МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - $A$ — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - $B$ — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - $C$ — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа $x$ и $y$ таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если $x$ уменьшить на 1, а $y$ — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел $(x, y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка $O$ — центр окружности $\omega_1$, описанной около остроугольного треугольника $ABC$. Окружность $\omega_2$, описанная около треугольника $BOC$, пересекает отрезок $AB$ в точке $P$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение $M$ периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения $\alpha$, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар $\Omega$ касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар $\omega$ касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть ~~a~~ $A=\overline{aaaa}$ ($a$ — цифра). $A=101\cdot\overline{aa} \Rightarrow A \vdots 101$. При этом $A<101^2 \Rightarrow A \not\vdots 101^2$.

Так как $ABC$ — точный квадрат, либо $B \vdots 101$, либо $C \vdots 101$.

$C<101 \Rightarrow C \not\vdots 101$, значит $B \vdots 101$.

Тогда $B\in\{101; 202; 303; \ldots; 808; 909\}$. Так как в $B$ есть цифра 2, $B=202$.

~~Рассмотрим~~ $A=\overline{aaa}\cdot 11 \Rightarrow A \vdots 11$. $B=202 \not\vdots 11 \Rightarrow C \vdots 11$.

Из чисел, которыми может быть $C$, а именно: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, только $33 \vdots 11 \Rightarrow C=33$.

Так, $B=202$, $C=33$. $202\cdot33 \vdots 2$, $202\cdot 33 \vdots 3$, $202\cdot33 \not\vdots 4$, $202\cdot 33 \not\vdots 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \vdots 2$, $A \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 6 \Rightarrow \underset{(101;6)=1}{101\cdot\overline{aa} \vdots 6} \Rightarrow \overline{aa} \vdots 6 \Rightarrow \underset{(11;6)=1}{11\cdot\overline{a} \vdots 6} \Rightarrow \overline{a} \vdots 6$.

Тогда, т.к. $0<a\le 9$, $a=6$.

Получили $A=6666$, $B=202$, $C=33$.

Сделаем проверку: $6666\cdot202\cdot33=101\cdot2\cdot3\cdot11\cdot101\cdot2\cdot3\cdot11=(2\cdot3\cdot11\cdot101)^2$, остальные условия, очевидно, выполнены.

Ответ: $\{(6666; 202; 33)\}$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |





2. Из условия: $K=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}$;

$\frac{x+y+2}{xy}=\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$. Рассмотрим два случая:

1) $x+y+2=0$. Тогда условие равносильно $\begin{cases}x+y+2=0,\\ x\notin\{0;1\},\\ y\notin\{-1;0\};\end{cases}$ $\begin{cases}x+y+2=0,\\ x\notin\{0;1\},\\ -2-x\notin\{-1;0\};\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+2=0,\\ x\notin\{0;1\},\\ x\notin\{-2;-1\};\end{cases}$ $\begin{cases}y=-x-2,\\ x\notin\{-2;-1;0;1\}.\end{cases}$

При таких $x$ и $y$: $M=x^3-(-x-2)^3-3x\cancel{y}(-x-2)=x^3+(x+2)^3+3x(x+2)=$
$=x^3+x^3+6x^2+12x+8+3x^2+6x=2x^3+9x^2+18x+8=f(x)$

Тогда в этом случае возможные значения $M$ образуют множество $\bigcup\limits_{x\notin\{-2;-1;0;1\}} f(x)$.

Так как $f(x)$ — кубический многочлен от $x$, $E_f=\mathbb{R}$.
$f'(x)=6x^2+18x+18$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+3x+3=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$. Значит $f(x)\uparrow$ на $\mathbb{R}$.
$D=9-12<0$

Тогда искомое множество $M=\mathbb{R}\setminus\{f(-2);f(-1);f(0);f(1)\}=$
$=\mathbb{R}\setminus\{-16+36-36+8;-2+9-18+8;8;2+9+18+8\}=\mathbb{R}\setminus\{-8;-3;8;37\}$.

2) $x+y+2\neq0$ $(*)$. Тогда условие равносильно $\begin{cases}x\neq0,\\ y\neq0,\\ xy=xy+x-y-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq0,\\ y\neq0,\\ x-y-1=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x\neq0,\\ y=x-1,\\ x-1\neq0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=x-1,\\ x\notin\{0;1\}.\end{cases}$ ☆

$(*)$: $x+x-1+2\neq0$; $2x\neq-1$; $x\neq-\frac{1}{2}$.   ☆ $\Leftrightarrow \begin{cases}y=x-1,\\ x\notin\{-\frac{1}{2};0;1\}.\end{cases}$

В этом случае $M=x^3-(x-1)^3-3x(x-1)=x^3-(x^3-3x^2+3x-1)-3x^2+3x=1$.
Очевидно, что 1 достигается (например, при $x=2, y=1$).

