



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} \leq \pi.$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Осталось рассмотреть случай равенства.

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5.$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi \Rightarrow \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4.$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ и } y=-4 \Rightarrow (5; -4) - \text{не подх.}$$

Заметим, что $|x| \leq 5$ и $|y| \leq 4$,

а также $3x+y$ — нечет, что $\Leftrightarrow$
 $x+y$ — нечет.

Рассчитаем число вариантов:

$x = -5$ — для y 5 вар-ов.

$x = -4$ — для y 4 вар-та.

$x = -3$ — 5 вар-ов.

$x = -2$ — 4 вар-та

$x = -1$ — 5.

$x = 0$ — 4

$x = 1$ — 5

$x = 2$ — 4

$x = 3$ — 5

$x = 4$ — 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = 5 - 4$ вер-та, т.к $(5; 4)$ - не подходит.
→ всего решений:

$$5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 =$$
$$= 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 25 + 24 = 49.$$

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~10~~ *одна*

$$11 - 11111 - x$$

$$\binom{x-2}{2} \cdot \binom{x}{4}$$

$$\frac{(x-2)!}{2! (x-4)!} \cdot \frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!}$$

$$\frac{\cancel{(x-2)!}}{2! \cancel{(x-4)!}}$$

$$\frac{\cancel{x} \cancel{(x-1)} (x \cdot)}{\cancel{(x-4)!} \cdot 4!}$$

$$\frac{12}{x(x-1)}$$



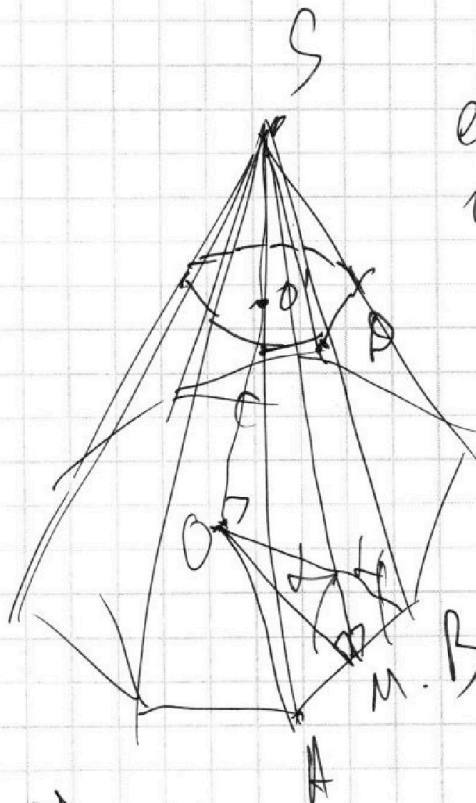
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что
если $ABCD$ — боковая
грань нашей пирамиды,
то $ABCD$ — описан.

Пусть h — высота
из S на $ABCD$ — то
осн-я, а r — радиус
впис-й окруж-ти.

$$\Rightarrow V_{\text{всей пирамиды}} = \frac{1}{3} r \cdot (S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}) =$$

$$= \frac{h \cdot S_{\text{осн}}}{3}, \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}}$$

O — центр вписанной о-я, O' — центр
вершиной:

$$\Rightarrow \frac{OO'}{SO} = \frac{r}{h} = \frac{AC}{SA}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 3.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{AC}{SA} = \frac{2S_{OAC}}{S_{OAC} + S_{OBC}}$$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{SO'}{SO} = \frac{h-2r}{h} = 1 - \frac{2S_{OAC}}{S_{OAC} + S_{OBC}}$$

$$\Rightarrow AB + CD \neq AC + BD$$

$$AB \left(2 + \frac{2S_{OAC}}{S_{OAC} + S_{OBC}} \right) = \frac{4S_{OAC}}{S_{OAC} + S_{OBC}} \cdot SA$$

$$AB \frac{2S_{OBC}}{S_{OAC} + S_{OBC}} = \frac{4S_{OAC}}{S_{OAC} + S_{OBC}} \cdot SA$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{SA} = \frac{2S_{OAC}}{S_{OBC}}$$

$$\frac{AB}{SA} = \frac{2S_{OAB}}{S_{SAB}} = 2\cos L, \text{ где } L = \angle OMS, \text{ м - середина } AB.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{a}{2}}{h'} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{a \tan \alpha}{2}$$

$$S_m = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{2r}{h'} = \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha + 1}$$

$$h_m^* = \frac{a \tan \alpha \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2} \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha + 1}$$

$$\Rightarrow S_{och} = \frac{a^2 \sin \alpha}{4}$$

$$\Gamma = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2 \tan \alpha}{4}}{a + \frac{a}{2 \cos \alpha}} =$$

