



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Пегя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть a - цифра $A = \overline{aaaa}$. $A = 101 \cdot \overline{aa} \Rightarrow A : 101$. При этом $A < 101^2 \Rightarrow A \neq 101^2$.
Так как ABC — точный квадрат, либо $B : 101$, либо $C : 101$.
 $C < 101 \Rightarrow C \neq 101$, значит $B : 101$.
Тогда $B \in \{101, 202, 303, \dots, 808, 909\}$. Так как в B есть цифра 2, $B = 202$.
Рассмотрим $A = \overline{aaaa} \cdot 11 \Rightarrow A : 11$. $B = 202 \cdot 11 \Rightarrow C : 11$.
Из чисел, которыми может быть C , а именно: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, только $33 : 11 \Rightarrow C = 33$.
Так, $B = 202$, $C = 33$. $202 \cdot 33 : 2$, $202 \cdot 33 : 3$, $202 \cdot 33 \cdot 11 : 4$, $202 \cdot 33 \cdot 11 : 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A : 2, A : 3 \Rightarrow A : 6 \Rightarrow 101 \cdot \overline{aa} : 6 \Rightarrow \overline{aa} : 6 \Rightarrow 11 \cdot \overline{a} : 6 \Rightarrow \overline{a} : 6$.
Тогда, т.к. $0 < a \leq 9$, $a = 6$.
Получили $A = 6666$, $B = 202$, $C = 33$.
Сделаем проверку: $6666 \cdot 202 \cdot 33 = 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101)^2$,
остальные условия, очевидно, выполнены.

Ответ: $\{(6666; 202; 33)\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. Из условия: $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$;

$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$. Рассмотрим две случая:

1) $x+y+2=0$. Тогда условие равносильно $\begin{cases} x+y+2=0, \\ x \notin \{0; 1\}, \\ y \notin \{-1; 0\}; \end{cases} \begin{cases} y = -x-2, \\ x \notin \{-2; -1; 0; 1\}. \end{cases}$

При таких x и y : $M = x^3 - (-x-2)^3 - 3xy(-x-2) = x^3 + (x+2)^3 + 3x(x+2) =$
 $= x^3 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 3x^2 + 6x = 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8 = f(x)$

Тогда в этом случае возможные значения M образуют множество $\bigcup_{x \notin \{-2; -1; 0; 1\}} f(x)$.

Так как $f(x)$ — кубический многочлен от x , $E_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 + 18x + 18$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Значит $f(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}$.
 $D = 9 - 12 < 0$

Тогда искомое множество $M = \mathbb{R} \setminus \{f(-2); f(-1); f(0); f(1)\} =$
 $= \mathbb{R} \setminus \{-16 + 36 - 36 + 8; -2 + 9 - 18 + 8; 8; 2 + 9 + 18 + 8\} = \mathbb{R} \setminus \{-8; -3; 8; 37\}$.

2) $x+y+2 \neq 0$. Тогда условие равносильно $\begin{cases} x \neq 0, \\ y = x-1, \\ x-1 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} y = x-1, \\ x \notin \{0; 1\}. \end{cases} \star$
 $\star$: $x+x-1+2 \neq 0$; $2x \neq -1$; $x \neq -\frac{1}{2}$. $\star \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1, \\ x \notin \{-\frac{1}{2}; 0; 1\}. \end{cases}$

В этом случае $M = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x = 1$.
 Ответно, что 1 достигается (например, при $x=2, y=1$).

Итого: $M \in \mathbb{R} \setminus \{-8; -3; 8; 37\}$.

Ответ: $\mathbb{R} \setminus \{-8; -3; 8; 37\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 3. \text{ а) } & (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x); \\
 & \sin^2(\pi x) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi x) \cos(\pi y); \\
 & (\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)) + (\cos(\pi x) \cos(\pi y) - \sin(\pi x) \sin(\pi y)) = 0; \cos(2\pi x) + \cos(\pi x + \pi y) = 0; \\
 & 2 \cdot \cos(1.5\pi x + 0.5\pi y) \cos(0.5\pi x - 0.5\pi y) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1.5\pi x + 0.5\pi y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 0.5\pi x - 0.5\pi y = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; \end{cases} \text{ далее в решении: } k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2k, \\ x - y = 1 + 2l; \end{cases} \begin{cases} y = 1 - 3x + 2k, \\ y = x - 1 - 2l. \end{cases} (*)$$

Ответ: а) $\{(x; -3x + 1 + 2k); (x; x - 1 - 2l) | k \in \mathbb{Z}\}$.

