



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию A можно записать как $\overline{aaaa} \Rightarrow A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$

1) т.к

$$A \cdot B \cdot C = n^2, \quad A \cdot B \cdot C : 101, \quad 101 - \text{простое}, \quad \text{то} \quad A \cdot B \cdot C : 101^2$$

$$A : 101 \text{ но } A \not\vdash 101^2 \text{ (очевидно)}$$

$\Downarrow$

$$B \cdot C : 101, \quad C \leq 99 \Rightarrow C \not\vdash 101$$

$\Downarrow$

$$B : 101$$

$\Downarrow$

$$B = \overline{b0b}, \text{ где } b - \text{цифра}$$

т.к b записи B есть 7, то $b=7$

$$B = 707$$

$$2) \text{ т.к } A \cdot B \cdot C = n^2, \quad A \cdot B \cdot C : 11, \quad 11 - \text{простое}, \quad \text{то} \quad A \cdot B \cdot C : 11^2$$

$$A : 11 \text{ но } A \not\vdash 11^2 \text{ (очевидно, т.к } A = 11 \cdot 101 \cdot a)$$

$$B = 707 \not\vdash 11$$

$\Downarrow$

$$C : 11 \Rightarrow C = \overline{cc}, \text{ где } c - \text{цифра}$$

$$\text{из условия } c=1$$

$\Downarrow$

$$C = 11$$

$$3) \quad n^2 = 11 \cdot 707 \cdot A = 11 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a \Rightarrow a = 7$$

(a - цифра)

$\Downarrow$

$$A = 7777$$

Ответ: (7777 ; 707 ; 11)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Исходя из условия, составим уравнение:

$$1) K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

⇓

$$y+x+3=0$$

невозможно

т.к. $x > 0$

$y > 0$

или

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4(x-y) = 16$$

$$x-y = 4$$

$$\begin{aligned} 2) M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 12xy = 4(x^2 + y^2 + xy) - 12xy \\ &= 4(x^2 + y^2 - 2xy) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$

$$- \cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 2k + 1 \\ x - y = 2l + 1 \end{cases}$$

$$x - y = 1 + 2l$$

~~$x = k + l + 1$
 $y = k - l$~~

Order: $(x, 2k+1-x), k \in \mathbb{Z}$
 $(x, x-2l-1), l \in \mathbb{Z}$

b) $\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☒

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе n учеников. Тогда вероятности в начале месяца, что и Тера и Вася пойдут на концерт:

$$A = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)}$$

Пусть в конце месяца выделили x билетов:

$$A' = \frac{x}{n} \cdot \frac{(x-1)}{n-1}$$

Известно, что $A = A'$

$$\frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

$$x = 12 \quad x = -11$$

невозможно из смысла задачи

⇓

$$x = 12$$

Ответ: 12



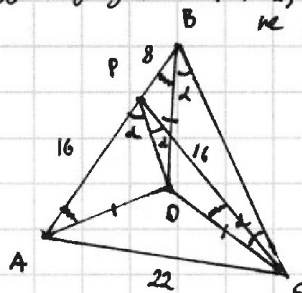
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделаем чертеж:
(не будем указывать w_1 и w_2 , чтобы не запутаться)



1. $AO = OB = OC = R(w_1) \Rightarrow \triangle BOC - p/\delta \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC = \alpha$

2. $PDCB$ - вписанный

$\Downarrow$

$\angle OCB = \angle OPA = \alpha$

$\angle CPO = \angle CBO = \alpha$

3. $\angle OCP = \angle OBP = \beta$ ($PDCB$ - вписанный)

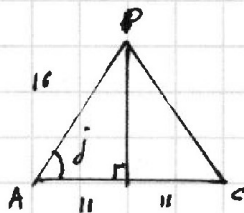
$\angle OBP = \angle BAO$ ($\triangle OBA$ - p/δ)

4. Из п. 2, 3 и OP - общая сторона, $OA = OC$

$\Downarrow$

$\triangle APO = \triangle CPO \Rightarrow AP = CP = 16$

5. $\triangle APC$ - p/δ :



$\cos j = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin j = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$