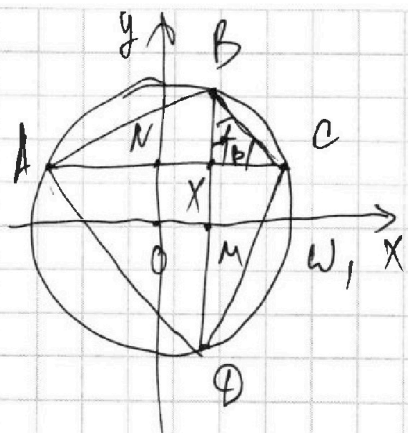
$$\frac{\Gamma}{h'} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos \alpha + 1} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sin \alpha}{2}}{2 \cos \alpha + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DBC = \angle$$

$$\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ - \angle, \text{ т.к.}$$

$$BD \perp AC.$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AD}$$

$\Rightarrow$ Сумма дуг дуг AB и CD — половина дуг окружности, след-но, постоянна.

$\Rightarrow$ Дост-но найти $\max |AC + BD|$.

$$OX^2 = (3\sqrt{2})^2 (\sin^2 \angle + \cos^2 \angle) =$$

$$= 18 = \cos^2 \angle.$$

$\Rightarrow X \in \Gamma_{MT} \quad X$ — окруж-ть радиуса $3\sqrt{2}$.

$$M = BD \cap OX, \quad N = AC \cap OY$$

$$BD = 2BM, \quad AC = 2NC.$$

$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \angle}.$$

$$CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \angle}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

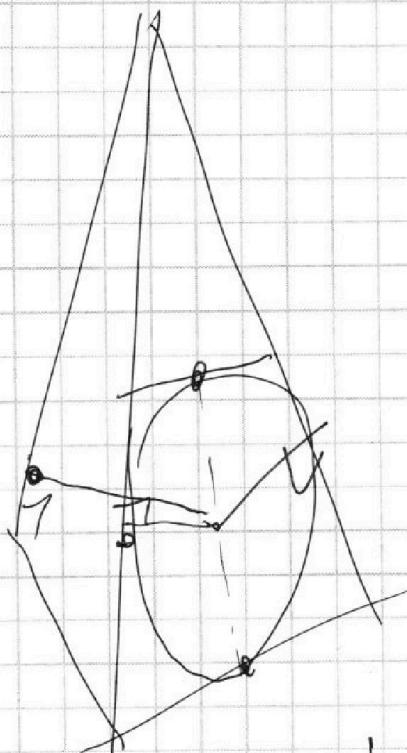
5
☐

6
☐

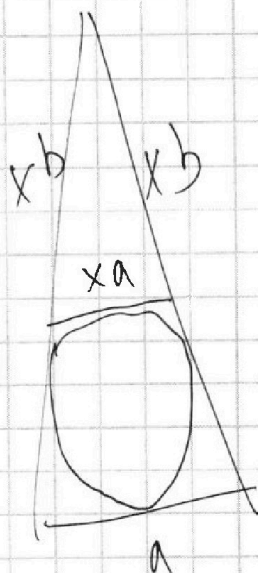
7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1 - \frac{(2b-a)^2}{(a+2b)^2}$$



$$xa + a = 2(1-x)b$$

$$xa + a = 2b - 2xb.$$

$$x(a+2b) = 2b-a.$$

$$x = \frac{2b-a}{a+2b}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AB}{2SA} = \cos L.$$

$$\frac{MA}{SA} = \cos L \Rightarrow \angle MAS = L.$$

Ответ через $\cos L$:

$$\frac{4/(2\cos L + 1)^2}{\cos L + 1}.$$

Без значения $\cos L$ ответ выразить нельзя.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

