



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Поскольку A - четырехзначное число из одинаковых цифр, то $A = 1111 \cdot a$, где $a \in [1; 9]$

$$\Downarrow \\ A = 11 \cdot 101 \cdot a \text{ (11 и 101 - простые числа).}$$

Поскольку $A \cdot B \cdot C$ - квадрат, то 101 входит в разложение $A \cdot B \cdot C$ на простые множители четное число раз, то есть $B : 101$ или $C : 101$ или $a : 101$.

Но $C, a < 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B \in \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$. Тогда $B = 101$, т.к. в записи B есть единицы.

Значит, $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot a \cdot 11 \cdot C$. Явно видно, что $C : 11 \Rightarrow C \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$, то есть $C = 55$ *.

Значит, $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot a$. Это число является полным квадратом только при $a = 5$, то есть $A = 5555$.

Ответ: (5555, 101, 55)

* Поскольку $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $a : 5$

*) Поскольку $0 < a < 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② По условию,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{cases} x \neq 3 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Так как $x+y+1 \geq 0+0+1 > 0$, то $xy = (x-3)(y+3) \neq 0$

$$xy = \frac{xy + 3x - 3y - 9}{x = y + 3}$$

Значит, $M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$

M принимает значения 27, значит, при

$$y=1, x=4$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ а) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$
 $\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$
 $-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$
 $\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x) = 2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l; l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 3x - 1 - 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 1 + 2l; l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

 Ответ: $(x, y) = (x, 3x - 1 - 2k); k \in \mathbb{Z}$ $(x \in \mathbb{R})$
 $(x, -x + 1 + 2l); l \in \mathbb{Z}$

б) $\arccos$ определён только на отрезке $[-1; 1]$

$$\left| \frac{x}{y} \right| \leq 1 \text{ и } \left| \frac{y}{x} \right| \leq 1$$

Получим $\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} \leq 2\pi$, т.к. $\arccos \frac{x}{y} \leq \pi$ и $\arccos \frac{y}{x} \leq \pi$

Равенство достигается при $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} = -1$; то есть

Значит, задача свелась к тому, чтобы найти такие $x, y \in \mathbb{Z}$, что

~~$x \in [-9; 9]$ и $y \in [-9; 9]$~~
~~• x и y - различные чётные или нечётные числа; тогда $\frac{x}{y}$ и $\frac{y}{x}$ не являются целыми числами.~~
~~• x и y - различные чётные или нечётные числа, а на отрезке $[-9; 9]$ 2 чётных и 8 нечётных чисел, то ответ на задачу - $4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 = 8 \cdot 8 = 64$~~
~~• x и y - различные чётные или нечётные числа, а на отрезке $[-9; 9]$ 2 чётных и 8 нечётных чисел, то ответ на задачу - $4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 = 8 \cdot 8 = 64$~~
 Ответ: 64

(!) есть продолжение!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-9; 9]$, но $(x, y) \neq (-4; -9)$
• x и y являются решением ур-я
из пункта а)
либо $3x - y$, либо $x + y$ — нечетное число
 x и y имеют разную четность
На отрезке $[-4; 4]$ 5 четных чисел и
4 нечетных числа. На отрезке $[-9; 9]$
10 нечетных чисел и 9 четных.
Числа -4 и -9 имеют разную четность.
Значит, ответ на задачу —
~~54~~ $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 85$
Ответ: 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть было выдано x билетов. Тогда кол-во способов их выдать так чтобы Петя и Ваня оба получили билеты, равно C_{n-2}^{x-2} , где n - число организационных билетов. По условию (и из формулы классической вероятности), имеем: ~~***~~

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = 3,5 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} \quad (x \text{ билетов выдано всем классу})$$

$$\frac{\frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{n!} = 3,5 = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)! \cdot (n-x)!}}{\frac{n!}{x! \cdot (n-x)!}}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 3,5 = \frac{(n-2)!}{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3,5}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 7 \cdot 6$$

$$x = 7 \text{ или } x = -6$$

Поскольку $x > 0$, то $x = 7$

Ответ: 7

⑤ Потому что осталось $(x-2)$ билетов, которые необходимо раздать $(n-2)$ ученикам

