



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a \quad \text{где } a \in \mathbb{N}, a < 10$$

$$1111 = 101 \cdot 11 \quad 101 - \text{простое}$$

$A \cdot B \cdot C : 101$ не в разд. A только 1-ая степень 101, но в разд. B и C ~~должна быть~~ сумма степеней 101 - неч. число

не C двузнач, но $C < 101$ $C/101 = \dots$

$\Rightarrow B : 101$, единственное \checkmark 3-зч. число или цифру

$$6 \text{ и } : 101 - 606$$

$$606 : 11 \Rightarrow C : 11 \quad C = 33 \quad \text{не } \checkmark$$

в разд. числа A есть 1-ая степень 11

$$B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3^2 \Rightarrow \text{в разд. } A \text{ существует неч. степень 2 и чет степень 3}$$

все ~~натур.~~ натур. числа < 10 с

неч. степенью 2: 2; 6; 8
еще с чет степенью 3: 2; 8

$$A \in \{2; 8\} \quad B = 606 \quad C = 33 \quad - 2 \text{ варианта}$$

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \right), \quad x > 0, y > 0$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy} \quad \text{п.р.} \quad x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ то}$$
$$x+y+5 > 0 \Rightarrow \neq 0$$

\Rightarrow можно упростить выражение до

$$(x-2)(y+2) = xy$$

$$xy + 2x - 2y - 4 = xy \quad x = y + 2$$

$$x^3 = (y^2 + 4y + 4)(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$M = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \sin^2 \pi x + \sin \pi y \stackrel{N3}{=} \sin \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y = \cos^2 \pi x$$

$$\frac{\cos(\pi x + \pi y) - \cos(\pi y - \pi x)}{-2} \cdot \frac{\cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi y - \pi x)}{2} = \cos(2\pi x)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = y + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $3x = y + 2n, n \in \mathbb{Z}; x = -y + 2k, k \in \mathbb{Z}$

б) $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $D(\arcsin) = [-1; 1]$

нужно повернуть край

$\arcsin \Rightarrow x \in \{-6; -5; \dots; 5; 6\}$ $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ заметим что при

нечётном x $3x - \text{неч.}$ $2n, n \in \mathbb{Z} - \text{чёт} \Rightarrow y - \text{неч.}$

аналогично $y - \text{неч.} \Rightarrow x - \text{неч.}$

аналогично $y - \text{неч.} \Rightarrow x - \text{неч.}$

x	6	2	всего вар.	$6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 33$
y	2	3		



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не подходит ~~случае~~ ^{случае}
$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
 мк. в ост. сл.
одно из слог. $\leq \frac{\pi}{2}$ а другое $< \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 \Rightarrow система $< \pi$
 $x=6$ $y=2$ - не подходит
33 - 1 = 32 подк. ~~помощники~~
Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

k - кол-во двенадцатиклашек a - новое число билетов, $a > 4$
пока было 4 билета:

общее число комб по 4 человека, ~~не~~ не учитывая повторное

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \quad ; \quad \text{с Степой и Васей:}$$

$4 \cdot 3 \cdot (k-2) \cdot (k-3)$ число комб той же кол-ва.

равно $4 \cdot 3 \cdot 2$ вер. комб с Степой и Васей

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot 2 \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{k \cdot (k-1)}$$

также в конце месяца вер. расхит. аккаунта

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot \dots \cdot (k-a+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot (k-a+1)} = \frac{a(a-1)}{k(k-1)}$$