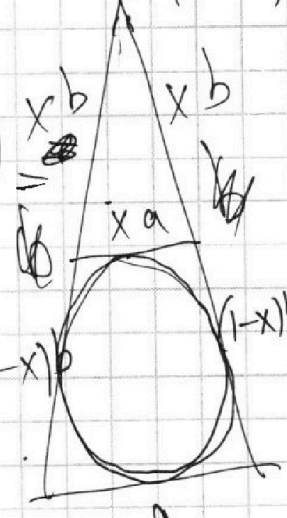
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S = S \left(1 - \left(\frac{1}{2 \cos L + 1} \right)^2 \right) = \begin{aligned} & a + xa = 2b - 2xb \\ & (1+x)a = \\ & = 2(1-x)b. \\ & a - 2b = x(a+2b) \end{aligned}$$

$$= S \left(\frac{4 \cos^2 L + 4 \cos L}{(2 \cos L + 1)^2} \right)$$

$\frac{S_{\text{очн}}}{S_{\text{ок}}} = \frac{a}{2b}$

$\frac{a^2 \sin^2 L (1-x)^2}{4 \cos L}$



$$h' = \frac{a}{\cos L} \cdot \sin L =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} L$$

$$\Rightarrow h_m = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} L \cdot \frac{4 \cos^2 L + 4 \cos L}{(2 \cos L + 1)^2} =$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 L (\cos L + 1)}{(2 \cos L + 1)^2}$$

$$\frac{a}{2b} = \cos L \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2 \sin^2 L}{(a+2b)^2} = 1 - \frac{(a-2b)^2}{(a+2b)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Gamma = \frac{V}{S_{\text{нов}}} = \frac{h \cdot S_{\text{осн}} \cdot (S_{\text{бок}} - S_{\text{осн}})^2}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} (S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}})^2}$$

$$2\Gamma = \frac{2h S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}} \left(4b S_{\text{осн}} = 2a \cdot S_{\text{бок}} \right)$$
$$\frac{4 S_{\text{бок}} S_{\text{осн}}}{(S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}})^2} = \frac{2 S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}} \quad 2b S_{\text{осн}} = a S_{\text{бок}}$$

$$\Rightarrow \frac{4b \cdot S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}} =$$
$$\frac{S_{\text{бок}} - S_{\text{бок}}}{2(S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}})} = a + a \cdot \left(1 - \frac{2 S_{\text{осн}}}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}} \right) =$$
$$\frac{(1 - 2 S_{\text{осн}})}{2(S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}})} = \frac{2 S_{\text{осн}}}{2(S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}})}$$
$$= \frac{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

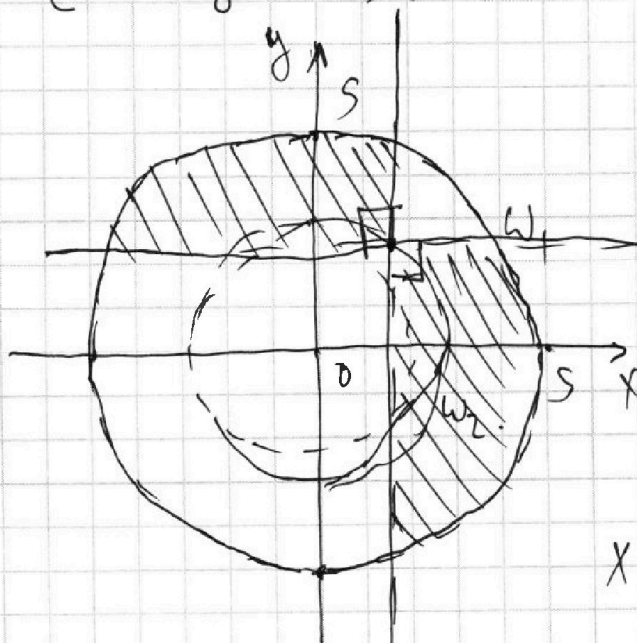


СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin t)(y - 3\sqrt{2}\cos t) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$