$\Downarrow$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AC \cdot \sin j =$

$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} =$

$= \frac{3 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Итак, } P_{\max} = 6\pi + 2\sqrt{2} \quad \text{при } \angle = 45^\circ$$

$$\angle = 135^\circ$$

$$\angle = 225^\circ$$

$$\angle = 315^\circ$$

~~$$\angle = 0^\circ$$~~

$$\text{Ответ: } 6\pi + 2\sqrt{2} \quad 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

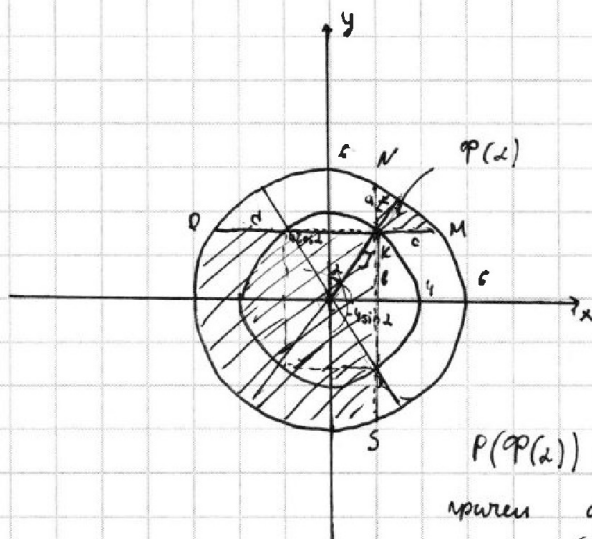
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & \text{у-е окр-ти с центром (0,0) и радиусом 6} \end{cases}$$

1) или $\begin{cases} x = -4 \sin \alpha \\ y = 4 \cos \alpha \end{cases}$, то $x^2 + y^2 = 16$ - у-е окр-ти с центром (0,0) и радиусом 6

Далее рассмотрим уже на графике

Построим график



$$\begin{aligned} d &= OK \\ a &= NK \\ c &= KM \\ b &= SK \end{aligned}$$

$$P(\varphi(\alpha)) = 6\pi + a + b + c + d$$

$$\text{нужно } ab = cd$$

$$(b-a)^2 + (d-c)^2 = 16 + 16 = 32$$

$$b^2 - 2ab + a^2 + d^2 - 2cd + c^2 = 32$$

$$b^2 - a^2 = 8 \cos \alpha$$

$$d^2 - c^2 = -8 \sin \alpha$$

$$a + b = 4 \cos \alpha$$

$$c + d = 4 \sin \alpha$$

и

$$P(\varphi(\alpha)) = 6(\pi + 4 \cos \alpha + 4 \sin \alpha)$$

откуда,

$$\text{то } P_{\max} \text{ при } \cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{т.к. } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha = 1)$$



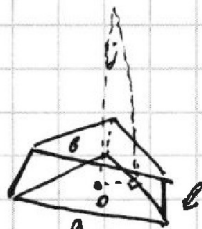
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

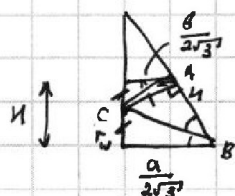
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду со сторонами основания a и b



а) Из того, что $\exists$ шар ω :
рассмотрим ~~части~~ плоскости j :



(очевидно находится для пр-ого ака)

на рис $\triangle ABC$ п/у
(т.к. сн его уны $\angle$ и β , то $2\angle + 2\beta = 180^\circ$)

$$r = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{\frac{ab}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{3}}$$

$$R_{\text{пирамиды}} = 2r = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$$

Если ℓ - боковое ребро пирамиды,

$\angle$ - искомый угол,

$$\text{то } \tan \angle = \frac{h}{a-b} = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}}{(a-b)} = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (x = \frac{\sqrt{ab}}{(a-b)})$$

