



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{s} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} \leq \pi.$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{s} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Осталось исключить случай равенства.

$$\arcsin \frac{x}{s} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{s} = 1 \Rightarrow x = s.$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4.$$

$$\Rightarrow x = s \text{ и } y = -4 \Rightarrow (s; -4) - \text{не подх.}$$

Значит, что  $|x| \leq s$  и  $|y| \leq 4$ ,

а также  $3x+y$  — нечет, что  $\Leftrightarrow$   
 $x+y$  — чет.

Рассчитаем число вариантов:

$$x = -s \quad - \text{под } y \leq s \text{ бар-об.} \quad | \quad x = -1 - s.$$

$$x = -4 \quad - \text{под } y \geq 4 \text{ бар-ма.} \quad | \quad x = 0 - 4$$

$$x = -3 \quad - s \text{ бар-об.} \quad | \quad x = 1 - s$$

$$x = -2 \quad - 4 \text{ бар-ма} \quad | \quad x = 2 - 4$$

$$x = 3 - s$$

$$x = 4 - 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = 5 - 4$  бар-ма, т.к.  $(5; 4)$  - не подходит.  
→ всего решений:

$$5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 = \\ = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 25 + 24 = 49.$$

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ *одна* 11 - КУМУ - X

$$\binom{x-2}{2} \cdot \binom{x}{4}$$

$$\frac{(x-2)!}{2! (x-4)!} \quad \frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!}$$

$$\frac{\cancel{(x-2)!}}{2! \cancel{(x-4)!}}$$

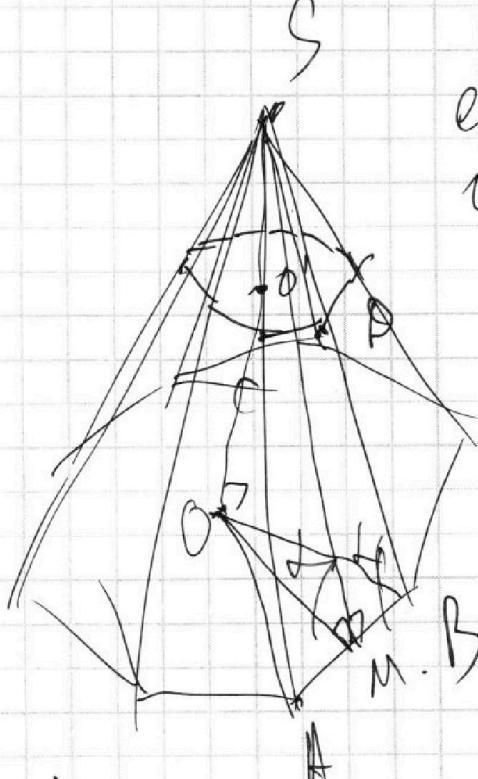
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{(x-4)! \cdot 4!} \quad \frac{12}{x(x-1)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задано, что если  $ABC\Gamma$  - бок - я грани нашей фигуры, то  $ABC\Gamma$  - описан.

Пусть  $h$  - высота из  $S$  на  $\triangle ABC$ .  
Он - я, а  $r$  - радиус впис - я сферы.

$$\Rightarrow V_{\text{бок. пирамиды}} = \frac{\cancel{\pi} r^2}{\cancel{2}} \cdot (S_{\text{бок.}} + S_{\text{бок.}}) =$$

$$= h \cdot S_{\text{бок.}}, \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\text{бок.}} + S_{\text{бок.}}}$$

$O$ -центр шарика  $O$ -я  
вершины:

$$\Rightarrow \frac{OO'}{SO} = \frac{r}{h} = \frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\text{бок.}} + S_{\text{бок.}}} = \frac{S_{\text{бок.}}}{SA} \cdot \frac{AC}{SA}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{AC}{SA} = \frac{2S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}} + S_{\text{бок}}}$$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{SO'}{SO} = \frac{h - 2r}{h} = 1 - \frac{2S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}} + S_{\text{бок}}}$$