Второе ур-е -
- все точки
внутри ω_1 ,
(центр $(0,0)$, радиус - 5).

$$x \geq 3\sqrt{2}\sin t, y \leq 3\sqrt{2}\cos t$$

или

$$x \leq 3\sqrt{2}\sin t, y \geq 3\sqrt{2}\cos t$$

→ Второе ур-е ограничивает две четверти плоскости, которые имеют общую точку $(3\sqrt{2}\sin t, 3\sqrt{2}\cos t)$.
→ Искомый периметр состоит из суммы длин двух хорд ω_1 и двух дуг ω_1 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

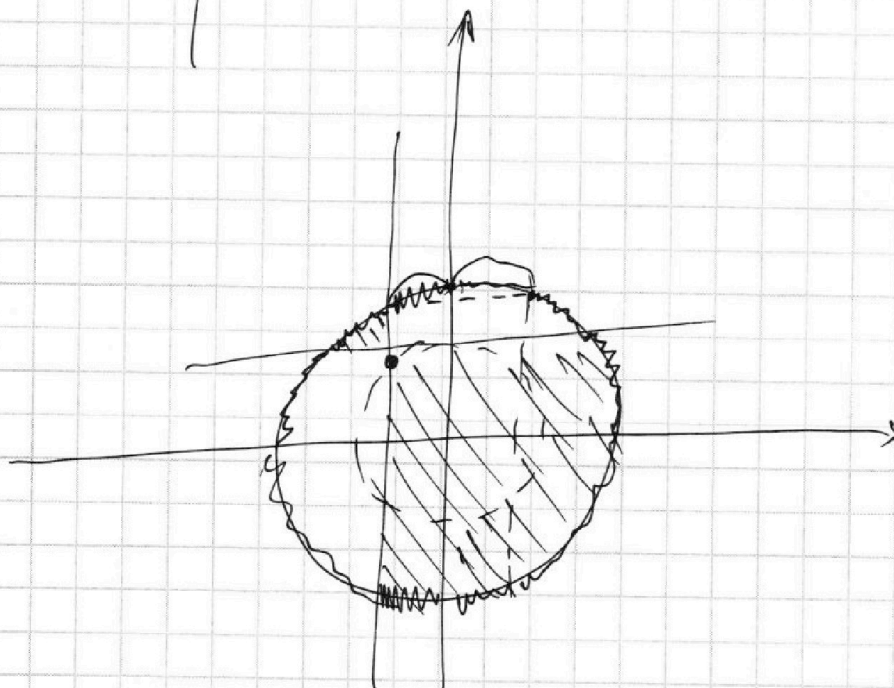
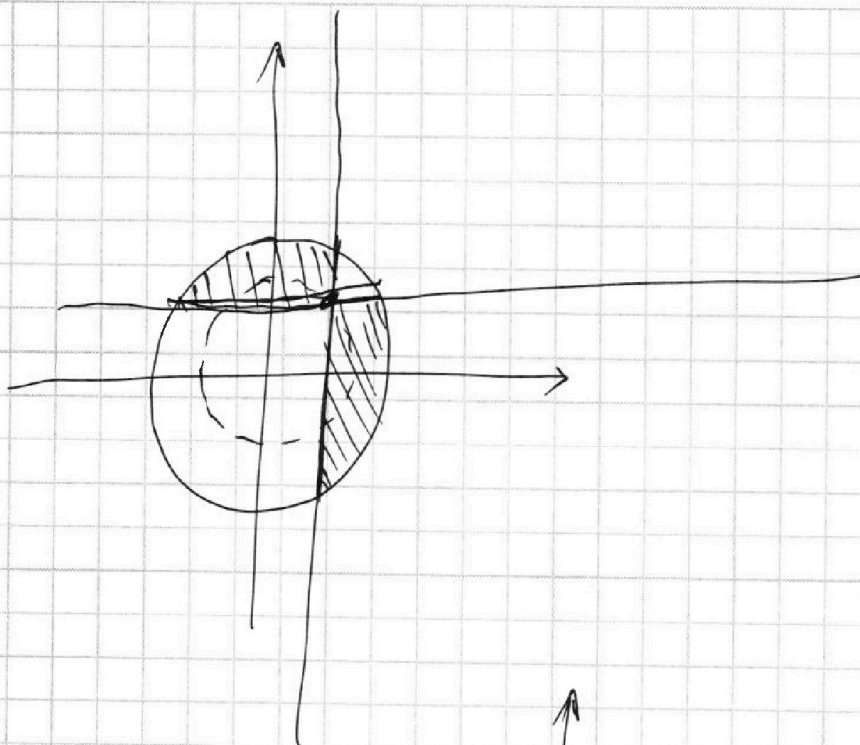
5 ☐