б) Из ОВЗ аркфункций: т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $x \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. ★

Докажем, что при целых x и y , уравнение, равносильное (*), равносильно тому, что x и y разной чётности.

Если x и y разной чётности, то $y - x \not\equiv 2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: y - x = -1 - 2k \Leftrightarrow y = x - 1 - 2k$.

Обратно, если $y = x - 1 - 2l$, то $y - x = -1 - 2l \not\equiv 2 \Rightarrow y$ и x разной чётности.

Таким образом, требуется найти такие целые x и y разной чётности, что $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$.

$\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$, значит $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

Значит неравенство выполняется тогда и только тогда, когда не выполняется

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}, \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi; \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{5} = 1, \\ \frac{y}{4} = -1; \end{cases} \begin{cases} x = 5, \\ y = -4. \end{cases}$$

Найдём кол-во пар таких x и y , что верно ★.

Для любого нечётного x (таких 6) найдётся 5 чётных y ; для любого чётного x (таких 5) найдётся 4 нечётных y . Значит всего пар, удовлетворяющих ★, $6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 50$. Ровно одна из них — $(5; -4)$ — не подходит. Значит искомое количество равно $50 - 1 = 49$.

Ответ б) 49.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть ординарты классиков было N . Всего есть C_N^4 способов выделить раздать 4 ординарных билета ординарты классикам. Если Пете и Ваське выдали билеты, то кол-во способов выдать остальные билеты равно C_{N-2}^2 .

$$\text{Тогда } p_1 = P(\text{Петя и Вася попали на концерт, если бы выдвали 4 билета}) = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{\frac{(N-2)!}{2!(N-4)!}}{\frac{N!}{4!(N-4)!}} = \frac{(N-2)!}{N!} \cdot \frac{4!}{2!} = 12 \cdot \frac{(N-2)!}{(N-2)! \cdot (N-1) \cdot N} = \frac{12}{N(N-1)}.$$

Когда билетов стало K , то кол-во способов раздать билеты стало C_N^K , а кол-во способов раздать билеты так, чтобы Петя и Вася получили билеты, равно C_{N-2}^{K-2} .

$$\text{Тогда } p_2 = P(\text{Петя и Вася попали на концерт}) = \frac{C_{N-2}^{K-2}}{C_N^K} = \frac{\frac{(N-2)!}{(K-2)!(N-K)!}}{\frac{N!}{K!(N-K)!}} = \frac{1}{N(N-1)} \cdot K(K-1) = \frac{K(K-1)}{N(N-1)}$$

$$\text{По условию: } p_2 = 2,5 p_1 \Rightarrow \frac{K(K-1)}{N(N-1)} = 2,5 \cdot \frac{12}{N(N-1)}; \text{ (т.к. } N \geq 2) \\ K(K-1) = 30; K \in \{-5; 6\}; K = 6. \\ K > 0$$

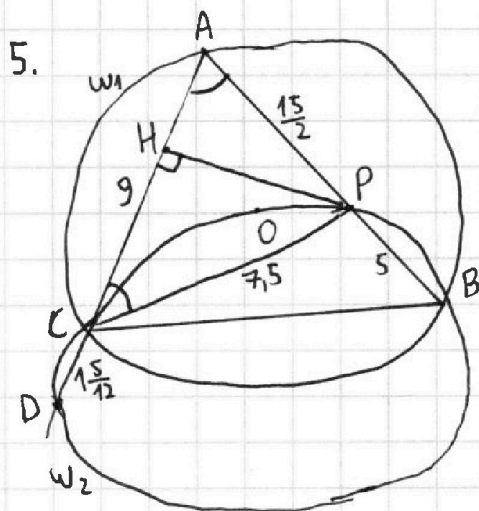
Ответ. 6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\deg_{w_2}(A) = |AB| \cdot |AP| = 12,5 \cdot 7,5 = (10^2 - 2,5^2) = 100 - 6,25 = 93,75 > |AC|^2.$$

Значит AC — секущая w_2 . Пусть D — вторая точка пересечения w_2 с (AC). Если $|AD| < |AC|$, то $|AD| \cdot |AC| < |AC|^2 < |AB| \cdot |AP|$, но $|AD| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AP|$. Значит D лежит на [AC] за точкой C.

$$|AC| \cdot |AD| = 93,75; |AD| = \frac{93,75}{9} = \frac{31,25}{3} = \frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}.$$

$$\text{Тогда } |DC| = |AD| - |AC| = 1\frac{5}{12}.$$

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{BC}_{w_1}, \widehat{CB} = \widehat{BC}_{w_1}.$$

