



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Поскольку A - четырехзначное число из однозначных цифр, то $A = 1111 \cdot a$, где $a \in [1; 9]$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \quad (11 \text{ и } 101 \text{ - простые числа}).$$

Так как $A \cdot B \cdot C$ - квадрат, то 101 входит в разложение $A \cdot B \cdot C$ на простые множители в простой степени, то есть $B : 101$ или $C : 101$ или $a : 101$. Но $C, a < 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B \in \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$. Тогда $B = 101$, т.к. в записи B есть единицы.

Значит, $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot a \cdot 11 \cdot C$. Значимо расчленить, получаем, что $C : 11 \Rightarrow C \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$, то есть $C = 55$.

Значит, $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot a$. Это число является квадратом только при $a = 5^*$, то есть $A = 5555$

Ответ: $(5555, 101, 55)$

* Так как $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $a : 5$

⊗ Так как $0 < a < 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② 10 умоляю,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \begin{cases} y \neq 3 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

так как $x+y+1 \geq 0+0+1 > 0$, то $xy = (x-3)(y+3) \neq 0$

$$xy = \frac{xy + 3x - 3y - 9}{x = y + 3}$$

значит, $M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$

M принимает 3 значения 27, например, при

$$y=1, x=4$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чистовиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$③ \text{g)} (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\omega_5 \pi x + \omega_5 \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \omega_5 \pi x \omega_5 \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\omega_5 (2\pi x) = \omega_5 (\pi x - \pi y)$$

$$\omega_5 (\pi x - \pi y) + \omega_5 (2\pi x) = 2\omega_5 \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) \omega_5 \left(\frac{-\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi L; L \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} 3y = 3x - 1 - 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 1 + 2L; L \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\text{Ответ: } (x, y) = (x, 3x - 1 - 2k); k \in \mathbb{Z} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(x, -x + 1 + 2L); L \in \mathbb{Z}$$

д) арксинус определен только на отрезке $[-1; 1]$

$$\left| \frac{x}{4} \right| \leq 1 \text{ и } \left| \frac{y}{9} \right| \leq 1$$

Поскольку $\arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{9} \leq 2\pi$, т.к. $\arcsin \frac{x}{4} \leq \pi$ и

равенство достигается при $\frac{x}{4} = \frac{y}{9} = -1$; то есть

значит, задача сводится к тому, сколько решений

таких $x, y \in \mathbb{Z}$, что

$$x \in [-3; 4] \text{ и } y \in [-9; 9] \cap [-3; 4]$$

• ~~• $x \in [-3; 4]$ и $y \in [-9; 9] \cap [-3; 4]$~~
~~• x и y - решения ур-я из пунка а); то есть либо $x = -3$, либо $x = -2$, либо $x = -1$, либо $x = 0$, либо $x = 1$, либо $x = 2$, либо $x = 3$, либо $x = 4$. Т.к. на $[-4; 4]$ чет. ч. и 8 неч. числа, а на отрезке $[-3; 4]$ 8 ч. и 8 неч. чисел, то 0 членов на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -9$, то 0 членов на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -3$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -2$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = -1$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 0$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 1$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 2$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 3$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -9$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -8$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -7$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -6$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -5$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = -1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = 0$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = 1$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = 2$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = 3$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~
~~• $x = 4$ и $y = 4$, то 1 член на $[-3; 4]$ задану~~

Ответ: 64

Готово! Проверил!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-9; 9]$, но $(x, y) \neq (-4, -9)$
- x и y являются решениями ур -9 из пункта а)

либо $3x = y$, либо $x + y = \text{нечетные числа}$

x и y имеют разную четность

На отрезке $[-4; 4]$ 5 четных чисел и 10 нечетных чисел. На отрезке $[-9; 9]$ числа -9 и -4 имеют разную четность.