~~$$AB + CD = AC + BD$$~~

$$AB \left( 1 - \frac{2S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}} + S_{\text{бок}}} \right) = \frac{4S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}} + S_{\text{бок}}} \cdot SA$$

$$AB \frac{2S_{\text{бок}}}{S_{\text{окн}} + S_{\text{бок}}} = \frac{4S_{\text{окн}}}{S_{\text{окн}} + S_{\text{бок}}} \cdot SA$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{SA} = \frac{2S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}}}.$$

$$\frac{AB}{SA} = \frac{2S_{\text{окн}}}{S_{\text{бок}}} = 2 \cos L, \text{ где } L = \angle OMS, M - \text{середина } AB.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{a}{2}}{h^1} = \frac{1}{\operatorname{tg} L}$$

$$S_m = 20 \text{ градусов}$$

задача

$$\Rightarrow h^1 = \frac{a \operatorname{tg} L}{2}$$

$$\frac{25}{h^1} = \frac{2 \cos L}{2 \cos L + 1}$$

$$h_{\text{н}}^* = \frac{a \operatorname{tg} L \cdot \cos L}{2} =$$

$$= \frac{a \sin L}{2} \cdot \frac{1}{2 \cos L + 1}$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{очн}} = \frac{a^2 \sin L}{4}$$

$$\Gamma = \frac{S}{P} = \frac{\frac{a^2 \sin L}{4}}{a + \frac{a}{2 \cos L}} =$$

$$\frac{\Gamma}{h^1} = \frac{10 \cos L}{2 \cos L + 1} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sin L}{2}}{2 \cos L + 1}$$

S

L

L

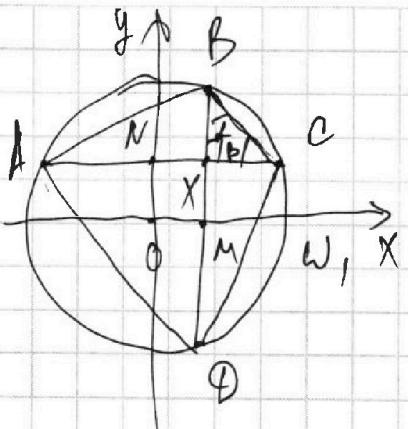


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BDC = L$$

$$\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ - L, \text{ m.k.}$$

$$BD \perp AC.$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AD}$$

→ Сумма длин дуг  $AB$  и  $CD$   
— плавная функция окружности,  
след.-но, постоянна.

→ Решим найти  $\max |AC + BD|$ .

$$OX^2 = (3\sqrt{2})^2 (\sin^2 L + \cos^2 L) =$$

$$= 18 = \text{const.}$$

→ МД ГМТ  $X$  — окруж-ть  
радиуса  $3\sqrt{2}$ .

$$M = BD \cap OX, N = AC \cap OY$$

$$BD = 2BM, AC = 2NC.$$

$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 L}$$

$$CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = \sqrt{25 - 18 \cos^2 L}$$

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

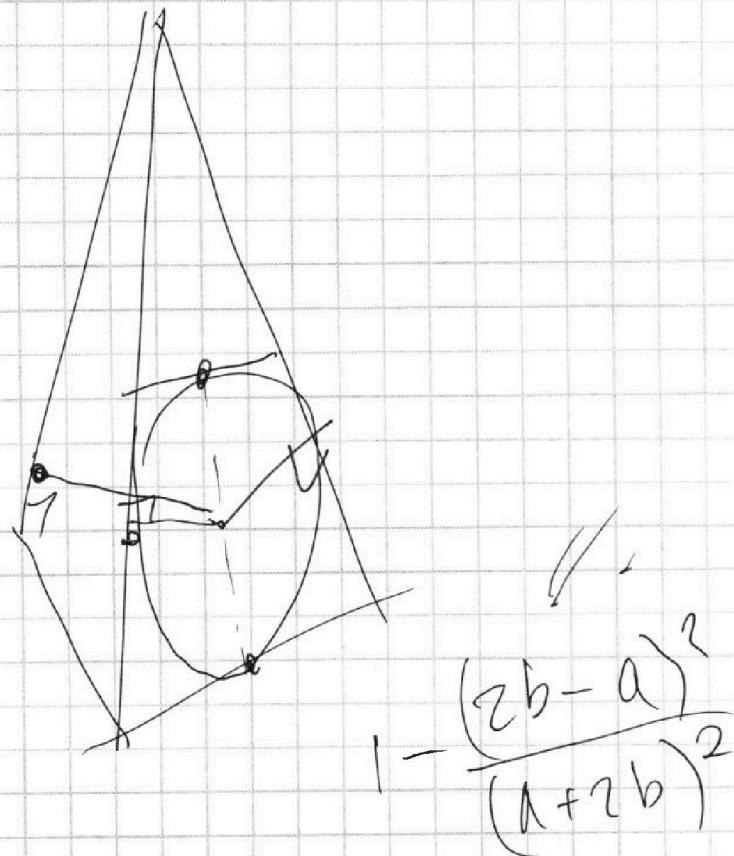
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1 - \frac{(2b-a)^2}{(a+2b)^2}$$