Так как COBP — вписанный четырехугольник, то

$$\widehat{CPB} = \widehat{COB} = \widehat{BC}_{w_1} = 2\widehat{CAB}.$$

$\widehat{CPB} = \widehat{CAB} + \widehat{ACP}$ (как внешний угол в $\triangle ACP$), значит $2\widehat{CAB} = \widehat{CAB} + \widehat{ACP}$; $\widehat{CAB} = \widehat{ACP} \Rightarrow \triangle CAP \sim \triangle PAB$, $|CP| = |PA| = 7,5$.

Пусть H — проекция P на [AC]. $|AH| = \frac{1}{2} |AC| = 4,5$. Тогда $\widehat{HAP} = \arccos \frac{|AH|}{|PA|} = \arccos \frac{3}{5} = \arcsin \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Тогда } S(CAB) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12,5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45.$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

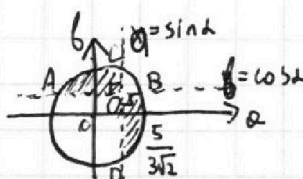
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Система уравнений
$$\begin{cases} (\frac{x}{3\sqrt{2}} - \sin \alpha)(\frac{y}{3\sqrt{2}} - \cos \alpha) \leq 0, \\ (\frac{x}{3\sqrt{2}})^2 + (\frac{y}{3\sqrt{2}})^2 \leq \frac{25}{18}. \end{cases}$$

Произведём замену $\frac{x}{3\sqrt{2}} = a$, $\frac{y}{3\sqrt{2}} = b$, и построим фигуру в плоскости ab . При этом, так как размеры уменьшатся в $3\sqrt{2}$ раз, то периметр фигуры тоже уменьшится в $6\sqrt{2}$ раз. Полученную фигуру назовём $\Phi'(a)$.

$\Phi'(a): \begin{cases} (a - \sin \alpha)(b - \cos \alpha) \leq 0, \\ a^2 + b^2 \leq \frac{25}{18}. \end{cases}$

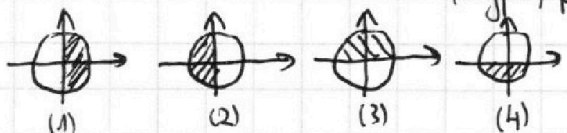
Эскизы изображим $\Phi'(a)$ при $\alpha \in \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}$:



Пусть $b = \cos \alpha$ и $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$. Прямая $b = \cos \alpha$ пересекает окружность в различных точках A и B, Алевее B, а прямая $a = \sin \alpha$ пересекает окружность в различных точках C и D, C выше D, $(AB) \cap (CD) = \emptyset$.

Тогда $\widehat{AC} = 90^\circ = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}) \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = \pi \Rightarrow |\widehat{AC}| + |\widehat{BD}| = \pi \cdot \frac{5}{3\sqrt{2}}$.

Если $\sin \alpha = 0$, то $\cos \alpha = \pm 1$, и в этих случаях сумма мер дуг окружности, принадлежащих фигуре, равна π , значит сумма их длин $\frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \pi$.



(1): $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$; (3): $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$; (2): $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$; (4): $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = -1$.

В этих четырех случаях $M = (\text{длина окружности} + \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \pi) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{5}{3\sqrt{2}} (\pi + 2) \cdot 3\sqrt{2} = 5\pi + 10$.

В случае, когда $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$, $M = \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \pi + (|AB| + |CD|) \cdot 3\sqrt{2} = 5\pi + 3\sqrt{2}(|AB| + |CD|)$.

Введем координаты точек A и B. Так как $\angle PAB = \angle PBA = \alpha$ (где $P(0; \frac{5}{3\sqrt{2}})$, $Q(0; 0)$), то $|AB| = 2 \cdot |AT| = 2|\sin \alpha|$ (где T — середина AB; $|AT| = |\sin \alpha|$, так как $\frac{|TO|}{|OA|} = |\cos \alpha|$).

Аналогично, $|CD| = 2|\cos \alpha|$.

Отсюда $M = 5\pi + 6\sqrt{2}(|\sin \alpha| + |\cos \alpha|)$.

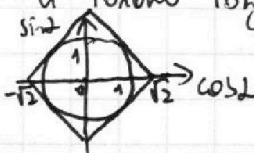
$|\sin \alpha| + |\cos \alpha| = \sqrt{2}$

получается, например, при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Так, $M = 5\pi + 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5\pi + 12$. Докажем, что $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \leq \sqrt{2}$.