Значит, ответ на задачу -

$$\cancel{5 \cdot 10} + 4 \cdot 9 - 1 = 85$$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть было x билетов. Тогда
как-то способом из n выдали такими
Чепик и Вася оба получили билеты, право
 C_{n-2}^x , где n - это общее количество билетов
По условию (и из решения классической
вероятности), имеем: $\star\star$

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^4} = 3,5 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} \quad \left(x \text{ билетов выданы
какими-либо способами} \right)$$

$$\frac{\frac{(n-2)!}{z!(n-z)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = 3,5 = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{(n-2)!}{(6-2)!(n-6)!} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 3,5 = \frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-1)n}, \quad \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-2)!}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3,5}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 7 \cdot 6$$

$$x = 7 \text{ или } x = -6$$

Но как $x > 0$, то $x = 7$

Ответ: 7

⑤ Нужно что осталось $(x-2)$ билетов,
которые можно было раздать $(n-2)$
личностям

$\star\star$ Так как всего способов выдачи x билетов
 n личностям равно C_n^x



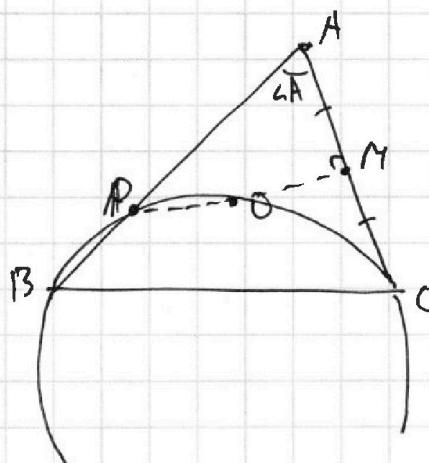
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(5)



Учтем М-средина АС
Докажем, что точки
Р, О, М коллинеарны
(ОМ - сер.пер. к АС $\Rightarrow OM \perp AC$)
Определим Р, как $\overset{OM}{\underset{\text{рез.}}{\text{пересечение}}}$ ПЛ АВ
 $(\neq B)$ и докажем, что
B, P, O, C линейны.
 $\Leftrightarrow \cancel{\angle BOP} \angle BPO + \angle OCB = 180^\circ$

$$\begin{aligned} & \angle MPA = 90^\circ - \angle A \quad (\text{из } \triangle APM) \\ & \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle A}{2} = 90^\circ - \angle A \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{Подела}}$

Но учтем, $AP = \frac{16}{5}$ и $AM = \frac{AC}{2} = 2$

$$\cos \angle A = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8} \quad (\text{из } \triangle APM)$$

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad (\text{т.к. } \angle A \text{ острый})$$

Площадь трапеции $\triangle ABC$ равна $AB \cdot AC \cdot \frac{\sin \angle A}{2}$,
но если $(\frac{16}{5} + 2) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{10}$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$

(*) $\angle BOC$ - центральный угол, опирающийся
на дугу BC окр-и (ABC) , а $\angle BAC$ -
внешний угол, опирающийся на ту же
дугу
No второй о вписанном угле,
 $\angle BOC = 2\angle A$



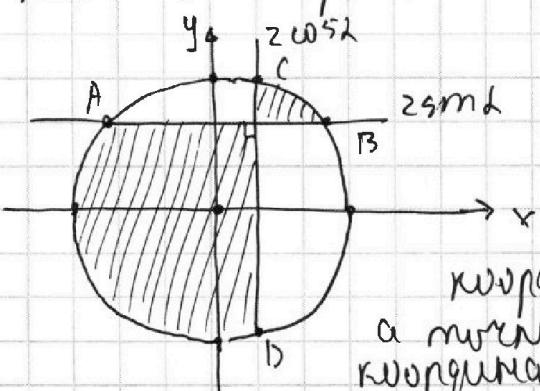
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥ Неравенство $x^2 + y^2 \leq 9$ задает на плоскости круг с центром в начале координат и радиусом 3. Нер-во $(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ задает на плоскости две полуполосы, разделяющие четверти плоскости, ограниченные прямыми $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$. Решение от максима координат 90 точек приложении этих прямых равно $\sqrt{(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2} = \sqrt{4} = 2 < 3 \Rightarrow$ она лежит ВМУТРИ круга. Значит, фигура $P(\alpha)$ имеет вид как на рисунке.