б) Из того, что $\exists$ шар $\Omega \Rightarrow$ сущ. сечение Ω в

боковой грани пирамиды,

т.е. бок. гр. пир-м - описанной ч-м-к

$$2\ell = a+b \quad (\text{свойство})$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

$$4\ell^2 = 4h^2 + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$4 \frac{ab}{3} + 4a^2 + 4b^2 - 8ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$4ab + 12a^2 + 12b^2 - 24ab = 3a^2 + 3b^2 + 6ab$$

$$9a^2 + 9b^2 - 26ab = 0$$

$$9(a^2 + b^2 - 2ab) = 8ab$$

$$\frac{(a-b)^2}{ab} = \frac{8}{9} = x^2 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \angle = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$$\angle = \arctan \left(\frac{2\sqrt{6}}{9} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

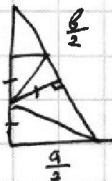
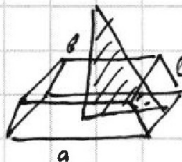
7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Докажем, что если основание пирамиды n -угольник (правильный), то для $n \geq 4$ условие не может выполняться.

а) рассмотрим $n=4$



$$r_w = \sqrt{\frac{ab}{4}} = \frac{\sqrt{ab}}{2} \quad H = \sqrt{ab}$$

аналогично
$$l = \frac{a+b}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{H}{l} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$H^2 + (a-b)^2 = l^2$$

$$4 \cdot ab + 4a^2 - 8ab + 4b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$3a^2 + 3b^2 - 6ab = 0$$

$$a - b = 0$$

⇓

уже не угловая пирамида

б, для $n \geq 5$ очевидно, условие не выполняется

Ответ: $\arctg\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

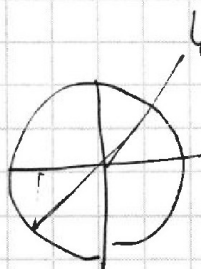


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi y = \cos \pi y \cdot 2 \cos \pi x$$

$$\operatorname{tg} \pi y = \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2}$$

$$\pi y = \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi k$$

$$\pi y = \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi k$$

$$2\pi y = \pi x - \pi y + \pi k$$

$$\pi y = \pi x + \pi k$$

$$-\cos 2y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos(2\pi y)$$



ср

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$



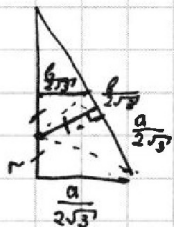
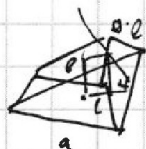
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики



$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{ab}{4 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{ab}{12}} = \frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{a-b} = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}}{\frac{a-b}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a-b} = x$$

$$2l = a+b$$

$$l = \sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

$$4h^2 + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$\frac{4ab}{3} + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$4ab + 4a^2 + 4b^2 - 8ab = 3a^2 + 3b^2 + 6ab$$

$$a^2 + b^2 - 10ab = 0$$

$$(a-b)^2 = 8ab$$

$$x^2 = \frac{ab}{(a-b)^2} = 8$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{4 \cos x (x + y \sin x)}{x + y \sin x}$$



$$\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{a}{2}$$

$$\frac{a+b}{2}$$



$$\frac{a+b}{2} > \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n(a+b)} > 2\sqrt{ab}$$



$$\frac{160 \cdot 3}{5} = 96$$

$$\sin \alpha = \frac{4 \sqrt{ab}}{a+b \cdot \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$



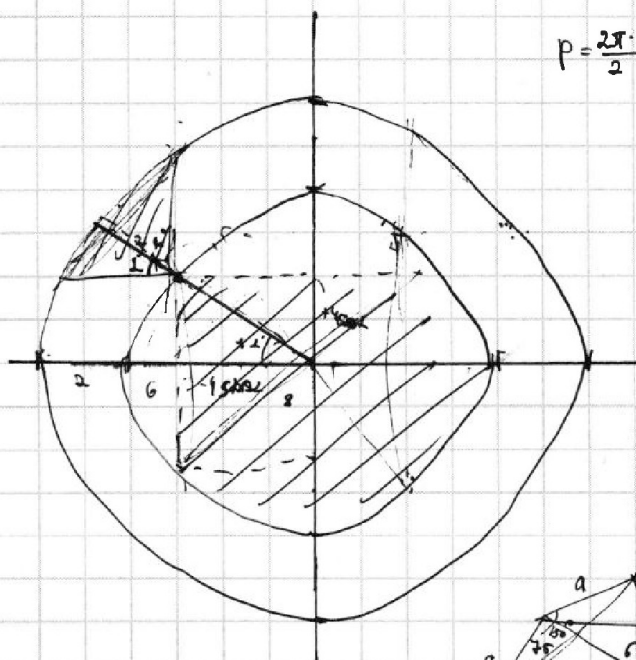
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