Тогда будет показано, что $M_{\max} = 5\pi + 12$. $|\sin \alpha| + |\cos \alpha| = \pm(\sin \alpha \pm \cos \alpha) = \pm\sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$.

Так, $M_{\max} = 5\pi + 12$. $M_{\max}$ достигается при $(\pm \text{независимы}) |\sin \alpha| + |\cos \alpha| = \sqrt{2}$,

и только тогда. Изобразим условие на тригонометрической окружности.



$\pm\sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4}) = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha \pm \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. При таких α : $|\sin \alpha| = |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и

$|\sin \alpha| + |\cos \alpha| = \sqrt{2}$. Значит $\alpha \in \{\pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ответ: $5\pi + 12$; $\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7. Пусть усечённая пирамида n -угольная, O_A — центр верхнего основания, O_B — центр нижнего основания; $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ — верхнее основание, $B_1 B_2 \dots B_n$ — нижнее основание. Пусть a — длина стороны верхнего основания, b — длина стороны нижнего основания.

~~Пусть α — угол при вершине O_A в $\triangle O_A A_1 A_2$. Тогда $\angle A_1 O_A A_2 = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \angle O_A A_1 A_2 = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$.~~
Пусть C — проекция O_A на $[A_1 A_2]$. $|A_1 C| = |C A_2| = \frac{a}{2}$, откуда из $\triangle A_1 C O_A$: $|O_A C| = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = \rho(O_A; (A_1 A_2))$.

Аналогично, $\rho(O_B; (B_1 B_2)) = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$. Пусть D — середина $B_1 B_2$.

Шар Ω назовём каркашным. Расстояние от проекции ^{центра} этого шара на любую грань до любого ребра в этой грани одинаково, значит центр каркашного шара проектируется в центр вписанной окружности грани. Значит каждая боковая грань пирамиды — трапеция ^{описанная}. Тогда, например, для описанной трапеции $A_1 B_1 B_2 A_2$: $a + b = |A_1 B_1| + |A_2 B_2| = |A_1 B_1| \cdot 2$; $|A_1 B_1| = \frac{a+b}{2}$. Тогда из этой трапеции: $|CD| = \sqrt{|A_1 B_1|^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2} = \sqrt{4ab} = \sqrt{ab}$.

Сделаем рисунок в плоскости (CDO_1) : $|O_1 O_2| = \sqrt{|CD|^2 - (|DO_2| - |CO_1|)^2} = \sqrt{ab - \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n} (b^2 - a^2)}$.

Пусть I — центр вписанного шара. Тогда I — середина $O_1 O_2$. Пусть w касается $A_1 B_1 B_2 A_2$ в точке F ($F \in [CD]$). Тогда $|DF| = |DO_2|$, $|FC| = |CO_1|$, как касательные к шару. Отсюда $|CD| = |CO_1| + |DO_2|$. (*)

$|O_1 O_2| = \sqrt{4|CO_1||DO_2|}$ (*): $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$; $2\sqrt{ab} = (a+b) \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$; $4ab = (a^2 + 2ab + b^2) \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}$. (*) $= 2 \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = |CD| \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$. Пусть G — проекция C на (DO_2) . $\widehat{DCG} = \alpha \cos \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow \widehat{CDG} = \alpha \sin \frac{180^\circ}{n} = \angle(A_1 B_1 B_2; (A_1 A_2 A_3))$.

При проектировании на нижнее основание боковая поверхность перейдёт в дополнение проекции верхнего основания на нижнее основание до нижнего основания.

При этом $S_{\text{бок. пов.}} \cdot \cos \widehat{CDG} = S_{\text{проект. док. пов.}} = S_B - S_A$, где S_B — площадь нижнего основания, S_A — площадь верхнего основания.

$S_A = \frac{n}{2} \cdot a \cdot \rho(O_A; (A_1 A_2)) = \frac{n}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$. $S_B = \frac{nb^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

$|O_1 O_2|^2 = ab - \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n} (b^2 - a^2) = |CD|^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n} = ab \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}$.

$S_{\text{бок. пов.}} = n \cdot |CD| \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} \cdot n$.

$\frac{a+b}{2} \sqrt{ab} \cdot n \cdot \cos \widehat{CDG} = \frac{n}{4} (b-a)(b+a) \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$; $2\sqrt{ab} \cos \widehat{CDG} = (b-a) \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \quad | : b, \sqrt{\frac{a}{b}} = t$.