Периметр $P(\alpha)$ выраженный,

как сумму длин AB и CD ;

$$(AB + CD).$$

Но и A и B имеют координаты $(\pm\sqrt{9-4\sin^2\alpha}, 2\sin\alpha)$, а точки C и D имеют координаты $(2\cos\alpha, \pm\sqrt{9-4\cos^2\alpha})$.

$$\text{Тогда } AB + CD = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

Поскольку $AB \perp CD$, то $\overline{AD} + \overline{BC} =$ половина суммы отрезков из четырех овальных симметрических сегментов, то если $\overline{AD} + \overline{BC} = \frac{3 \cdot 2\pi}{2} = 3\pi$

Значит, периметр $P(\alpha)$ равен

$$3\pi + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} =$$

$$= 3\pi + 2\sqrt{5+4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha}$$

По нер-ву ~~некоторое~~ о средних (оно средних арифметических и квадратичных):

$$\frac{\sqrt{5+4\cos^2\alpha} + \sqrt{5+4\sin^2\alpha}}{2} \leq \frac{(5+4\cos^2\alpha) + (5+4\sin^2\alpha)}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{\frac{10 + 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}$$

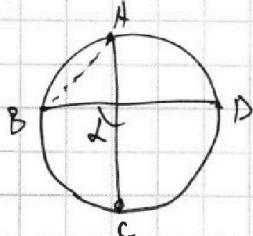
Значит, первое тройное $P(\alpha)$ не превышает

$$[3\pi + 4\sqrt{7}]$$

Равенство достигается, когда

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ то есть } \cos \alpha = \pm \sin \alpha, \\ \text{то есть } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Примечание



Несложно о биномиальном уравнении: пусть точки A, B, C, D расположены в таком порядке на окружности. Тогда $\alpha = \frac{1}{2}(BC + AD)$ (см. рис.)

Доказательство: $\alpha = \angle BAC + \angle DBA = \frac{BC + AD}{2}$ из теоремы о биномиальном уравнении

⊕ Примени $x = 2\cos \alpha, y = 2\sin \alpha$ к первому случаю, получим $|2\cos \alpha|, |2\sin \alpha| \leq 2 < 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

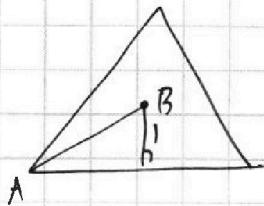
7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7(продолжение))

Однако отрезок AB равен 2, что
учем при вычислении
трехугольника



Значит,

$$\alpha \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{h^2}{4}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \beta + 1 = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$\frac{h^2}{4} + 1 = \frac{h^2 + 1}{\cancel{h^2} - (h^2 - \cancel{h^2})^2}$$

Решив это уравнение, можем
найти значение h ,
и получить значение ответа.
В один вид ответа завели
от количества вершин пирамиды

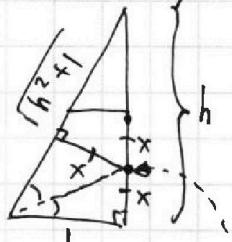
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(7) Думали считали, что радиус вписанной в остроугольник окружности равен x , а высота пирамиды равна h . Ошиблись из-за того, что x и h попадают на высоту пирамиды

Пусть x - радиус ω ; тогда высота усеченной пирамиды равна $2x$. Согласно теореме Пифагора мы имеем, что гипотенузой боковой грани:



из основания сб-ва доказано

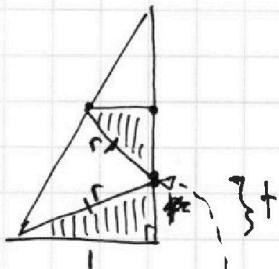
$$\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{x}{h-x} = \frac{1}{\frac{h}{x}-1}$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{h^2+x^2} + 1, \text{ то есть}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}$$

шаг 1

Пусть r - радиус ω . Импульс ω распишем в том же порядке как показано на рисунке



Найдём расстояние t от центра ω до пересечения оснований пирамиды (из теоремы Пифагора для заштрихованных \triangle):

$$t^2 + 1 = (2x-t)^2 + \left(\frac{h-2x}{h}\right)^2$$

$$t^2 h^2 + h^2 = 4x^2 h^2 - 4x t h^2 + t^2 h^2 + h^2 - 4x h + 4x^2$$

шаг 2

$$4x^2 h^2 + 4x^2 = 4x t h^2 + 4x h$$

$$t = \frac{x h^2 + x - h}{h^2}$$

$$t = \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1} (h^2+1) - h}{h^2} = \boxed{\frac{h^2 - \sqrt{h^2+1}}{h}}$$

⊗ НЕуспехи!