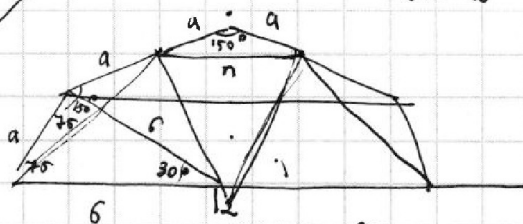
Черновик



$$p = \frac{2\pi \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{4} \cdot \frac{2}{8} \pi$$



$$\sqrt{2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$$



$$\begin{aligned} 3 - 180^\circ 180^\circ \\ 4 - 360^\circ \\ 5 - 540^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 36 \cdot 2 - 2 \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 &= 36(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

n =

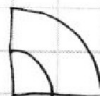
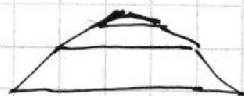
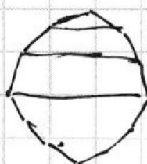
$$n^2 = a^2 \cdot 2 + 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n^2 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})36$$

no

$$\begin{aligned} \frac{180(n-2)}{30 \cdot 12} \\ \frac{180 \cdot 10}{12} \\ \frac{12}{2} = \end{aligned}$$

$$= 30 \cdot 5 = 150^\circ$$

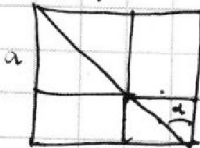


$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{2\pi \cdot 2}{4} \\ \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{2\pi \cdot 2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 &= 36 \cdot 2 - 2 \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 36(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$n = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \\ (4 + 6(2-\sqrt{3}))(\sin^2 + \cos^2) \end{aligned}$$



$$a + b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1	2	3	4	5	6	7
✓	✓		✓	✓		✓
✗	✗		✗	✗		✗

Черновики

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$- \cos 2\pi y = \cos (\pi x - \pi y)$$

$$\cos (\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - 3\pi y}{2} = 0$$

$$\pi x + \pi y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x + y = 2k + \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

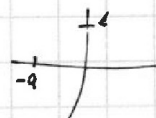


$$x = -4 \sin \alpha = 4\beta$$

$$y = 4 \cos \alpha$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

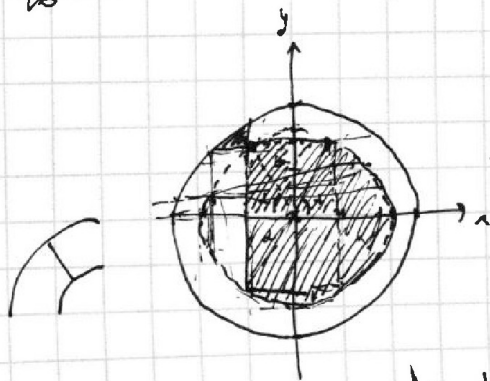
$$(x+a)(y-b) \leq 0$$



$$(x+a) \leq 0$$

$$y \geq b$$

$$xy - xb + ay - ab$$



$$\frac{2\pi \cdot 4}{360} (360 - 2\pi - 180 + 2\pi) = \frac{2\pi \cdot 4}{2} = 4\pi$$

$$2|\sin \alpha|$$



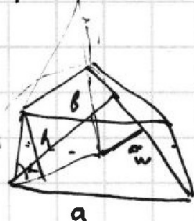
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$r_w = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(a+b)}{4\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{(a+b)}{2\sqrt{3}}$$