Итого: $M\in\mathbb{R}\setminus\{-8;-3;8;37\}$.

<u>Ответ:</u> $\mathbb{R}\setminus\{-8;-3;8;37\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. а) $(\sin(\pi x)+\sin(\pi y))\sin(\pi x)=(\cos(\pi x)+\cos(\pi y))\cos(\pi x);$

$\sin^2(\pi x)+\sin(\pi x)\sin(\pi y)=\cos^2(\pi x)+\cos(\pi x)\cos(\pi y);$

$(\cos^2(\pi x)-\sin^2(\pi x))+(\cos(\pi x)\cos(\pi y)-\sin(\pi x)\sin(\pi y))=0;\ \cos(2\pi x)+\cos(\pi x+\pi y)=0;$

$2\cdot\cos(1{,}5\pi x+0{,}5\pi y)\cos(0{,}5\pi x-0{,}5\pi y)=0;$

$\left[\begin{array}{l}1{,}5\pi x+0{,}5\pi y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ 0{,}5\pi x-0{,}5\pi y=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$ (далее в решении: $k,l\in\mathbb{Z}$)

$\left[\begin{array}{l}3x+y=1+2k,\\ x-y=1+2l;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}y=1-3x+2k,\\ y=x-1-2l.\end{array}\right.$ (*)

Ответ: а) $\{(x;-3x+1+2k);(x;x-1+2k)\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

б) Из ОДЗ аркфункций: т.к. $x,y\in\mathbb{Z}$, то $x\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$, $y\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$. ☆

Докажем, что при целых $x$ и $y$, уравнение, равносильное (*), равносильно тому, что $x$ и $y$ разной чётности.

Если $x$ и $y$ разной чётности, то $y-x\not\vdots\,2 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}:\ y-x=-1-2k \Leftrightarrow y=x-1-2k$.

Обратно, если $y=x-1-2l$, то $y-x=-1-2l\not\vdots\,2 \Rightarrow y$ и $x$ разной чётности.

Таким образом, требуется найти такие целые $x$ и $y$ разной чётности, что $\arcsin\frac{x}{5}+\arccos\frac{y}{4}<\frac{3\pi}{2}$.

$\arcsin\frac{x}{5}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arccos\frac{y}{4}\in[0;\pi]$, значит $\arcsin\frac{x}{5}+\arccos\frac{y}{4}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$.

Значит неравенство выполняется тогда и только тогда, когда <u>не</u> выполняется

$\begin{cases}\arcsin\frac{x}{5}=\frac{\pi}{2},\\ \arccos\frac{y}{4}=\pi;\end{cases}\ \begin{cases}\frac{x}{5}=1,\\ \frac{y}{4}=-1;\end{cases}\ \begin{cases}x=5,\\ y=-4.\end{cases}$

Найдём кол-во пар таких $x$ и $y$, что верно ☆.

Для любого нечётного $x$ (таких 6) найдётся 5 четных $y$; для любого чётного $x$ (таких 5) найдётся 4 нечётных $y$. Значит всего пар, удовлетворяющих ☆, $6\cdot5+5\cdot4=50$. Ровно одна из них — $(5;-4)$ — не подходит.

Значит искомое количество равно $50-1=49$.

Ответ б) 49.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть одиннадцатиклассников было $N$. Всего есть $C_N^4$ способов ~~выдавать~~ раздать 4 одинаковых билета одиннадцатиклассникам. Если Пете и Васе выдали билеты, то кол-во способов выдать остальные билеты равно $C_{N-2}^2$.

Тогда $p_1 = p$(Петя и Вася попали на концерт, если бы выдавали 4 билета) $=$

$$= \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{\frac{(N-2)!}{2!(N-4)!}}{\frac{N!}{4!(N-4)!}} = \frac{(N-2)!}{N!} \cdot \frac{4!}{2!} = 12 \cdot \frac{(N-2)!}{(N-2)!\cdot(N-1)\cdot N} = \frac{12}{N(N-1)}.$$

Когда билетов стало $K$, то кол-во способов раздать билеты стало $C_N^K$, а кол-во способов раздать билеты так, чтобы Пете и Васе достались билеты, равно $C_{N-2}^{K-2}$.