$$x^a + a = 2(1-x)^b$$

$$xa + a = 2b - 2xb.$$

$$x(a+2b) = 2b-a.$$

$$x = \frac{2b-a}{a+2b}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AB}{SA} = \cos L$$

$$\frac{MA}{SA} = \cos L \Rightarrow \angle MAF = L.$$

Ответ через  $\cos L$ :

$$4 / (2 \cos L + 1)^2$$

$$\cos L + 1$$

Без умножения  $\cos L$  ответ  
выведите нельзя.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S = S \left( 1 - \left( \frac{1}{2 \cos \alpha + 1} \right)^2 \right) = \frac{(1+x)^2 a}{2(1-x)b} = \frac{a+2b}{a-2b} x(a+2b)$$

$$= S \left( \frac{4\cos^2 f + 4\cos f}{(\sqrt{2}\cos f + 1)^2} \right)$$

$$\frac{S_{\text{em}}}{S_{\text{eon}}} = \frac{\varrho}{2b}$$

$$h' = \frac{a}{\cos t} \cdot \sin t =$$

$$= \frac{a \cdot t g f}{2}$$

$$\Rightarrow h_m = \frac{a}{2} \cdot \cancel{\phi B L} \cdot \underline{a^2 \sin \angle (\cos L + 1)}$$

$$\frac{a}{zb} = \cos k$$

$$\frac{8ab}{(a+2b)^2}$$

$$\frac{b}{2} \left( \frac{a+2b}{a-2b} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Gamma = \frac{\sqrt{S_{\text{бок}}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{h \cdot S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} \frac{(S_{\text{бок}} - S_{\text{бок}})^2}{(S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}})^2}$$

$$2\Gamma = \frac{2h S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} \left[ \frac{4b S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} \right] = 2a \cdot S_{\text{бок}}$$

$$\frac{4b S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} = \frac{2 S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} \quad 2b S_{\text{бок}} = a S_{\text{бок}}$$

$$\Rightarrow \frac{4b \cdot S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} =$$

$$\begin{aligned} & S_{\text{бок}} - \\ & - S_{\text{бок}} : \\ & \cdot \frac{(1 - 2S_{\text{бок}})}{(2S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}})} = a + a \cdot \left( 1 - \frac{2S_{\text{бок}}}{S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}} \right) = \\ & = 2(S_{\text{бок}} + S_{\text{бок}}) \end{aligned}$$



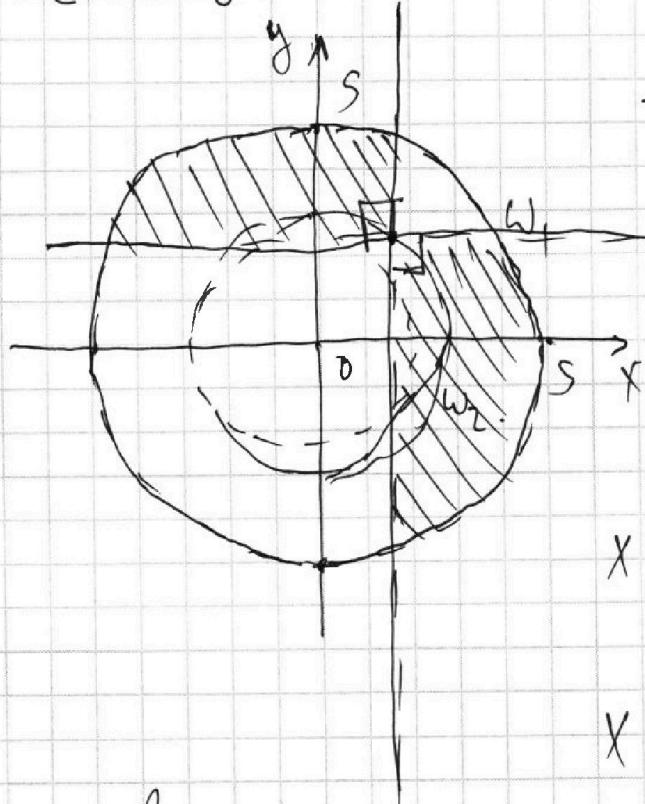
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin t)(y - 3\sqrt{2} \cos t) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$



Второе ур-е -  
- все точки  
внутри  $\omega_1$ ,  
(центр  $(0,0)$ , радиус  
- 5).

$$x \geq 3\sqrt{2} \sin t, y \leq 3\sqrt{2} \cos t$$

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin t, y \geq 3\sqrt{2} \cos t$$

→ второе ур-е ограничивает две четверти плоскости, которые имеют общую точку  $(3\sqrt{2} \sin t, 3\sqrt{2} \cos t)$ .