$$2l = a + b$$

$$l = \sqrt{h^2 + (a-b)^2}$$

$$4h^2 + 4(a-b)^2 = (a+b)^2$$

$$\frac{4(a+b)^2}{3} + 4x^2 = (a+b)^2$$

$$(4-2\sqrt{3})x^2 = \frac{2}{3}(a+b)^2$$

$$4x^2 = \frac{2}{3}(a+b)^2$$

$$4a^2 + 4b^2 - 8ab =$$

$$12a^2 + 12b^2 - 24ab = 2a^2 + 2b^2 + 4ab$$

$$10a^2 + 10b^2 - 28ab$$

$$12a^2(1-k)^2 = 2a^2(1+k)^2$$

$$6 + 6k^2 - 12k = 1 + k^2 + 2k$$

$$5k^2 - 14k + 5 = 0$$

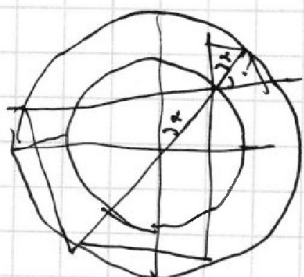
$$D = 196 - 100 =$$

$$4 = \frac{2}{3}L^2$$

$$12 = L^2$$

$$L = 2\sqrt{3} \quad \text{tg } \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

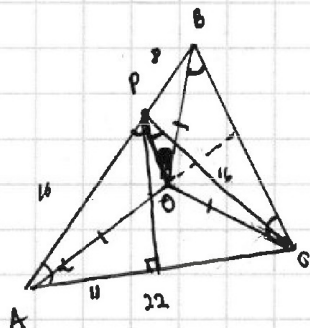
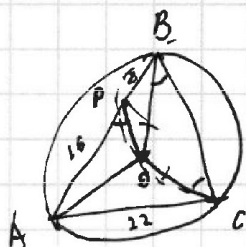
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$16 \cdot 24 = 22 \cdot 5$$



$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{16}$$

$$S = 22 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{16} = \frac{22 \cdot 9 \cdot \sqrt{5}}{4} = \frac{99\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ -121 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$5 \cdot 27 = 9 \cdot 15$$

$$\sqrt{256 - 121} = \sqrt{135} = \sqrt{5 \cdot 9 \cdot 3} = 3\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r} aaaa \\ \underline{bcd} \quad 7 \\ \underline{ef} \quad 1 \end{array}$$

$$a \cdot 1111$$

$$\rightarrow A = 1111$$

$$--- = \cdot --- = ka$$

$$1111 = 11 \cdot 101 =$$

$$A \cdot 1111$$

$$bcd \cdot ef : 11$$

$$ef : 11 \Rightarrow ef = 11$$

$$bcd : 101$$

$$707$$

$$121$$

$$1, 2, 3, 5, 7, 9,$$

$$11, 13, 17, 19,$$

$$23$$



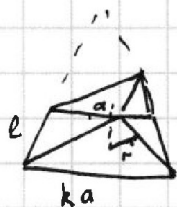
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$$r = \frac{ka\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{ka}{\sqrt{3}}$$

