



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = -(\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$] A = \overline{aaaa} = 11 \cdot 101 \cdot a, \text{ где } a - \text{ненулевая цифра}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ABC-квадрат, т.к. } 11 \cdot 101 \cdot a \cdot BC = k^2, k \in \mathbb{N} \\ A: \end{array} \right.$$

$$\text{Сл-ко } abc : 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = b \cdot 101, b \in \mathbb{N}$$

a-цифра,  
c-двузнач.

т.к. B-трёхзнач., то b \leq 9,  
т.е. B = b0b.

Тогда B = 101, т.к. шестисл

$$11 \cdot 101a \cdot 101 \cdot c = k^2, k \in \mathbb{N}$$

$$ac : 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 11 \cdot c \Rightarrow C = \overline{cc} \Rightarrow C = 55$$

a-цифра

E-двузнач. есть цифра 5

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 11 = k^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a : 5 \Rightarrow a = 5$$

a-цифра

т.о.

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 5555 \\ B = 101 \end{array} \right.$$

— ед-тое решение (проверка, т.к.  $5555 \cdot 101 \cdot 55 = (5555)^2$ )

Ответ:  $\{(5555; 101; 55)\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0 \quad n2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad x, y > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 9 = 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + y$$

$$\text{Тогда } x^3 - y^3 - 9xy = (3+y)^3 - y^3 - 9(3+y)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 27y - 9y^2 =$$

= 27. Это значит, достигаемый, например, при  $x=4$  и  $y=1$ .

(шардем из  
раб-кож пережоров)

Ответ:  $\{27\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3

$$\begin{aligned}
 a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x = \\
 &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \\ -\sin \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \pi x + \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}(x-y) + \pi x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \\ \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2k+1 \\ 3x-y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ:  ~~$\{(x; 2k+1-x) | x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}\}$~~   $\cup \{(x; 3x-2k-1) | x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned}
 b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} &< 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \\ \arccos x \leq \pi, \text{ араб. до } 0 \\ \arccos y \leq \pi, \text{ араб. до } 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

возможно,  
так как

Заметим, что при  $x, y \in \mathbb{Z}$ :  $x+y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x+y = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$   
это же условие можно сформулировать так  $x$  и  $y$  имеют разную четность.

$$x:2 \wedge y:2 : 518 = 50$$

$$\text{пари. на } \begin{cases} \text{один} \\ \text{две} \end{cases} \text{ четн. чисел}$$

$$x:2 \wedge y:2 : 4 \cdot 9 = 36$$

$$\begin{cases} (\pm 2; \pm 2) \\ (\pm 4; \pm 4) \end{cases} \quad (\pm 3; \pm 3)$$

$x^2 + y^2 = 36$  - достаточн. для

$$50 + 36 - 1 = 85$$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

] всего  $n$  учеников, а в конце месяца стало виденено  $4+k$  баллов.

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{\binom{n-2}{k+2}}{\binom{n}{4}} = \frac{\binom{n-2}{k+2}}{\binom{n}{k+4}} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!}}{\frac{(n-4)!(n-4)!}{(k+4)!(n-k-4)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-4)!}}{\frac{(n-4)!(n-4)!}{(k+4)!(n-k-4)!}} \quad (\Leftarrow)$$

Вер-ть в начале  
месяца

Вер-ть  
в конце  
месяца

(школьно способом  
распред. баллов,  
если уже готовы  
Потом и все делают  
на кол-во вид  
способом)

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{(k+4)!}{(k+2)!} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \cdot 4^2 \cdot 3 = (k+4)(k+3) \quad (\Leftarrow)$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 7k + 12 = 42 \Leftrightarrow k^2 + 7k - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -10 \end{cases} \quad \begin{matrix} k \geq 0 \\ \Leftrightarrow k = 3 \end{matrix}$$

$$k+4 = 7$$

Ответ: 7 баллов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.





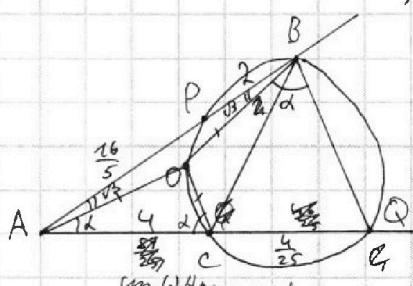







СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N 5

второе

] $Q$  - пересек  $w_2$  с  $AC$  (если его нет, то).

$$AB \cdot AP = AC^2 \Rightarrow \frac{26}{5} \cdot \frac{16}{5} = 4^2$$

см. (1) А  
аналогич

(?)