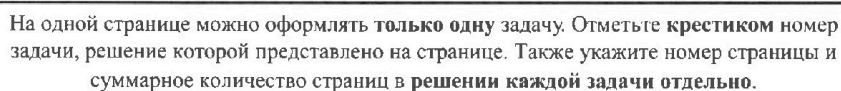
6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





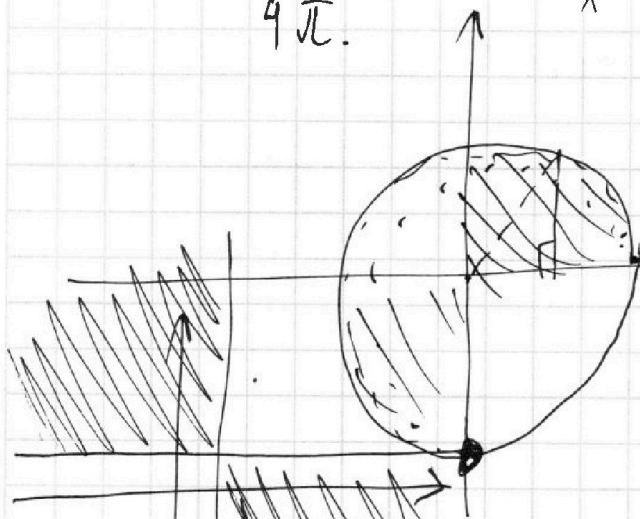
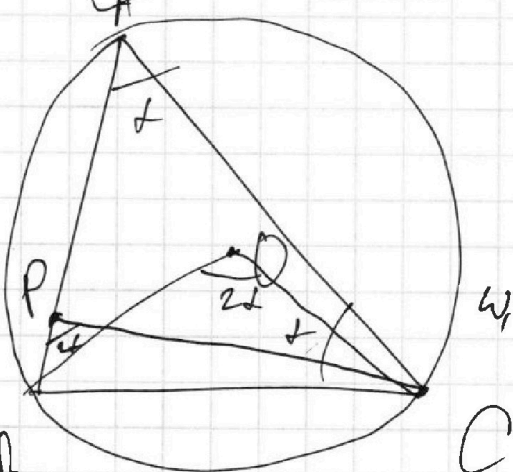
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + y^2$$
$$x, y \in \mathbb{Z}.$$

$\sin^2 18^\circ$
 $\cos^2 18^\circ$


$$x \geq 3\sqrt{2} \sin L.$$
$$y \leq 3\sqrt{2} \text{ cm}$$


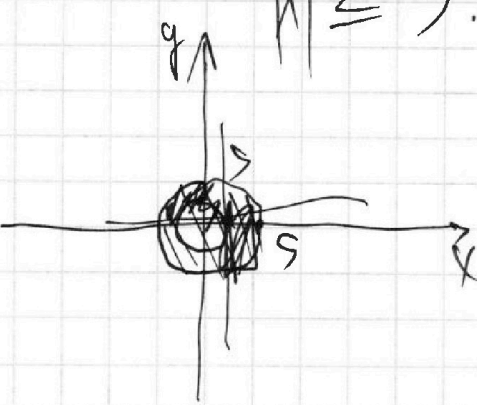
~~$x + y$~~ - нечетное.
 x, y - четные.