$$h = 2r = \frac{2ka}{\sqrt{3}} = \frac{ka}{\sqrt{3}}$$

$$kH = H = \frac{ka}{\sqrt{3}}$$

$$H = \frac{ka}{(k-1)\sqrt{3}}$$

$$l = kL - L = (k-1)L$$

$$L = a \sqrt{\frac{k^2}{(k-1)^3} + 1}$$

$$L = \sqrt{H^2 + a^2} = a \sqrt{\frac{3k^2}{(k-1)} + 1}$$

$$2l = (k+1)a$$

$$2l = ka + a$$

$$a(k+1) = 2(k-1)a \sqrt{\frac{3k^2+k-1}{(k-1)}}$$

$$a(k+1) = 2 \cdot a \cdot (k-1) \sqrt{\frac{k^2+3k-3}{3(k-1)}}$$

$$\sqrt{3}(k+1) = 2 \sqrt{(k-1)(k^2+3k-3)}$$

$$3k^2 + 6k + 3 = 4(k^3 + 3k^2 - 3k - k^2 - 3k + 3)$$

$$3k^2 + 6k + 3 = 4k^3 + 8k^2 - 24k + 12$$

$$\frac{k+1}{2} = \sqrt{(3k^2+k-1)(k-1)}$$

$$k^2 + 1 + 2k = 4(3k^3 + k^2 - k - 3k^2 - k + 1)$$

$$k^2 + 1 + 2k = 12k^3 - 8k^2 - 8k + 4$$

$$12k^3 - 9k^2 - 10k + 3 = 0$$

$$4k^3 + 5k^2 - 30k + 9 = 0$$

$$1, 3, \frac{9}{2}$$

$$9: 1, 3, 9$$

$$4: 1, 2, 4$$

$$12 \cdot 27 - 3 \cdot 27 - 30 + 3 = 9 \cdot 27 - 30 + 3 \neq 0$$

$$1, 3, 9, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}$$

$$4 \cdot 27 + 5 \cdot 9 - 90 + 9 = 120 + 28 + 45$$

$$\frac{12 \cdot 27}{8} - \frac{9 \cdot 9}{4} - \frac{30}{2} + 3 =$$

$$= \frac{6 \cdot 27}{4} - \frac{3 \cdot 27}{4} - \frac{60}{4} + 3 =$$

$$= \frac{3 \cdot 27 - 60}{4} = \frac{21}{4} + 3$$

$$\frac{4 \cdot 27}{8} + \frac{5 \cdot 9}{4} - 30 \cdot \frac{3}{2} + 9 =$$

=

$$\frac{4 \cdot 9 \cdot 9 - 9}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 9 \cdot 9}{4 \cdot 4} - \frac{30 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 4} + 9 =$$

$$= \frac{9(81 + 5 - 120)}{4 \cdot 4}$$

$$81 \cdot 14$$

$$94$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

1	2	3	4	5	6	7
✓	X	X	✓			1

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+3}{2} \quad 2) \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\cos 30^\circ = 2 \cos 15^\circ - 1$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4} x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\sin 15^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\cos 60^\circ + \cos 30^\circ =$$

$$= 2 \cos 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{4(x-y)^2}{4(x^2+y^2-2xy)} = \frac{4-16}{4} = -3$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin \pi y \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$$

$$\cos 0 + \cos 90^\circ = 1 = 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

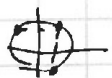
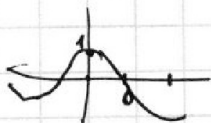
$$\cos 30^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ \cos 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(y+x)}{2} \operatorname{tg} \pi y = 1$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$= \cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi y$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi y$$



$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi y + 2\pi k \\ \pi y - \pi x = -2\pi y + 2\pi k \end{cases}$$

$$\pi y = -\pi x - 2\pi k$$

$$\theta \pi y =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi y \sin \pi x + \cos^2 \pi y + \cos \pi x \sin \pi x$$

$$- \cos^2 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos^2 2\pi y = 0$$

$$11 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n}$$

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n^2}$$

$$\frac{4}{n}$$

5

$$\frac{4}{n}$$

$$\frac{11}{4}$$

6



$$11 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$5+4+3+2+1 = 15$$

$$11 \cdot 4 \cdot 3 = x^2 - x$$

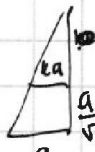
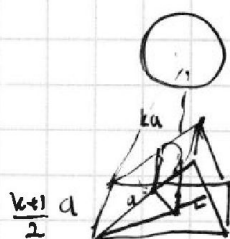
$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x = 12$$

$$x = -11$$

$$\frac{12}{132}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$



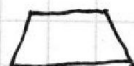
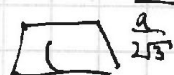
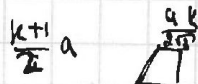
$$h = \frac{a}{\sqrt{3}} = 11 - kH$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}(1-k)}$$

$$L = U^2 - a^2 = k^2 H^2 - k^2 a^2 = \frac{a^2}{3(1-k)^2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \rightarrow h = 2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$h = 2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$$-\frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} = \tan \alpha$$

2a

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} - \frac{k}{2}$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4}(k-k)^2 = x^2$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 k^2}{4} - \frac{a^2 k}{2} = x^2$$

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{k^2 - 2k + 5}$$