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$AB = AP + BP = \frac{26}{5}$$

$$\text{см. (1) Аналогич} \quad AQ \cdot AC = AP \cdot AB \Rightarrow AQ = \frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}}{4} = \frac{104}{25} > 4 \quad \text{т.е. } Q \text{ наружу } AC \text{ за } G.C.$$

$$QC = |AC - AQ| = \left|4 - \frac{104}{25}\right| = \frac{48}{25} = \frac{4}{5}$$

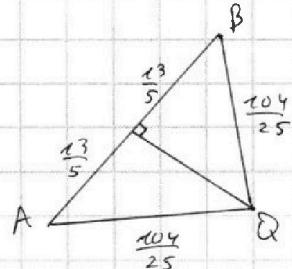
по условию

$$\text{О-чентр } w_1 \Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow \begin{cases} \angle BAO = \angle ABO = \beta \\ \angle CAO = \angle ACO = \alpha \end{cases} \quad \text{также обозначим}$$

$$BQOC - \text{бисс.} \Rightarrow \angle DBQ = \angle ACO = \alpha$$

$$\text{Тогда } \angle BAQ = \beta + \alpha = \angle ABQ \Rightarrow AQ = BQ$$

$$\begin{aligned} S_{ABQ} &= \frac{AB \cdot \sqrt{AQ^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{26}{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{104}{25}\right)^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2}}{2} = \\ &= \frac{\frac{13}{125} \sqrt{104^2 - 65^2}}{2} = \frac{\frac{13}{125} \sqrt{169 \cdot 49}}{2} = \frac{13 \cdot 49}{125} \end{aligned}$$



$$S_{ABC} = \frac{S_{ABQ} \cdot AC}{AQ} = \frac{\frac{13 \cdot 49}{125} \cdot 4}{\frac{104}{25}} = \frac{\left(\frac{13 \cdot 49}{5 \cdot 25}\right) \cdot 4}{\left(\frac{104}{25}\right)} = \frac{13 \cdot 7}{10} = 9,1$$

Ответ: 9,1

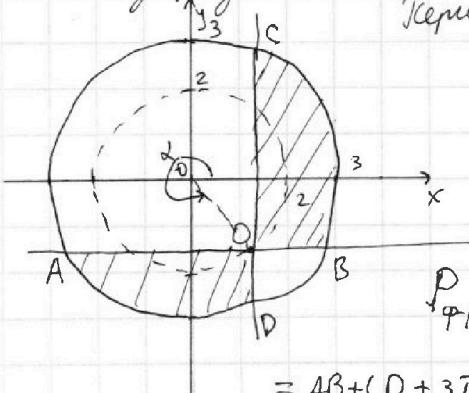
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 Изображение инв-го геометрических:



Каждый раз будем обозначать за  $P$ .  
Обознач. точки син. на рисунке.

Когда  $\alpha$  будет исп-ть значок дуги, я буду иметь виду дугу, начертанную движущейся окружностью  $\Phi(\alpha)$ .

$$P_{\text{пер}} = AB + CD + \sqrt{BC} + \sqrt{AD} = AB + CD + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 =$$

сумма др-х дуг  
меньше равна  $2 \cdot \frac{\pi}{2}$ , т.к. внутренний  
угол, их сумма, равен  $\frac{\pi}{2}$ .

$AB = 2 \cos \alpha$  Заметим, что рисунком ~~затемните~~ не изменится  
относ. осей  $x$  и  $y$ , и  $AB + CD + 3\pi$  <sup>неизмен.</sup> не изменится.

Н.У.О.  $(-1)$  лежит в I-ой четверти

$$AB = 2 \cos \alpha$$

$\beta$  - син. нарис.

$$\begin{cases} AB = 2 \cos \alpha \\ BC = 2 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow AB = 2 \cos(\arcsin \frac{2}{3} \sin \alpha) \Rightarrow$$

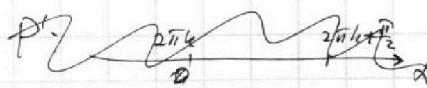
$$\Rightarrow AB = 2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$CD = 2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

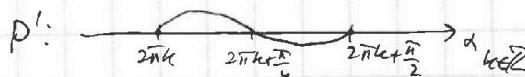
$$(AB + CD + 3\pi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \cdot (-\frac{4}{9} \cdot 2 \sin \alpha) \cos \alpha +$$

$$+ \frac{2}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} \cdot (-\frac{4}{9} \cdot 2 \cos \alpha) (-\sin \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{9} \cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha \geq 1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha$$



$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha \geq \sin^2 \alpha$$



Удивлен отк.