→ значит первое ур-е состоит из сущих двух четвертей круга  $\omega_1$  и двух четвертей круга  $\omega_2$ .

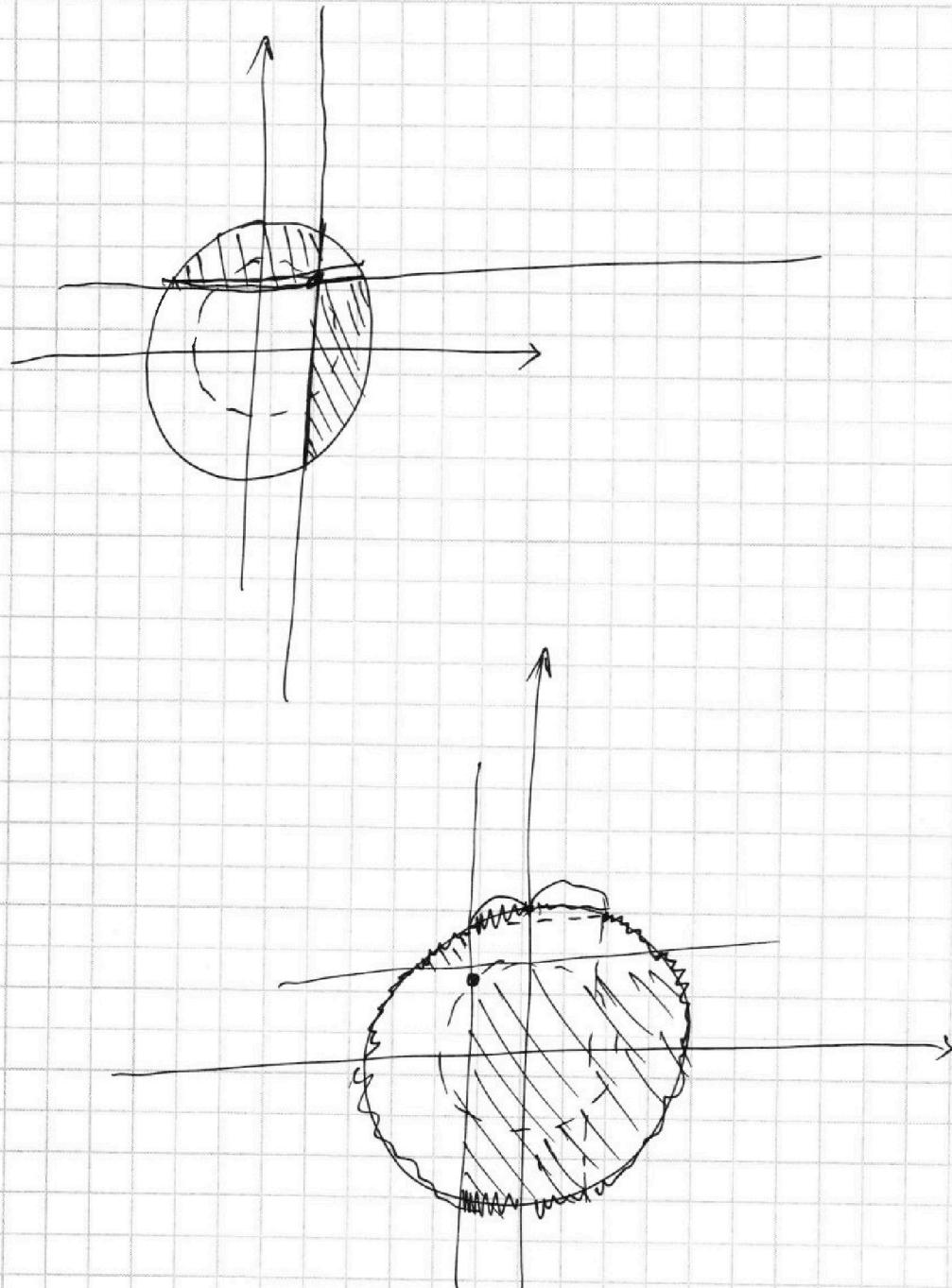


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\arg \sin \frac{x}{s} + \arg \cos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