$2t^2 \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}} = (1 - t^2) \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$; $\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \cdot t^2 + 2t^2 \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}} - \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = 0$; $(t > 0)$ $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{180^\circ}{n}} = \frac{1 - t^2}{2t^2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

$a = bt^2$. $S_{\text{бок. пов.}} = \frac{(bt^2 + b)}{2} \cdot bt \cdot n$; $\left(\frac{b(t^2 + 1)}{2} \cdot bt \cdot n \right) \cdot \left(\frac{1 - t^2}{2t^2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \right) = \frac{nb^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} - \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

(*) $\left(\frac{t^2 + 1}{2} \cdot tn \right) \cdot \left(\frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \right) = \left(\frac{2t(t^2 + 1)}{4} \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{nb^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} - \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

$\frac{t^2 + 1}{2} \cdot tn \cdot \frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{2t(t^2 + 1)}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{nb^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} - \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

$\equiv 2 \cdot (\sqrt{-\beta^2 \beta + 1} - \sqrt{1 - \beta^2}) \cdot (-2\beta^2 \beta + 3 - 2\sqrt{(1 - \beta^2)(-\beta^2 \beta + 1)}) : \beta$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

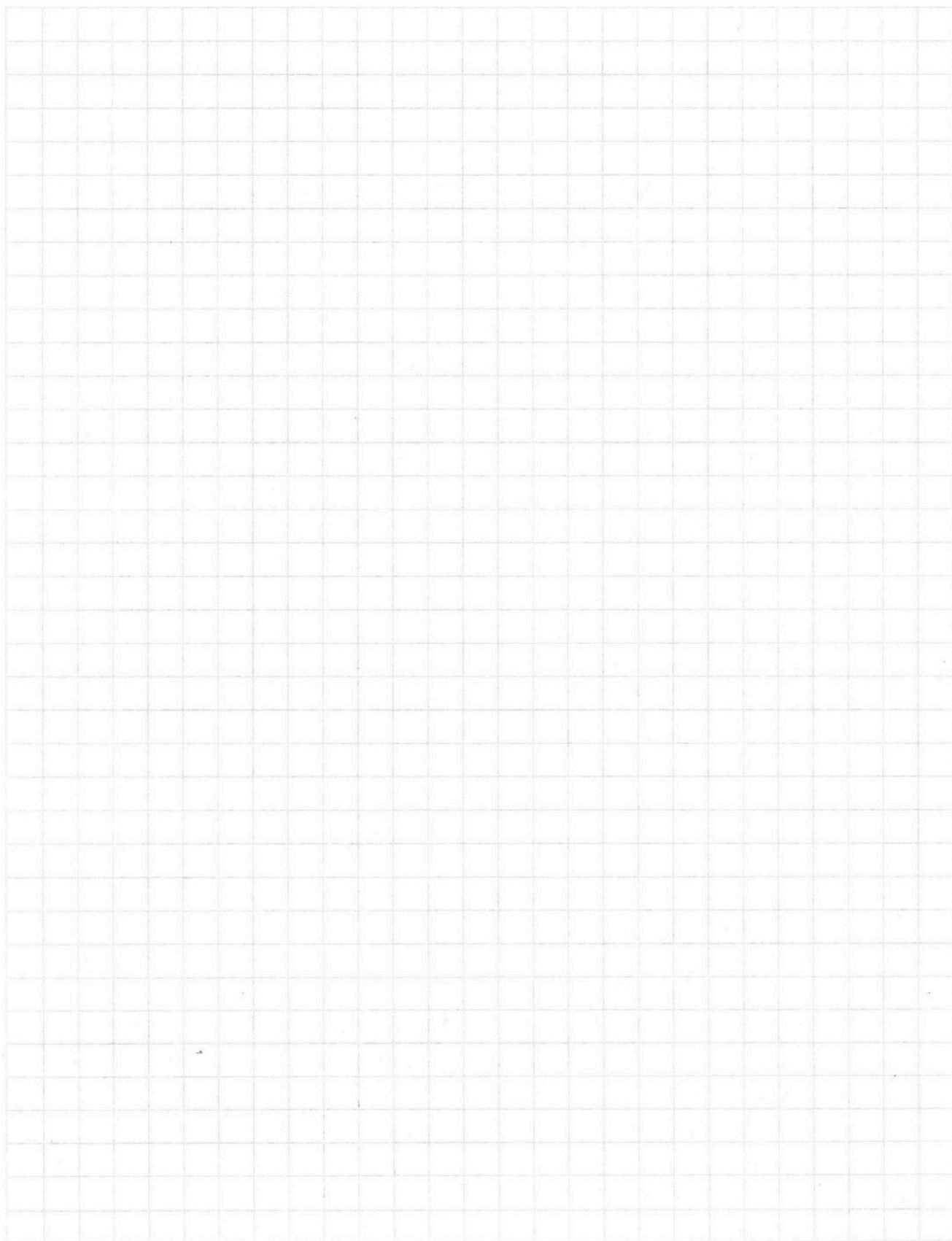
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