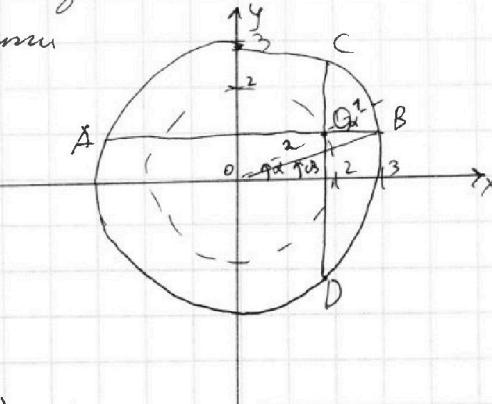
максимум

т.о. максимум достигается

при  $\alpha = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$  (в 3-м квад. I-ой четв.),

а в общем случае

при  $\alpha = \frac{\pi}{2} k + \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_{\max} = 28 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot 2 + 3\sqrt{a} = 12 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{9}} \cdot \cancel{2} + 3\sqrt{a} = 4\sqrt{7} + 3\sqrt{a}$$

Ответ: макс. периметр:  $4\sqrt{7} + 3\sqrt{a}$ , достигается при  $\alpha = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}$ , ~~когда~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



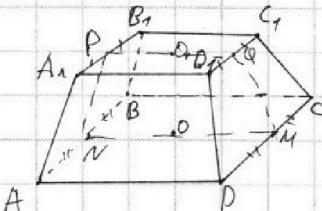
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

]A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> - данная фигура

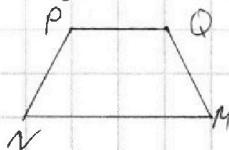


Т.к. есть середина, касающаяся каждого ребра, то эти все грани - описанные четырехугольники, а в них должны прописываться параллельные стороны равны.

Т.к. фигура симметрична, центрные середины лежат на пересечении к центру основания, а еще симметричные выпотечки касаются.

]P, Q, M, N - середины A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, A<sub>1</sub>D<sub>1</sub> соответственно.

Очевидно, что эти точки лежат в одной плоскости, потому что, и между ними, и между ними, серединами точек касания второй середины сущности.



Тогда  $PQMN$  еще имеет четыре стороны равны, а это

$$MN+PQ = PN+QM \quad (1)$$

Для грани A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>D<sub>1</sub> верно  $AB + A_1D_1 = AA_1 + DD_1$ . (2)

Но заметив  $PN \perp$  гр. между  $A_1B_1B$   $\Rightarrow PN \perp AB \Rightarrow PN \leq AA_1$ ,

и Аналогично  $QM \leq DD_1$ .

Заметим, что если учесть заслон стороны то (1) и (2) не могут выполняться одновременно. Тогда  $\angle PNZAA_1$  <sup>а разбо доказываемый</sup> можно при  $AA_1 \perp AB$ , т.е.  $\angle(AA_1; ABCD) = 90^\circ$ .

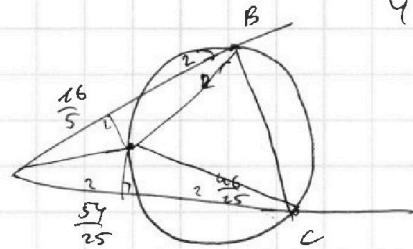
Ответ:  $90^\circ$



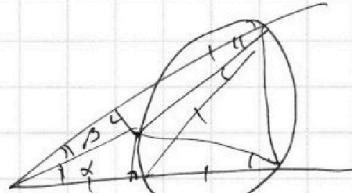
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
\_ из \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черковик

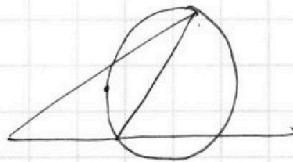
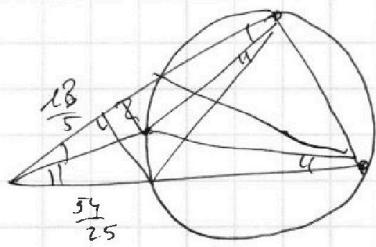


$$\cos \alpha = \frac{54}{25R} \quad \cos \beta = \frac{16}{5R}$$

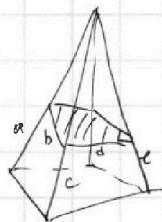
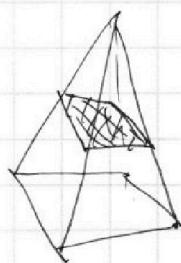
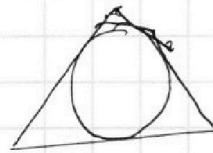
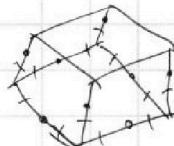
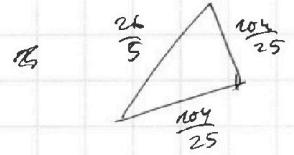
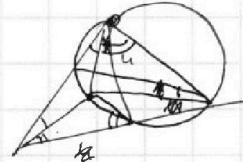
$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5} \quad \frac{13}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta)R \dots$$

$$\frac{1}{5} \sqrt{169 - 54}$$



$$169 \cdot 49$$



$$a^2 - b^2 = c^2 + d^2$$

$$a^2 + d^2 = b^2 + c^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$$

$$B = \underline{\underline{??}}$$

если

с

~1

ЧЕРНОВИК

$$BC : 11 \cdot 101$$

$$B : 101$$

$$B = 101$$

$$C : 11$$

$$C = 55$$

$$\{(5555; 101; 55)\}$$

$$A = 5555$$

$$ABC = (\underline{\underline{11}} \cdot \underline{\underline{101}} \cdot \underline{\underline{5}}) \cdot (\underline{\underline{101}}) \cdot (\underline{\underline{55}})$$