Тогда $p_2 = p$(Петя и Вася попали на концерт) $= \frac{C_{N-2}^{K-2}}{C_N^K} = \frac{\frac{(N-2)!}{(K-2)!(N-K)!}}{\frac{N!}{K!(N-K)!}} = \frac{1}{N(N-1)} \cdot K(K-1) =$

$$= \frac{K(K-1)}{N(N-1)}$$

По условию: $p_2 = 2{,}5p_1 \Rightarrow \frac{K(K-1)}{N(N-1)} = 2{,}5 \cdot \frac{12}{N(N-1)}$; (т.к. $N \geqslant 2$)

$K(K-1) = 30$; $K \in \{-5; 6\}$; $\underset{K>0}{K=6}$.

<u>Ответ:</u> 6.

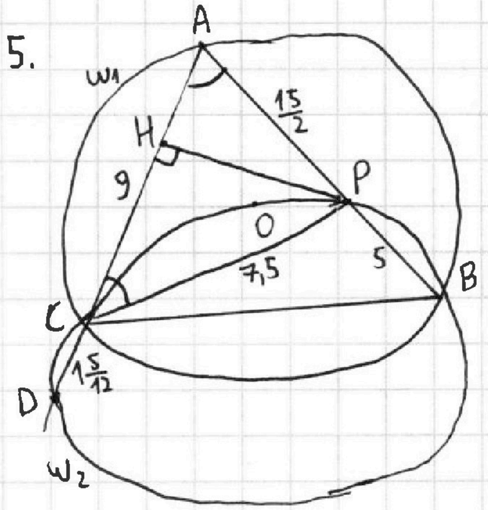
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5.




$\text{deg}_{w_2}(A) = |AB|\cdot|AP| = 12{,}5\cdot 7{,}5 = (10^2-2{,}5^2) = 100 - 6{,}25 = 93{,}75 > |AC|^2$.

Значит $AC$ — секущая $w_2$. Пусть $D$ — вторая точка пересечения $w_2$ с $(AC)$. Если $|AD|<|AC|$, то $|AD|\cdot|AC|<|AC|^2<|AB|\cdot|AP|$, но $|AD|\cdot|AC| = |AB|\cdot|AP|$. Значит $D$ лежит на $[AC)$ за точкой $C$.

$|AC|\cdot|AD| = 93{,}75$; $|AD| = \frac{93{,}75}{9} = \frac{31{,}25}{3} = \frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$.

Тогда $|DC| = |AD|-|AC| = 1\frac{5}{12}$.

$\widehat{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}_{w_1}$, $\widehat{COB} = \overline{BC}_{w_1}$.

Так как $COPB$ — вписанный четырехугольник, ~~то~~ $\widehat{CPB} = \widehat{COB} = \overline{BC}_{w_1} = 2\widehat{CAB}$.

$\widehat{CPB} = \widehat{CAB} + \widehat{ACP}$ (как внешний угол в $\Delta ACP$), значит $2\widehat{CAB} = \widehat{CAB} + \widehat{ACP}$; $\widehat{CAB} = \widehat{ACP} \Rightarrow \Delta CAP$ — р/б, $|CP| = |PA| = 7{,}5$.

Пусть $H$ — проекция $P$ на $[AC]$. $|AH| = \frac{1}{2}|AC| = 4{,}5$. ~~По~~ Тогда $\widehat{HAP} = \arccos\frac{|AH|}{|PA|} = \arccos\frac{3}{5} = \arcsin\frac{4}{5} \Rightarrow \sin\widehat{A} = \frac{4}{5}$.

Тогда $S(CAB) = \frac{1}{2}\cdot|AC||AB|\cdot\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12{,}5\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10 = 45$.

Ответ: 45.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

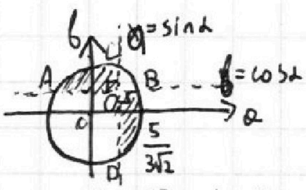
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. Система равносильна $\begin{cases} \left(\frac{x}{3\sqrt2}-\sin\alpha\right)\left(\frac{y}{3\sqrt2}-\cos\alpha\right)\le 0, \\ \left(\frac{x}{3\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{y}{3\sqrt2}\right)^2\le\frac{25}{18}. \end{cases}$

Произведём замену $\frac{x}{3\sqrt2}=a$, $\frac{y}{3\sqrt2}=b$, и построим фигуру в плоскости $aOb$. При этом, так как все размеры уменьшатся в $3\sqrt2$ раз, то периметр фигуры тоже уменьшится в $3\sqrt2$ раз. Полученную фигуру назовём $\Phi'(\alpha)$.