$|x| \leq 9, \quad |y| \leq 4.$

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = S$$

$$AC = 9$$



$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha.$$

$$y \geq 3\sqrt{2} \cos t.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x+y+2 > \cancel{2} \Rightarrow x+y+2 \neq 0.$$

$$\Rightarrow xy = (x-1)(y+1).$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$\Rightarrow x = y+1.$$

$$\Rightarrow M = x^3 - y^3 - 3xy = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3(y+1)y = 1.$$

$$\text{Ответ: } M = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{-4 \ -3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$$

$$= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x.$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a.$$

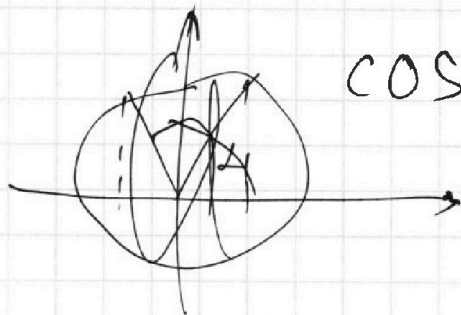
$$\sin^2 a + \sin a \sin b = \cos^2 a + \cos a \cos b.$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = \cos(a + b).$$

$$-(\cos a \cos a - \sin a \sin a) = \cos(a + b).$$

$$-\cos(2a) = \cos(a + b).$$

$$\cos(\pi - 2a) = \cos(a + b).$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11$.
 101 - простое, 11 - простое.

$$A \cdot B \cdot C = x^2.$$

$$A : 101 \Rightarrow x^2 : 101 \Rightarrow x^2 : 101^2.$$

$$\Rightarrow B \text{ или } C : 101.$$

$$C < 100 \Rightarrow B : 101.$$

П.к. $B < 1000$ и одна цифра
 $B = 2$, то $B = 202$.

$$\Rightarrow 202 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a \cdot C = x^2.$$

$$a < 10 \Rightarrow a : 11$$

$$\Rightarrow x^2 : 11 \Rightarrow x^2 : 11^2.$$

$$\Rightarrow C : 11.$$

$C < 100$ и у C есть цифра 3
 $\Rightarrow C = 33$.

$$\Rightarrow 202 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 33 \cdot a = x^2.$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 6a = x^2. \Rightarrow 6a - \text{полный}$$

$\Rightarrow a = 6$, т.к. $a < 10$. $\Rightarrow$ Ответ: $A = 6666$ кв-м.
 $B = 202, C = 33$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaaa}$$

$$B = \overline{2b_1b_2} \quad \overline{b_12b_2} \quad \overline{b_1b_22}$$

$$C = \overline{3c} \quad \overline{c3}$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{(y+1)(x+1)+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\overline{1111} \cdot a$$

$$\frac{11 \cdot 101}{\text{прост.} \quad \text{прост.}} = 1011$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot 202 \cdot 33$$

$$11^2 \cdot 101^2 \cdot (6a)$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = (y+1)^3$$

$$-y^3 - 3(y+1)y \Rightarrow B : 101$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

$$xy - y + x - 1 = xy$$

$$x = y + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассчитаем вероятность, если билетов - t ,
и 11-машин - x .

Случаев, когда оба попали —
— $\binom{x-2}{t-2}$. Случаев всего — $\binom{x}{t}$

$$\Rightarrow \text{Вероятность} = \frac{\binom{x-2}{t-2}}{\binom{x}{t}} =$$

$$= \frac{(x-2)!}{(t-2)! (x-t)!} \cdot \frac{t!}{x!} = \frac{t(t-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow \text{В начале} = \frac{12}{x(x-1)}.$$
$$\text{В конце} = \frac{t(t-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow t(t-1) = 2,5 \cdot 12 = 30.$$
$$t^2 - t - 30 = 0.$$

$$(t-6)(t+5) = 0. \quad t > 0 \Rightarrow t = 6.$$

Ответ: $t = 6$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a) \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= \\ &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x. \end{aligned}$$

$$\pi x = \alpha, \quad \pi y = \beta.$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha.$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$-(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$-\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow \pi - 2\alpha = \alpha + \beta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3\alpha + \beta = \pi - 2\pi k$$

$$3\pi x + \pi y = \pi - 2\pi k.$$

$$3x + y = 1 - 2k.$$

$$3x + y = 2t + 1, \quad t = -k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (x; 2t + 1 - 3x) \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \forall x \in \mathbb{R}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{\frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{25 \cdot 9}{5} = 45.$$