⑥** Поскольку было выдано x билетов n ученикам равно C_n^x



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

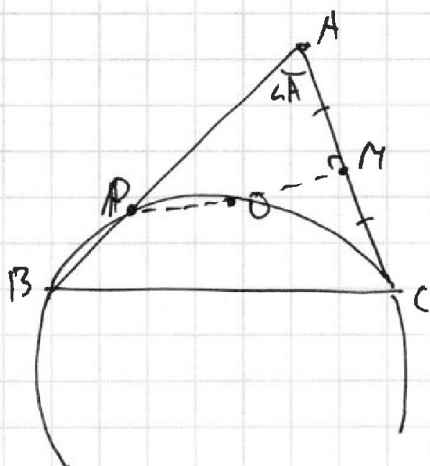
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



Пусть M - середина AC
Докажем, что точки P, O, M коллинеарны
(OM - ср. пер. к $AC \Rightarrow OM \perp AC$)
Определим P , как $\angle PAB$
($\neq B$) и докажем, что B, P, O, C коллинеарны.
 $\Leftrightarrow \angle BPO + \angle OCB = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \angle MPA &= 90^\circ - \angle A \quad \text{из } \triangle APM \\ \angle OCB &= \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle A}{2} = 90^\circ - \angle A \end{aligned}$$

☐ Тогда

по условию, $AP = \frac{16}{5}$ и $AM = \frac{AC}{2} = 2$

$$\cos \angle A = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8} \quad (\text{из } \triangle APM)$$

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad (\text{т.к. } \angle A - \text{острый})$$

Тогда площадь $\triangle ABC$ равна $AB \cdot AC \cdot \frac{\sin \angle A}{2}$,
то есть $(\frac{16}{5} + 2) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2 \cdot 8} = \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{5}$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{5}$

☐ $\angle BOC$ - центральный угол, опирающийся на дугу BC окр-и (ABC) , а $\angle BAC$ - вписанный угол, опирающийся на ту же дугу.
по теореме о вписанном угле,
 $\angle BOC = 2\angle A$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



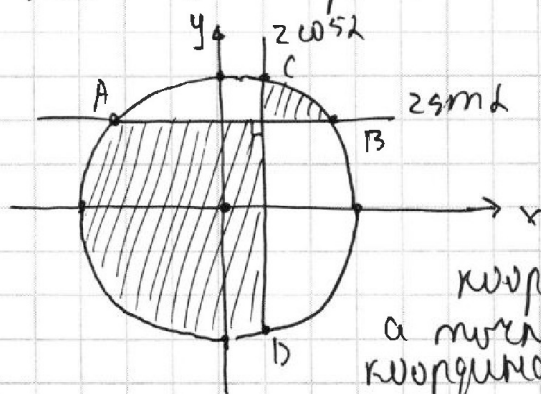
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Неравенство $x^2 + y^2 \leq 9$ задает на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом 3. Мер-во $(x - 2\cos 2)(y - 2\sin 2) \geq 0$ задает на плоскости две противоположные четверти плоскости, ограниченные прямыми $x = 2\cos 2$ и $y = 2\sin 2$. Расстояние от начала координат до точки пересечения этих прямых равно $\sqrt{(2\cos 2)^2 + (2\sin 2)^2} = \sqrt{4} = 2 < 3 \Rightarrow$ она лежит ВНУТРИ круга. Значит, фигура $P(2)$ имеет вид, как на рис. ниже (*)



Периметр $P(2)$ вычислим, как сумму длин дуг $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$; плюс $(AB + CD)$.