$\Phi'(\alpha): \begin{cases} (a-\sin\alpha)(b-\cos\alpha)\le 0, \\ a^2+b^2\le\frac{25}{18}. \end{cases}$ ~~Найдём м~~

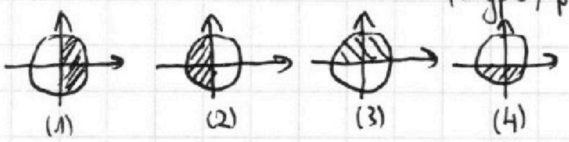
Эскизно изобразим $\Phi'(\alpha)$ при $\alpha\notin\{\frac{\pi k}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$: и $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$.




Пусть ~~$b=\cos\alpha$~~ $b=\cos\alpha$ пересекает окружность в различных точках A и B, A левее B, а прямая ~~$a=\sin\alpha$~~ $a=\sin\alpha$ пересекает окружность в различных точках C и D, C выше D, $(AB)\cap(CD)=O$.

Тогда $\widehat{AOC}=90^\circ=\frac12(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}) \Rightarrow \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\pi \Rightarrow |\overset{\frown}{AC}|+|\overset{\frown}{BD}|=\pi\cdot\frac{5}{3\sqrt2}$.

Если $\sin\alpha=0$ $(\cos\alpha=0)$, то $\cos\alpha=\pm1$ $(\sin\alpha=\pm1)$, и в этих случаях (см. рисунки далее) сумма мер дуг окружности, принадлежащих фигуре, равна $\pi$, значит сумма их длин — $\frac{5}{3\sqrt2}\cdot\pi$.




(1): $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=1$. ; (3): $\cos\alpha=0$, $\sin\alpha=1$ ;
(2): $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=-1$. ; (4): $\cos\alpha=0$, $\sin\alpha=-1$.

В этих четырех случаях $\mathcal{U}=\left(d_{\text{окружности}}+\frac{5}{3\sqrt2}\cdot\pi\right)\cdot3\sqrt2=\frac{5}{3\sqrt2}(\pi+2)\cdot3\sqrt2=5\pi+10$.

В случае, когда $\sin\alpha\cos\alpha\ne0$, $\mathcal{U}=\left(\frac{5}{3\sqrt2}\cdot\pi+|AB|+|CD|\right)\cdot3\sqrt2=5\pi+3\sqrt2(|AB|+|CD|)$.

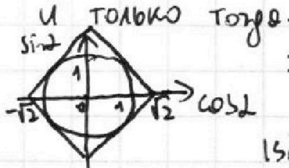
~~[illegible]~~ Так как для точек A и B $\cos\widehat{PQB}=\cos\widehat{PQA}=\cos\alpha$ (где $P(0;\frac{5}{3\sqrt2})$, $Q(0;0)$), то $|AB|=2\cdot|AT|=2|\sin\alpha|$ (где T — середина AB; $|AT|=|\sin\alpha|$, так как $\frac{|TO|}{|OA|}=|\cos\alpha|$).

Аналогично, $|CD|=2|\cos\alpha|$.

Отсюда $\mathcal{U}=5\pi+6\sqrt2(|\sin\alpha|+|\cos\alpha|)$. $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=\sqrt2$

~~[illegible]~~ достигается, например, при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Так, $\mathcal{U}_{\max}\ge5\pi+6\sqrt2\cdot\sqrt2=5\pi+12$. Докажем, что $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\le\sqrt2$. Тогда будет доказано, что $\mathcal{U}_{\max}=5\pi+12$. $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=\pm(\sin\alpha\pm\cos\alpha)=\pm\sqrt2\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{4})\le\sqrt2$. (± независимы)

Так, $\mathcal{U}_{\max}=5\pi+12$. $\mathcal{U}_{\max}$ достигается при $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=\sqrt2$, и только тогда. Изобразим условие на тригонометрической окружности.




$\pm\sqrt2\sin(x\pm\frac{\pi}{4})=\sqrt2 \Leftrightarrow \sin(x\pm\frac{\pi}{4})=\pm1 \Leftrightarrow x\pm\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;

$x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. При таких $x$: $|\sin x|=|\cos x|=\frac{\sqrt2}{2}$, и $|\sin x|+|\cos x|=\frac{\sqrt2}{1}$. Значит $\alpha\in\{\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k|k\in\mathbb{Z}\}=\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$.