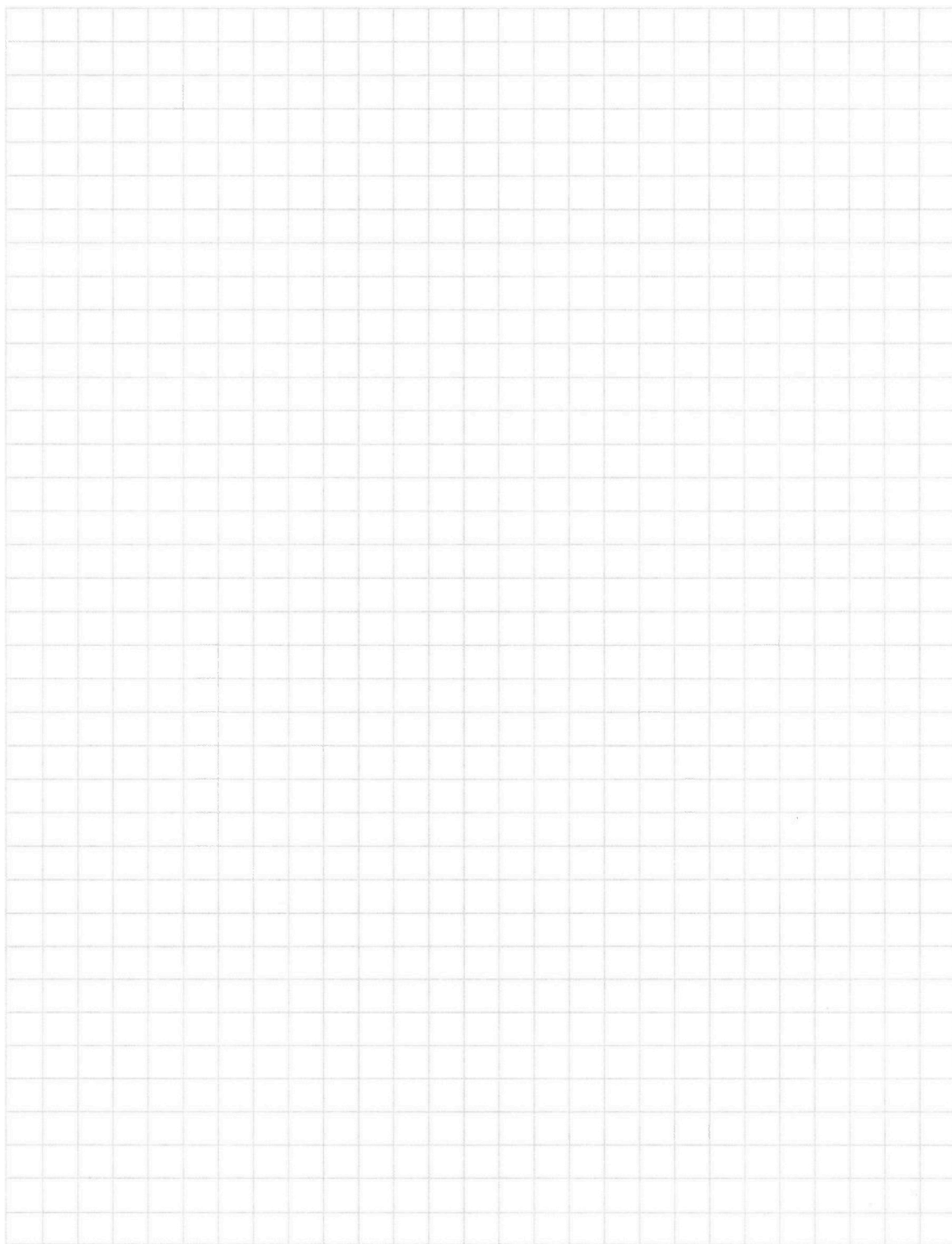
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