Ответ: 45



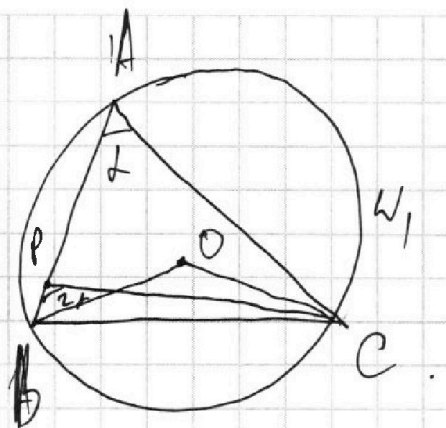
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{13}{2}, BP = 5, \\ AC = 9.$$

$$S_{ABC} = ?$$

$$\angle A = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \\ \Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$$

Из т. синусов в $\triangle APC$:

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha)} = \\ = \frac{AP}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \\ = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{9}{13} = \frac{3}{5}.$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad (\text{т.к. } \alpha - \text{острый})$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\left(\frac{13}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}}{2} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

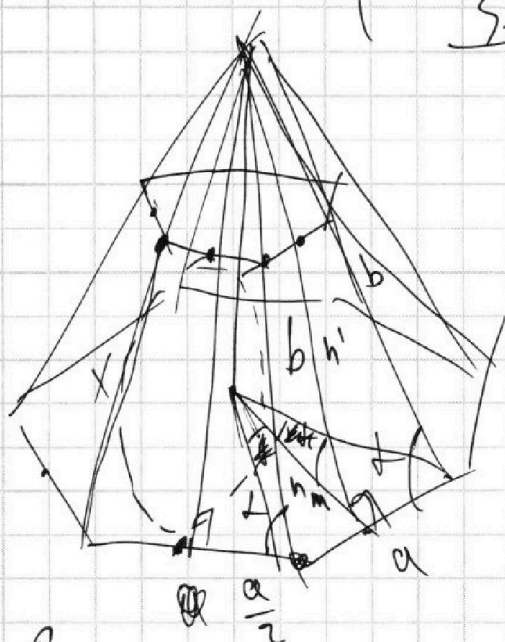
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b \cdot \frac{4S}{S+S_{бок}} = a \cdot \left(\frac{2S + 2S_{бок}}{S+S_{бок}} \right)$$



$$S_{бок} =$$

$$\frac{h_m}{h'} = \cos \alpha$$

$$\frac{S}{S_{бок}} = \cos \alpha$$

$$\frac{h}{a} = \frac{S}{S+S_{бок}}$$

$$\frac{a}{2b} = \cos \alpha$$

$$4b \cdot S =$$

$$= 2a \cdot S_{бок} \cdot \frac{h \cdot S}{S+S_{бок}}$$

$$2bS =$$

$$= a \cdot S_{бок}$$

$$b \cdot \frac{4S}{S+S_{бок}} = a +$$

$$a \cdot \left(1 - \frac{2S}{S+S_{бок}} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AC + BD = 2 \left(\sqrt{25 - 18 \sin^2 t} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 t} \right)$$

//
S.

$$S = 2 \left(\sqrt{7 + 18 \cos^2 t} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 t} \right)$$

$$\leq 2 \sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{7 + 18 \cos^2 t} \right)^2 + \left(\sqrt{25 - 18 \cos^2 t} \right)^2} =$$

$$= 2 \sqrt{2 \cdot (7 + 25)} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{64} = 16.$$

равенство при $7 + 18 \cos^2 t = 25 - 18 \cos^2 t$

$$36 \cos^2 t = 18.$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}$$

$$\cos t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi k}{2},$$

где k — целое.

$$\Rightarrow \max(\text{периметр}) = \frac{2\pi r}{2} + 16 = 5\pi + 16.$$

Ответ: $5\pi + 16$.