~2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x+y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-1 \\ -3y+3x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^3 y$$

$$x^2 y$$

$$\{27\}$$

$$y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 27y - 9y^2 =$$

$$\approx 27$$

~3

$$a) \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}(xy) \sin \frac{\pi}{2}(x-y), \sin \pi x = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}(xy) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \stackrel{\cos \pi x}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2k+1 \\ \pm \frac{\pi}{2}(x-y) \mid 3 \end{cases} \sin(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2}) + \pi x + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0 \stackrel{\text{если } x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2k+1 \\ 3xy = 2k+1 \end{cases}$$

$$y = 2k+1 = 3x$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{б) } 15xy^4z$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

18

$$x: 2: \quad \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2k+1-x \quad -4 \leq x \leq 4$$

перейдем в y-коо

$\Rightarrow -4 \leq y \leq 9$

$\times x^2:$

перейдем в y-коо

Берем 1, т.к.  $x=4 \wedge y=9$

$$87 \rightarrow 49 \quad 5 \cdot \frac{10}{9} + 9 \cdot \frac{10}{8} - 1 = 45 + 32 - 1 = \textcircled{161}$$

$\times xz$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4  
k-<sup>11</sup>-ков

$$\text{C}_n^k \frac{1}{2} \cdot \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{k-2}}{C_n^k} \Leftrightarrow \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{\frac{n!}{(n-k+2)!(k-2)! \cdot 2!}}{(n-k+1)! k!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} = \frac{(n-k)! k!}{(n-k+2)!(k-2)!} \cdot \frac{(n-2)! 2!}{(n-4)! 4!} \Leftrightarrow \frac{k(k-1)}{k^2(n-k+2)(n-k+1)} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{4 \cdot 3} \Leftrightarrow$$

№27: №16

$$\Leftrightarrow 7 \cdot 6 (n-k+2)(n-k+1) = k(k-1)(n-2)(n-1)$$

$$\text{mod } n: -12k \cdot 2k + 7 \cdot 6^3 (k-2)(k-1) \equiv k(k-1) \cdot 2$$

$$4\sqrt{7} \left[ \text{c2} 26 2(k-1)(21k-42-k) \right] \equiv 0 \quad \cancel{2 \cdot 3(k-2) \neq k \Rightarrow}$$

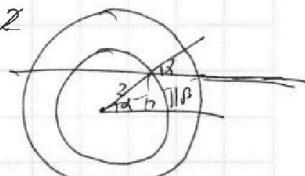
$$6+6\sqrt{1-\frac{4}{9}} = 6+2\sqrt{5} \quad \text{№6} \quad 4(k-1)(20k-21) \equiv 0 \\ 16 \cdot 7 > 36+20+24\sqrt{5}$$



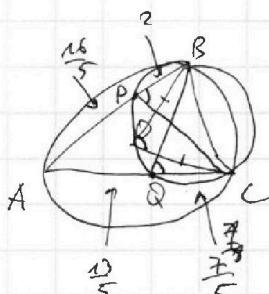
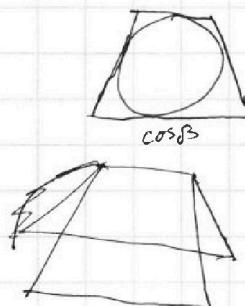
№5  
42  
712



$$56 > 24\sqrt{5} \\ 14 > 8\sqrt{5} \\ 7 > 3\sqrt{5} \\ 49 > 45$$



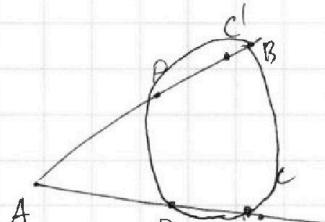
$$2 \sin \alpha = 3 \sin \beta \Rightarrow$$



$$AP = \frac{16}{5} \\ BP = 2 \\ AC = 4$$

$$AQ = \frac{1}{4} \cdot \frac{26}{5} \cdot 2 = \frac{13}{5}$$

$$QC = 4 - \frac{13}{5} = \frac{7}{5}$$



$$\frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{23}{5}}{\frac{7}{5} \cdot 2} = \frac{8 \cdot 13}{7 \cdot 5} = \frac{104}{35}$$