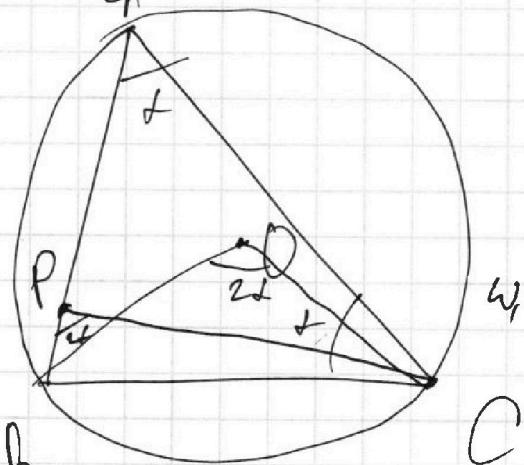
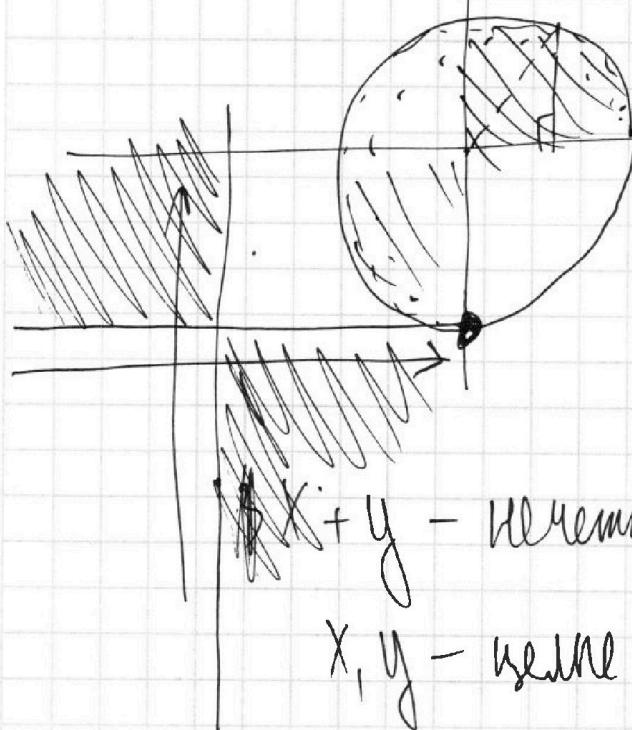
~~X~~ ~~Y~~ ~~Z~~

1  
 $4\pi$ .

$x^2 + y^2 \leq 2s$ .  $x, y \in \mathbb{Z}$ .  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ .

$$x \geq 3\sqrt{2} \sin L.$$

$$y \leq 3\sqrt{2} \cos L$$



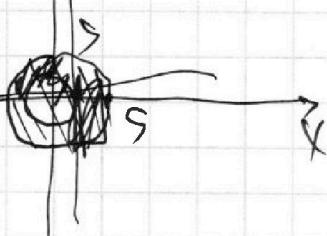
$$|x| \leq s. |y| \leq 4. AP = \frac{15}{2}.$$

$$BP = s.$$

$$AC = 9.$$

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin L.$$

$$y \geq 3\sqrt{2} \cos L.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x+y+2 > \cancel{2} \Rightarrow x+y+2 \neq 0.$$

$$\Rightarrow xy = (x-1)(y+1).$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$\Rightarrow x = y + 1.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow M &= x^3 - y^3 - 3xy = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - \\ &- y^3 - 3(y+1)y = 1.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } M = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-4 - 3 - 2 - 1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 2 \text{ } 3 \text{ } 4$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = \\ = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x.$$