Точки A и B имеют координаты $(\pm \sqrt{9 - 4\sin^2 2}, 2\sin 2)$, а точки C и D имеют координаты $(2\cos 2, \pm \sqrt{9 - 4\cos^2 2})$.

$$\text{Тогда } AB + CD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 2}$$

Так как $AB \perp CD$, то $\widehat{AB} + \widehat{CD} =$ половина длины окружности из теоремы о вписанном угле, то есть $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \frac{3 \cdot 2\pi}{2} = 3\pi$

Значит, периметр $P(2)$ равен

$$3\pi + 2\sqrt{9 - 4\sin^2 2} + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 2} =$$

$$= 3\pi + 2\sqrt{5 + 4\cos^2 2} + 2\sqrt{5 + 4\sin^2 2}$$

По мер-ву ~~неравенства~~ о средних (для средних арифметического и квадратического):

$$\frac{\sqrt{5 + 4\cos^2 2} + \sqrt{5 + 4\sin^2 2}}{2} \leq \sqrt{\frac{(5 + 4\cos^2 2) + (5 + 4\sin^2 2)}{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

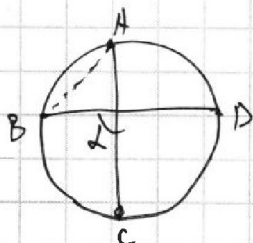
$$= \sqrt{\frac{10 + 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}$$

Значит, периметр $P(\alpha)$ не превышает $(3\pi + 4\sqrt{7})$

Равенство достигается, когда

$$5 + 4\cos^2 \alpha = 5 + 4\sin^2 \alpha, \text{ то есть } \cos \alpha = \pm \sin \alpha, \\ \text{то есть } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Примечание



Теорема о вписанном угле; пусть точки A, B, C, D расположены в таком порядке на окружности. Тогда $\alpha = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{AD})$ (см. рис.)
Доказательство: $\alpha = \angle BAC + \angle DBA = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}$ из теоремы о вписанном угле

⊕ Примечание $x = 2\cos \alpha$, $y = 2\sin \alpha$
применяют ограниченности,
так как $|2\cos \alpha|, |2\sin \alpha| \leq 2 < 3$



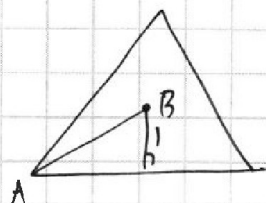
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7 (продолжение)



Однако отрезок AB равен 2, или
уширенная пирамида
триугольная

Значит,

$$\operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{h^2}{4}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \beta + 1 = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$\frac{h^2}{4} + 1 = \frac{h^2 + 1}{1 - (h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2}$$

Решив это уравнение, можно
найти численные значения h
и получить численный ответ.
В одном виде ответ зависит
от ко-ва вершин пирамиды



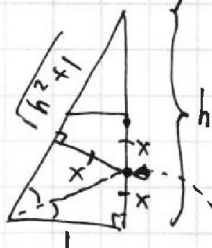
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7) Пусть мы знаем, что радиус вписанной в основание окружности равен 1, а высота пирамиды равна h . Очевидно из симметрии, что центр ω и Ω попадают на высоту пирамиды.

Пусть x — радиус ω ; тогда высота усеченной пирамиды равна $2x$. Соединим центры пирамиды ω и Ω , перпендикулярной боковому ребру.



из основного св-ва подобия треугольников

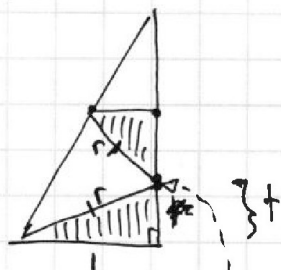
$$\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{x}{h-x} = \frac{1}{\frac{h}{x}-1}$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{h^2+1} + 1, \text{ то есть}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}$$

центр ω

Пусть r — радиус Ω . Центр Ω расположим в той же плоскости, как показано на рисунке ниже.