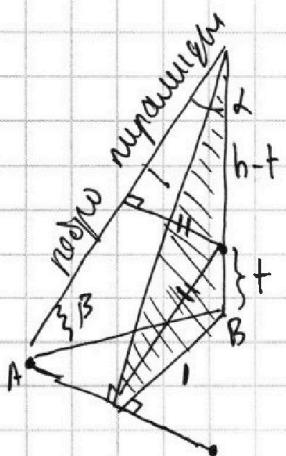


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(На рисунке шва III - рассмотрим верхнюю грани пирамиды)

Чтобы \angle - это угол между нормалью бокового ребра пирамиды к её высоте.

Потом // на рисунке равнос
как предыдущий - 2

$$(h-t)^2 \sin^2 \alpha = t^2 + 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{t^2 + 1}{(h-t)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{h^2 - \sqrt{h^2+1}}{h}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\sqrt{h^2+1}}{h}\right)^2} = \frac{(h^2 - \sqrt{h^2+1})^2 + h^2}{h^2 + 1} =$$

Если β - угол из утверждения, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$1 - \sin^2 \beta = \frac{(h^2 - \sqrt{h^2+1})^2 + h^2}{h^2 + 1}$$

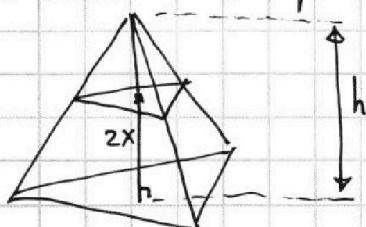
$$\sin^2 \beta = \frac{1 - (h^2 - \sqrt{h^2+1})^2}{h^2 + 1}$$

Очевидно: $\arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - (h^2 - \sqrt{h^2+1})^2}{h^2 + 1}} \right)$, где
h - высота между ребром и боковой грани пирамиды

Примечание Вместо понятия,

высота пирамиды будем звать так:

(она может и не быть тупого угла)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

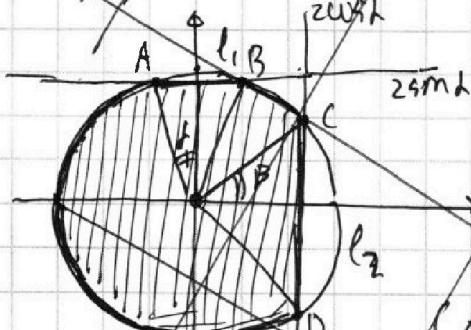
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(6) Установки Черавченко $x^2 + y^2 \leq 9$ задают круг с центром в начале координат и радиусом 3

Черавченко $(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ задает две полосы ограниченные прямими $x = 2\cos\alpha$ и $y = 2\sin\alpha$. Расстояние от начала координат до этих прямых равно $2\sqrt{3}$. Для точек прямых $(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4$

$4 > 3 \Rightarrow$ прямые пересекают полосу $|x| < 3$, но не пересекают полосу $|x| > 3$.

\Rightarrow оде прямые "окрашены" от "небес" до "земли".



Некий образец $P(\alpha)$ будет так же, как

Черешенько $P(\alpha)$ может

выкинуть, как

разности длин ОДР-и

$(6\pi - 6\beta)$, или $(AB + CD)$, то

если $6\pi - 6\beta - 6\gamma + AB + CD$

Можем A и B ищут координаты а точки C и D ищут координаты $(2\cos\alpha, \pm\sqrt{9-4\sin^2\alpha})$

$$AB + CD = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

Помимо этого, $3\cos\beta = 2\cos\alpha \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right)$;

значит $\gamma = \arccos\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$

Следовательно $P(\alpha)$ равен

$$P(\alpha) = 6\pi - 6\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right) - 6\arccos\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right) + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

и



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

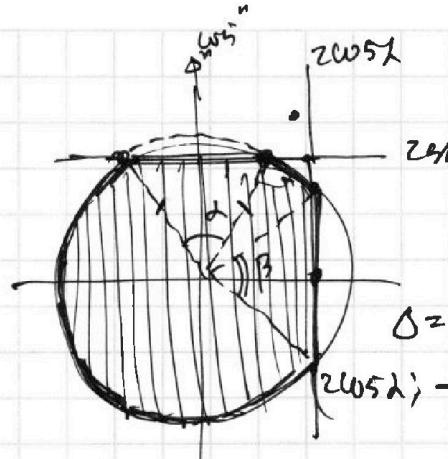
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$50 + 36 - 1 = 85$$