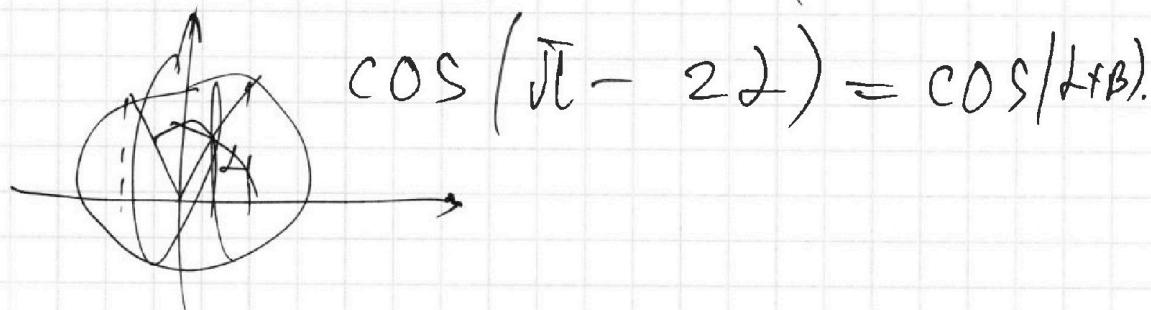
$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a.$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta.$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos(\alpha + \beta).$$

$$-(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta).$$

$$-\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \beta).$$



$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\alpha + \beta).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11.$$

101 - простое, 11 - простое.

$$A \cdot B \cdot C = x^2.$$

$$A : 101 \Rightarrow x^2 : 101 \Rightarrow x^2 : 101^2.$$

$$\Rightarrow B \text{ или } C : 101.$$

$$C < 100 \Rightarrow B : 101.$$

$$\text{П.к. } B < 1000 \text{ и одна цифра}$$

$B = 2$ , то  $B = 202$ .

$$\text{Задача} \Rightarrow 202 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a \cdot C = x^2.$$

$$a < 10 \Rightarrow a : 11$$

$$\Rightarrow x^2 : 11 \Rightarrow x^2 : 11^2.$$

$$\Rightarrow C : 11.$$

$$C < 100 \text{ и } C \text{ есть цифра 3}$$

$$\Rightarrow C = 33.$$

$$\Rightarrow 202 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 33 \cdot a = x^2.$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 6a = x^2 \Rightarrow 6a - \text{четные}$$

$$\Rightarrow a = 6, m \cdot k. \quad a < 10 \Rightarrow 0 \text{ или } a = 6. \quad A = 6666, \quad B = 202, \quad C = 33. \quad \text{Кб-м.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2b_1 b_2} \quad \overline{b_1 2b_2} \quad \overline{b_1 b_2 2}$$

$$C = \overline{3c} \quad \overline{c3}$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$\frac{x+y+2}{xy}$$

$$\frac{y+1+x+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

~~$\exists 0 \cdot 11 \cdot a = f$~~

$$111 \cdot a$$

$$\underbrace{11 \cdot 101}_{\text{простые множ.}}$$

нах

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 202 \cdot 33$$

$$11^2 \cdot 101^2 \cdot \textcircled{6a}$$

~~$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2$~~

$$= y^3 - 3(y+1)y \Rightarrow B \cdot 101$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow B = 202 \cdot \frac{(x-1)(y+1)}{xy} = xy$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$x = y + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассчитали вероятность, если билетов  $-t$ ,  
а  $11$ -ти билетов  $-x$ .

Случай, когда оба попали —

$$-\binom{x-2}{t-2} \cdot \text{Случай всего } - \binom{x}{t}$$

$$\Rightarrow \text{Вероятность} = \frac{\binom{x-2}{t-2}}{\binom{x}{t}} =$$

$$= \frac{(x-2)!}{(t-2)! (x-t)!} = \frac{t(t-1)}{x(x-1)}$$

$$\frac{x!}{(x-t)! \cdot t!}$$

$$\Rightarrow \text{Вероятность } \text{в начале} = \frac{12}{x(x-1)}.$$

$$\text{В конце} = \frac{t(t-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow t(t-1) = 2,5 \cdot 12 = 30.$$

$$t^2 - t - 30 = 0.$$

$$(t-6)(t+5) = 0. \quad t > 0 \Rightarrow t = 6.$$

Ответ:  $t = 6$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= \\ &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x. \end{aligned}$$

$$\pi x = \alpha, \pi y = \beta.$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha.$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$-(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$-\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow \pi - 2\alpha = \kappa + \beta + 2\pi K, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3\alpha + \beta = \pi - 2\pi K \#$$

$$3\pi x + \pi y = \pi - 2\pi K.$$

$$3x + y = 1 - 2K.$$

$$3x + y = 2t + 1, t = -K \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \text{Общем: } (x; 2t + 1 - 3x) \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \forall x \in \mathbb{R}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 9}{5} = 45.$$