Ответ: $5\pi+12$; $\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7. Пусть усечённая пирамида $n$-угольная, $O_A$ — центр верхнего основания, $O_B$ — центр нижнего основания; $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — верхнее основание, $B_1B_2\ldots B_n$ — нижнее основание. Пусть $a$ — длина стороны верхнего основания, $b$ — длина стороны нижнего основания.

$\widehat{A_1O_AA_2} = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \widehat{O_AA_2A_1} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$.

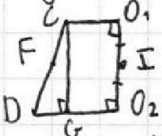
Пусть $C$ — проекция $O_A$ на $[A_1A_2]$. $|A_1C| = |CA_2| = \frac{a}{2}$, откуда из $\triangle CA_2O_A$: $|O_AC| = \frac{a}{2}\operatorname{tg}(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}) = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \rho(O_A;(A_1A_2))$.

Аналогично, $\rho(O_B;(B_1B_2)) = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Пусть $D$ — середина $B_1B_2$.

Шар $\Omega$ назовём каркасным. Расстояние от проекции центра этого шара на любую грань до любого ребра в этой грани одинаково, значит центр каркасного шара проектируется в центр вписанной окружности грани. Значит каждая боковая грань пирамиды — трапеция описанная. Тогда, например, для описанной трапеции $A_1B_1B_2A_2$: $a+b = |A_1B_1| + |A_2B_2| = |A_1B_1|\cdot 2$; $|A_1B_1| = \frac{a+b}{2}$.

Тогда из этой трапеции: $|CD| = \sqrt{|A_1B_1|^2 - (\frac{b-a}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4ab} = \sqrt{ab}$.

Сделаем рисунок в плоскости $(CDO_1)$: $|O_1O_2| = \sqrt{|CD|^2 - (|DO_2| - |CO_1|)^2} = \sqrt{ab - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}(b^2-a^2)}$.




Пусть $I$ — центр вписанного шара. Тогда $I$ — середина $O_1O_2$. Пусть $\omega$ касается $A_1B_1B_2A_2$ в точке $F$ ($F \in [CD]$). Тогда $|DF| = |DO_2|$, $|FC| = |CO_1|$, как касательные к шару. Отсюда $|CD| = |CO_1| + |DO_2|$. (*)

$|O_1O_2| = \sqrt{4|CO_1||DO_2|}$ ⊛ (*): $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $2\sqrt{ab} = (a+b)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$;

$4ab = (a^2+2ab+b^2)\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}$. ⊛ $= 2\sqrt{\frac{ab}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}} = |CD|\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}$. Пусть $G$ — проекция $C$ на $(DO_2)$.

$\widehat{DCG} = \arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \widehat{CDG} = \arcsin\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}} = \angle((A_1B_1B_2);(A_1A_2A_3))$

При проектировании на нижнее основание боковая поверхность перейдёт в дополнение проекции верхнего основания на нижнее основание до нижнего основания.

При этом $S_{бок.пов.}\cdot\cos\widehat{CDG} = S_{проекц.бок.пов.} = S_B - S_A$, где $S_B$ — площадь нижнего основания, $S_A$ — площадь верхнего основания.

$S_A = \frac{n}{2}\cdot a\cdot\rho(O_A;(A_1A_2)) = \frac{n}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. $S_B = \frac{nb^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

$\boxed{*}$ $\cdot\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}$

$\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \beta$.

$|O_1O_2|^2 = ab - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}(b^2-a^2) = |CD|^2\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} = ab\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}$.

$S_{бок.пов.} = n\cdot|CD|\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}\sqrt{ab}\cdot n$.

$\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}\cdot n\cdot\cos\widehat{CDG} = \frac{n}{4}(b-a)(b+a)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $2\sqrt{ab}\cos\widehat{CDG} = (b-a)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$ $\quad |:b$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = t$.

$2t\cdot\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}} = (1-t^2)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot t^2 + 2t\cdot\boxed{*} - \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = 0$; $(t>0)$ $\Rightarrow t = \sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}} + \sqrt{-\beta^2+\beta+1}$.

$a = bt^2$. $S_{бок.пов}:S_B = (\frac{bt^2+b}{2}\cdot bt\cdot n):(\frac{nb^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n})$ ⊜ $\frac{D}{4} = 1-\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}+\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$

⊜ $(\frac{t^2+1}{2}\cdot tn):(\frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n})$ ⊜ $(2t(t^2+1)):\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$

⊜ $2\cdot(\sqrt{-\beta^2+\beta+1}-\sqrt{1-\beta^2})(-2\beta^2+\beta+3-2\sqrt{(1-\beta^2)(-\beta^2+\beta+1)}):\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!