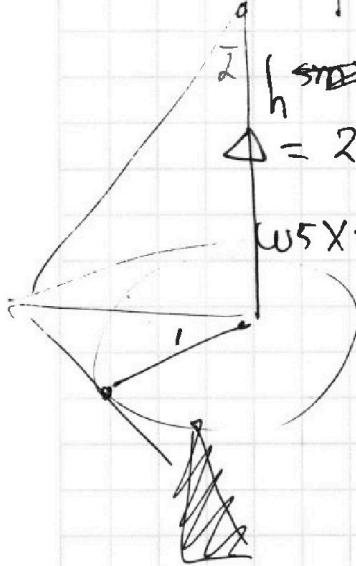


$$\Delta = -\frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1+\beta}{2\pi} + \beta \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$= 6 \sin \frac{\alpha}{2} + 6 \sin \frac{\beta}{2} - 6 \left(\frac{1}{2} \right) - 6 \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

$$h = 2 \sqrt{g - 4w5^2x} - \arcsin(w5x)$$

$$w5x = 2w5x$$



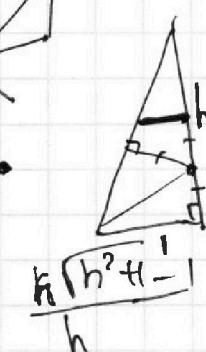
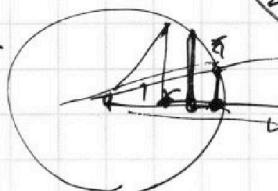
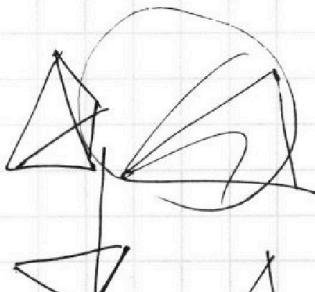
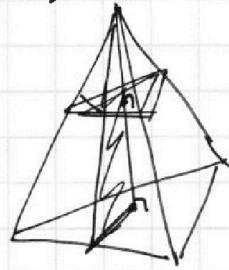
$$+ 2 \sqrt{g - 4sm^2x} - \arcsin(sm(x))$$

$$\frac{h^3 + \sqrt{h^2 - h} - h\sqrt{h^2 + 1}}{h^2} = \frac{h^2 - \sqrt{h^2 + 1}}{h}$$

$$\arcsin(w5x) + \arcsin(sm(x))$$

"+"

$$w5x = 2w5x$$



$$\frac{1}{\sqrt{h^2+1}} = \frac{x}{h-x} = \frac{1}{\frac{h}{x}-1}$$

$$\frac{h}{x} = \sqrt{h^2+1} + 1$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{h^2+1} + 1}$$

$$= \frac{h}{2(\sqrt{h^2+1} + 1)}$$

$$1 + z = \frac{(h-2x)^2}{h} + (2x-1)^2$$

$$h^2 + x^2 h^2 = h^2 - 2hx + 4x^2 + 4x^2 h^2 - 4xh^2 + 1$$

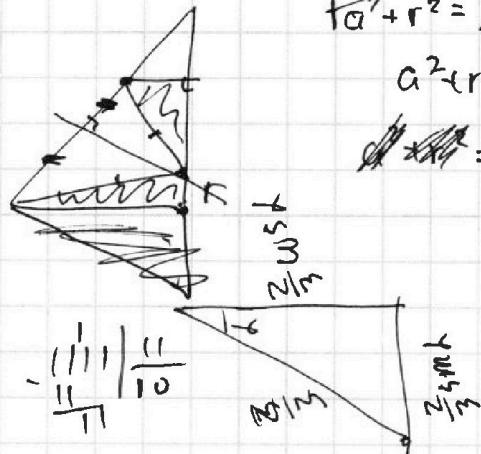


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$r^2 + r^2 = l^2$$

$$a^2 + r^2 = (2x - r)^2 + \left(a + \frac{h - 2x}{h}\right)^2$$

$$\cancel{a^2 + r^2} = (4x^2 - 4rx + r^2) + \cancel{\left(a^2 + \frac{h^2 - 4hx + 4x^2}{h^2}\right)} - \cancel{4a^2 x h + 4a^2 x^2}$$

