \text{②}$$

$$\cos 30^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ \cos 30^\circ \quad \begin{matrix} \sin 45^\circ \sin \\ \sin 60^\circ \sin 30^\circ \end{matrix} \quad \tan \frac{\pi(y+x)}{2} \tan \pi y = 1$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$= \cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi y$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi y$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \pi y - \pi x = 2\pi y + 2\pi k \\ \pi y - \pi x = -2\pi y + 2\pi k \end{array} \right.$$



$$\pi y = -\pi x - 2\pi k$$

$$\Theta \pi y =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \sin \pi x$$

$$-\cos^2 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$11 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n}$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos^2 2\pi y = 0$$

⊗

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n^2}$$

$$\frac{4}{n}$$

$$\frac{x^2}{n^2}$$

5

$$\frac{1}{4} \quad \dots \quad \frac{4}{n}$$

$$\frac{1}{4} \quad \dots \quad \frac{4}{n}$$

$$\frac{4}{n}$$

6



$$11 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$5+4+3+2+1 = 15$$

$$11 \cdot 4 \cdot 3 = x^2 - x$$

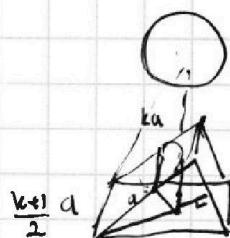
$$\frac{12}{132}$$

$$10 \quad \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x=12$$

$$x=-11$$



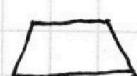
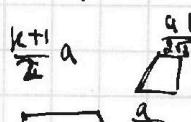
$$\frac{k+1}{2}a = H - kH$$

$$H = \frac{a}{\sqrt{3}(1-k)}$$

$$L = H - a^2$$

$$L = kH^2 - \frac{a^2}{3(1-k)^2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \rightarrow h = 2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} = tg 2$$

$$2a \quad \cdot \quad \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad \cdot \quad \frac{a}{2\sqrt{3}} = tg 2$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4}(k-1)^2 = x^2$$

$$a^2 + \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2 k^2}{4} - \frac{a^2 k}{2} = x^2$$

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{k^2 - 2k + 5}$$