$$a^2 - a = 6 \cdot 12 \quad (a-9)(a+8) = 42, \text{ но}$$

$$\text{т.к. } a \geq 4 \Rightarrow a = 9$$

Ответ: 9



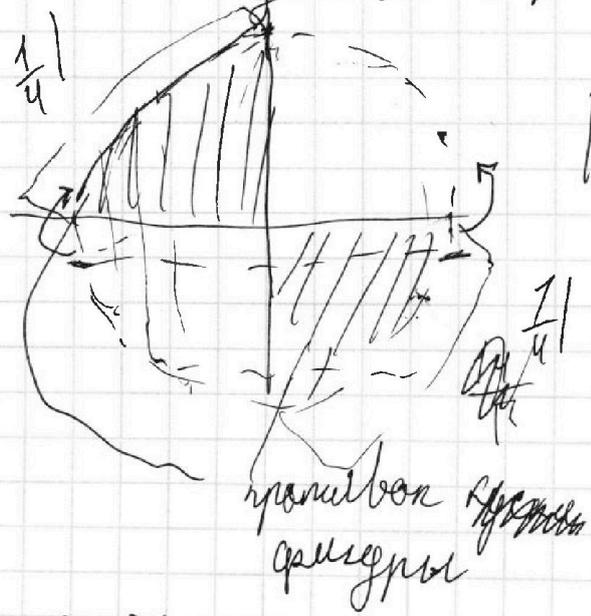
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

периметр фигуры состоит из 2 частей: внешних краевых отрезки краевых внутри окружности и куски окружности вот они отсекаются
 расм. велич. зад. : есть окр; отрезки перпен. внутри, сумма длин окр. в промывон ~~фигур~~ (не им. общает); отрезки перп. ~~фигур~~
~~окр~~ ~~эти~~ ~~и~~ ~~еще~~ отрезок проходит через ~~окр~~
 окр, тогда ~~эти~~ ~~и~~ ~~еще~~ сумма этих длин - пол длины окр.



1-ди окр.

при смене хорд
 прямой вниз ~~эти~~
~~эти~~ ~~и~~ ~~еще~~ равные куски
 окр. перейдут из
 1-ой пары промывон.

фигур в ~~эти~~ ~~и~~ ~~еще~~ и наоборот,
 сумма ~~и~~ ~~еще~~, аналог со сумм хорд
 прямой вверх и верт в любой ~~эти~~
 равны, пока их ~~и~~ ~~еще~~ перес. внутри
 окр.; в момент тогда перес. выйдет за
 окр. ~~и~~ ~~еще~~ на ней, одна из фигур
 перестает существовать



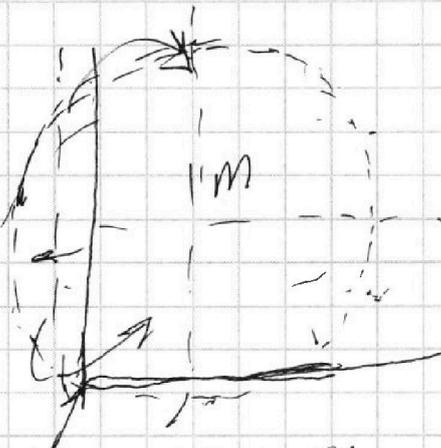
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пример



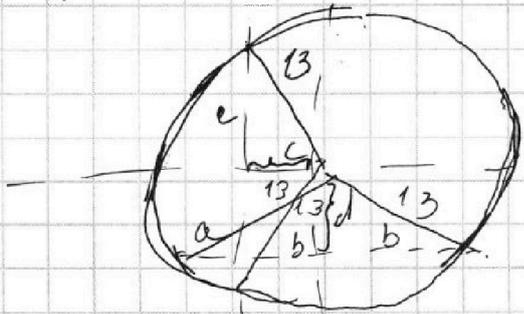
m - фигура в кот как
центр
мешу. верт. виво
передает куски окр.
в m

нет фигуры

м.к. в иск зад пр. пересек.
внутри окр. то сферическая дуга
кусков округлости, дм. гр. кривой
области - половина дм. окр.

$$\frac{13^2 \pi}{2} - \frac{169 \pi}{2}$$

длины ~~прямые~~ отрезков c
a и b - половина
отрезков
 $c = -552 \cos d$



$$d = -552 \sin d$$

$$a = \sqrt{13^2 - 50 \cos^2 d}$$

$$b = \sqrt{13^2 - 50 \sin^2 d}$$

м. Ступагора

$2a + 2b = 2(a+b)$ на $a > 0$
 $b > 0$ но чем больше ~~сумма~~
кв их суммы, тем больше их сумма