$$2\cancel{a^2} + 4a^2 x h + 4rxh^2 = 4a^2 x^2 + 4x^2 h^2$$

$$a^2 h + r h^2 = a^2 x + h^2 x$$

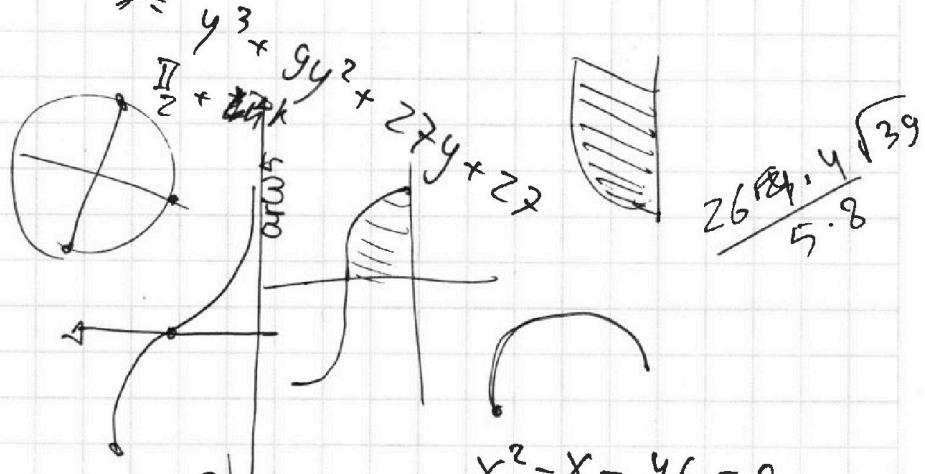
$$r = \frac{a^2 x + h^2 x - a^2 h}{h^2}$$

$$(y+3)(y+3)(y+3) =$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

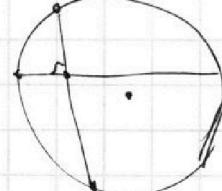
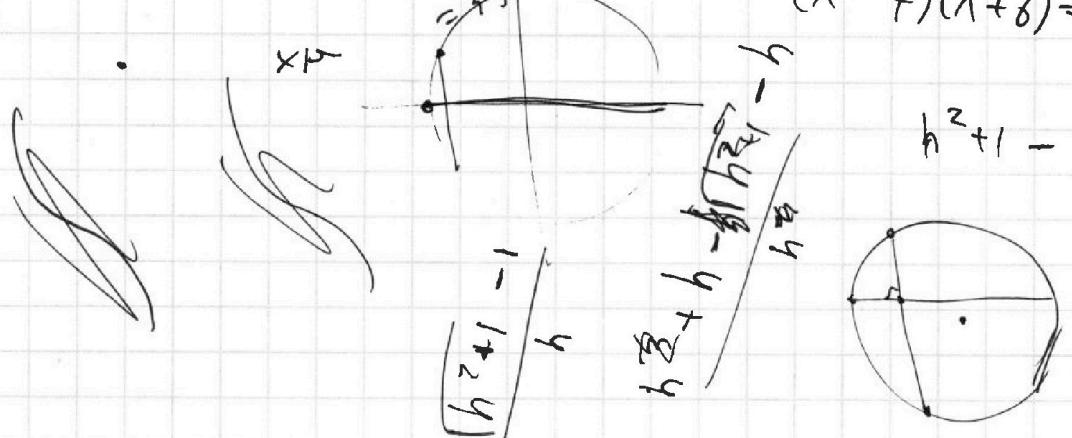
$$x - ky = 1 + 2k$$