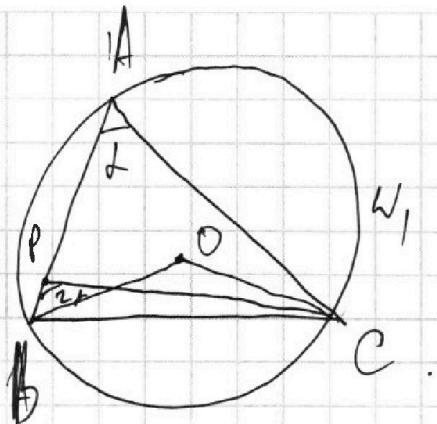
Ответ: 45

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5, AC = 9, S_{ABC} - ?$$

$$\angle A = l \Rightarrow \angle BOC = 2l$$

$$\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2l$$

Из м. синусов в  $\triangle APC$ :

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin 2l} &= \frac{AP}{\sin(180^\circ - (180^\circ - 2l) - l)} = \\ &= \frac{AP}{\sin l} \Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{\sin 2l}{\sin l} = \\ &= \frac{2 \sin l \cos l}{\sin l} = 2 \cos l. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos 2l = \frac{AC}{2AP} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

$$\Rightarrow \sin l = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad (\text{м. к. л - острый})$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin l}{2} = \frac{\left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} =$$

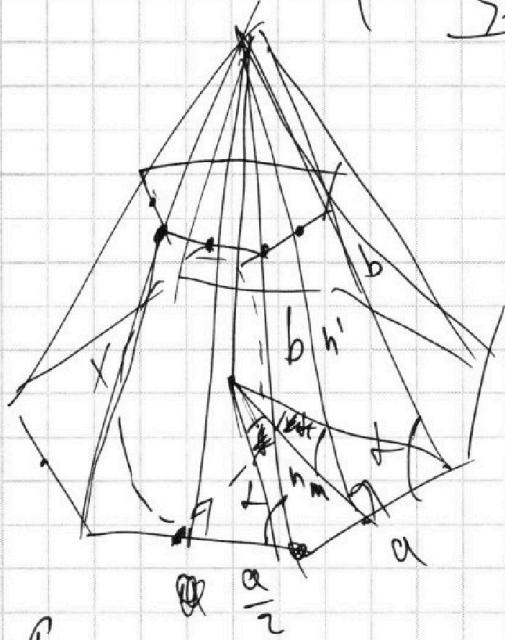
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b \cdot \frac{4S}{S + S_{бок}} = a \cdot \frac{(2S + 2S_{бок})^2 S}{S + S_{бок}}$$



$$S_{бок} =$$

$$\frac{h_m}{n} = \cos \varphi.$$

$$\frac{b}{\frac{S}{S_{бок}}} = \cos \varphi$$

$$\frac{b}{h} = \frac{S}{S + S_{бок}}.$$

$$\frac{a}{2b} = \cos \varphi.$$

$$4b \cdot S = h \cdot S \\ = 2a \cdot S_{бок}. \quad \Gamma = \frac{h \cdot S}{S + S_{бок}}.$$

$$2bS = b \cdot \frac{4S}{S + S_{бок}} \neq a + \text{[redacted].}$$

$$a \cdot \left( 1 - \frac{2S}{S + S_{бок}} \right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AC + BD = 2 \left( \sqrt{2S - 18 \sin^2 L} + \sqrt{2S - 18 \cos^2 L} \right).$$

//  
S.

$$S = 2 \left( \sqrt{7 + 18 \cos^2 L} + \sqrt{2S - 18 \cos^2 L} \right)$$

$$\leq 2 \sqrt{2 \cdot \left( \sqrt{7 + 18 \cos^2 L} \right)^2 + \left( \sqrt{2S - 18 \cos^2 L} \right)^2} =$$

$$= 2 \sqrt{2 \cdot (7 + 2S)} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{64} = 16.$$

Равенство при  $7 + 18 \cos^2 L = 2S - 18 \cos^2 L$

$$36 \cos^2 L = 18.$$

$$\cos^2 L = \frac{1}{2}$$

$$\cos L = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \Rightarrow L = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi k}{2},$$

где  $k$  - целое.

$$\Rightarrow \max(\text{периметр}) = \frac{2\pi r}{2} + 16 = 5\pi + 16.$$

Ответ:  $5\pi + 16$ .