центр Ω

Найдём расстояние t от центра Ω до плоскости основания пирамиды (из теории Пифагора для заштрихованных Δ):

$$t^2 + 1 = (2x - t)^2 + \left(\frac{h - 2x}{h}\right)^2$$

$$t^2 h^2 + h^2 = 4x^2 h^2 - 4xt h^2 + t^2 h^2 + h^2 - 4xh + 4x^2$$

$$4x^2 h^2 + 4x^2 = 4xt h^2 + 4xh$$

$$t = \frac{xh^2 + x - h}{h^2}$$

$$t = \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1} (h^2 + 1) - h}{h^2} = \left[\frac{h^2 - \sqrt{h^2+1}}{h} \right]$$

(*) НЕУДАЧНО!



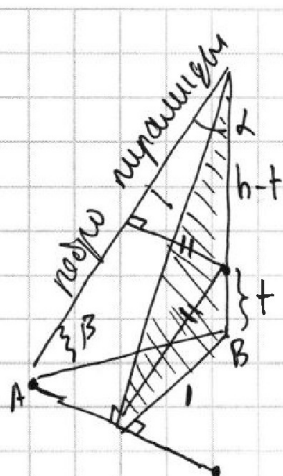


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(На рисунке линия /// - рассматриваемый разрез)
Пусть α - это угол наклона бокового ребра пирамиды к её высоте.

Потому что на рисунке равны, как радиусы Ω

$$(h-t)^2 \sin^2 \alpha = t^2 + 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{t^2 + 1}{(h-t)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{h^2 - \sqrt{h^2 + 1}}{h}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\sqrt{h^2 + 1}}{h}\right)^2} = \frac{(h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2 + h^2}{h^2 + 1} =$$

Если β - угол из условия, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

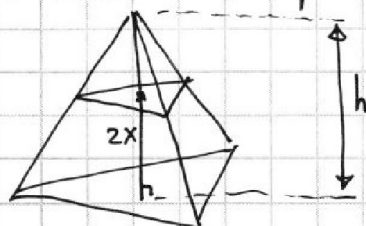
$$1 - \sin^2 \beta = \frac{(h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2 + h^2}{h^2 + 1}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1 - (h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2}{h^2 + 1}$$

Ответ: $\arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - (h^2 - \sqrt{h^2 + 1})^2}{h^2 + 1}} \right)$, где

h - высота уменьшенной пирамиды

Примечание В левом примечании, уменьшенная пирамида выделена так: (она имеет и не имеет треугольный)



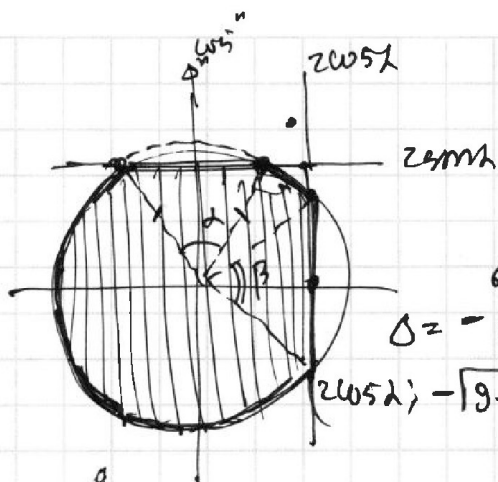


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

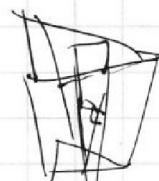
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$50 + 36 - 1 = 85$$



$$\Delta = -\frac{2\alpha}{2\pi} + \beta \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$(2\cos \alpha; -\sqrt{9-4\cos^2 \alpha})$$

$$= 6 \sin \frac{\alpha}{2} + 6 \sin \frac{\beta}{2} - 6 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 6 \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Delta = 2 \sqrt{9-4\cos^2 \alpha} - \beta \arccos(2\cos \alpha)$$

$$\cos x = 2\cos \alpha$$

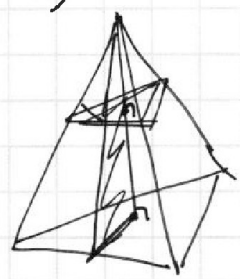
$$+ 2 \sqrt{9-4\sin^2 \alpha} - \beta \arccos(2\sin \alpha)$$