$$\arcsin(x) + \arcsin(y)$$



$$x^2 - x - 46 = 0$$

$$(x - 7)(x + 6) = 0$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l}
 A: 9 \\
 B: 8 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 10 \cdot 10 - 8 \cdot 9 \cdot 9 = 111111 \\
 C: 11 \cdot 101 = 110111 \\
 \hline
 \boxed{111111} \cdot BC \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 \times 101 \\
 \hline
 11 \\
 + 110 \\
 \hline
 1111
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 110111 \\
 \times 101 \\
 \hline
 1101 \\
 000 \\
 101 \\
 \hline
 110111
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} &= \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \\
 \frac{x+y+1}{xy} &= \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \rightarrow xy = (x-3)(y+3) \neq 0 \\
 x^3 - y^3 - 9xy &= (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 3y^2 + 9y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sin \alpha x - \sin \beta y) \sin \alpha x &= (\cos \alpha x + \sin \alpha y) \cos \beta x \\
 \sin^2 \alpha x - \sin \alpha x \sin \beta y &= \cos^2 \beta x + \cos \alpha x \sin \beta y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\cos(\beta y) &= \sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta y = \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta y \\
 \cos^2 \alpha &= \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta
 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + 1 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos(2\alpha)$$

$$\cos(\alpha - b) + \cos(\beta) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha - b + \beta}{2}\right) = 0 \quad \cos\left(\frac{\alpha - b - \beta}{2}\right) = 0$$

$$\arccos \frac{r}{g} + \arg \omega_5 \frac{y}{g} < 25$$

$$\arccos \omega_5$$

$$\sin(\arccos \omega_5) = \sqrt{1 - \omega_5^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

БЛАНК n - 11 -классный

~~$C_n^x = \frac{x!}{n!(x-n)!}$~~ - вероятностные выражения

$$\frac{C_{n-2}^x}{C_n^4} = \frac{7}{2} \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$$

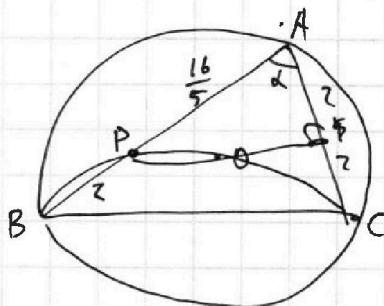
$$\frac{\frac{(n-2)!(n-3)!}{x!(n-1)!(n-2)!(n-3)!}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{n!(n-1)!}} = \frac{7}{2} \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{7}{2} \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 6 \cdot 7$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\frac{16}{9}} = \frac{5}{8} \quad \frac{64}{25} = \frac{10}{3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$



$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

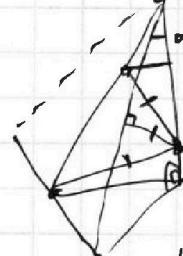
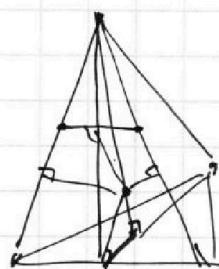
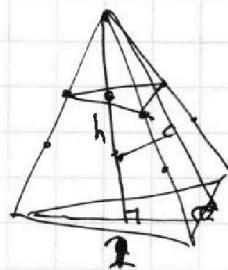
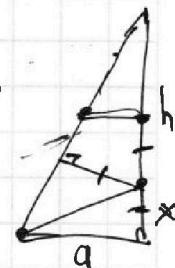
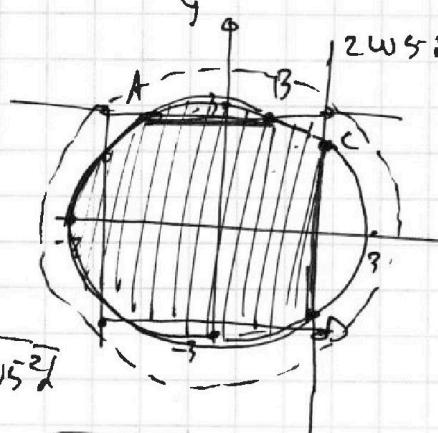
$$(2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha)^2 = 4$$

$$x_A, x_B = 2 \cos \alpha$$

$$y_A, y_B = \pm \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{5 + \sin^2 \alpha}$$

$$x_C, x_D = 2 \cos \alpha$$

$$y_C, y_D = \pm \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{5 + \sin^2 \alpha}$$



$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{x}{h-x} =$$

$$\frac{1}{\frac{h}{x} - 1}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} + 1$$

$$2x = \frac{2h}{1 + \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a}} = \left[\frac{2ha}{a + \sqrt{a^2 + h^2}} \right]$$