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{119 + 50 \cos^2 \alpha} \right) - \max$$

$$288 + \sqrt{169 \cdot 119 + 2500 \cos^2 \alpha} - 2500 \cos^4 \alpha$$

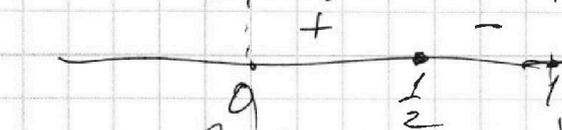
$$169 \cdot 119 + 2500t - 2500t^2 \quad t = \cos^2 \alpha$$

Максимум, $t \in [0; 1]$

$$f(t) = 169 \cdot 119 + 2500t - 2500t^2$$

$$f'(t) = 2500 - 5000t = 5000 \left(\frac{1}{2} - t \right)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} \\ \cos \alpha &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$M_{\max} = \frac{169\pi}{2} + 2\sqrt{169-25} + 2\sqrt{169-25} = 84,5\pi + 48$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M_{\max} = 84,5\pi + 48$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

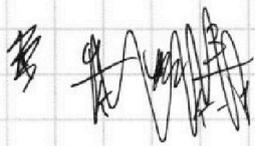


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad P = 6 \cdot 101 \quad C = 33$$



$$4 \cdot 3 \cdot \frac{(k+2)(k-2)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3)}$$

$$a \cdot (a-1) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$$

$$\sin^2(\pi x) + (\sin \pi y - \sin \pi x) = \cos^2(\pi x) - (\cos \pi y - \cos \pi x)$$



$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$\frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

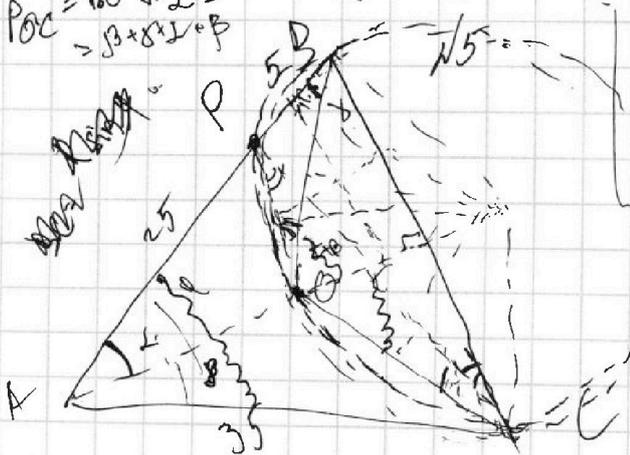
$$2x - 2y - 4 = 0$$

$$x = y + 2$$

$$(y+2)^3 = (y^2 + 4y + 4) \cdot (y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$

$$-y^3 - 6y^2 - 12y$$

$$\angle POC = 180 - \alpha - \beta = \beta + \alpha + \beta$$



$$\begin{cases} PO^2 = 25^2 + R^2 - 2 \cdot 25 \cdot R \cdot \cos \alpha \\ PO^2 = 5^2 + R^2 - 2 \cdot 5 \cdot R \cdot \cos \beta \end{cases}$$

$$600 - 50R \sin \alpha = -10R \sin \alpha$$

$$55^2 = 20R \cos \beta$$

$$15 = R \cos \beta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x \stackrel{1}{=} \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos \pi y \cos \pi x - \cos(\pi y - \pi x) + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$= \cos(\pi y + \pi x) - \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos \pi y \cos \pi x = \frac{\cos(\pi y + \pi x) + \cos(\pi y - \pi x)}{2}$$

$$\sin^2 \pi x + \cos(\pi y - \pi x) = \cos^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x)$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi n \\ \pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2n \\ y = -x + 2n \end{cases}$$

$$a \cos \sin \frac{x}{6} + a \cos \sin \frac{y}{2} < \pi \quad y \in \{-2, 2; -1, 0, 1, 2\}$$

$$\sin^2 x + \frac{\cos(\pi y + \pi x) - \cos(\pi y - \pi x)}{-2} + \frac{\cos(\pi y + \pi x) + \cos(\pi y - \pi x)}{2}$$

$$= \cos^2 \pi x$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n \\ 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = y + 2n \\ x = -y + 2n \end{cases}$$