$$\frac{h^3 + h - h - h\sqrt{h^2+1}}{h^2}$$

$$= \frac{h^2 - \sqrt{h^2+1}}{h}$$

$$\arccos(2\cos x) + \arcsin(2\sin x)$$

$$\cos t = 2\cos x$$



$$\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{x}{h-x} = \frac{1}{\frac{h}{x}-1}$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{h^2+1} + 1$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}$$

$$1+t^2 = \left(\frac{h-2x}{h} \right)^2 + (2x-t)^2$$

$$h^2 + t^2 h^2 = h^2 - 2hx + 4x^2 + 4x^2 h^2 - 4xht + t^2 h^2$$

$$= \frac{h^2(\sqrt{h^2+1}-1)}{h}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5555

n-й класс

~~$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^4}$ - вероятность выиграть~~

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{7}{2} \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

$$\frac{\frac{C_{n-2}^{x-1}}{C_{n-1}^x} \cdot \frac{C_{n-2}^0}{C_n^x}}{\frac{(n-2)(n-3)}{x \cdot 2 \cdot 4}} = \frac{7}{2} \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{7}{2} \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 6 \cdot 7$$

$$(x=7)$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{64^{10}}{25^3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

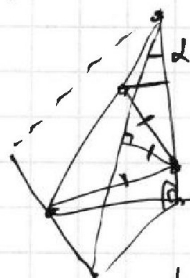
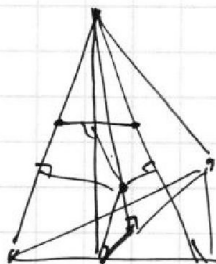
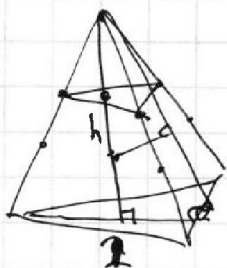
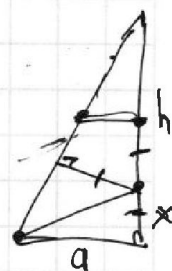
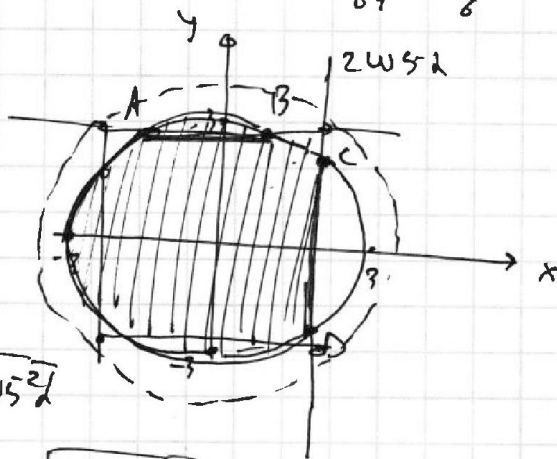
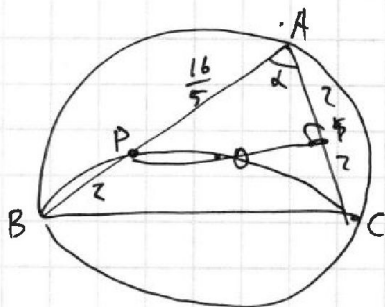
$$(2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha)^2 = 4$$

$$x_A, x_B = 2 \cos \alpha$$

$$y_A, y_B = \pm \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{5 + \cos^2 \alpha}$$

$$x_C, x_D = 2 \cos \alpha$$

$$y_C, y_D = \pm \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{5 + \sin^2 \alpha}$$



$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{x}{h - x}$$

$$\frac{1}{\frac{h}{x} - 1}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} + 1$$

$$2x = \frac{2h}{1 + \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}} = \frac{2ha}{a + \sqrt{a^2 + h^2}}$$