



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = \overline{aaaa} = a \cdot \cancel{aaa} + 111 \Rightarrow ABC : \cancel{aaa} + 111^2 = 11 \cdot 101^2$$

м.к. это полный квадрат

2) 101 - простое число $\Rightarrow B:101$ (м.к. C - губкачное, а $a < 10$)
ЧИФРЫ

3) у В есть цифра 7 $\Rightarrow B = \underline{\underline{707}}$ (других вариантов нет)

4) ~~Проверяет вариант А~~ а ~~вариант А:~~

$$a = 5 \Rightarrow A = \underline{\underline{555}}$$

4) $B \nmid 11 \Rightarrow C$ должно делиться на 11; C содержит цифру 1 $\Rightarrow C = \underline{\underline{11}}$

$$5) \text{Умн}, A \cdot B \cdot C = \underbrace{a \cdot 101 \cdot 11}_{A} \cdot \underbrace{\underline{\underline{707}}}_{B} \cdot \underbrace{\underline{\underline{11}}}_{C} = a \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 -$$

- это полный квадрат,
 значит $a = 7$

$$A = \underline{\underline{7777}}$$

Ответ: (7777; 707; 11)

~~101~~
~~101~~
~~101~~
~~101~~
~~101~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x > 0, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

⇓

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = \cancel{xy} - 4x - 4y = 16$$

$$4x - 4y = 16$$

$$\underline{\underline{x-y=4}}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4(x^2 + y^2) - 8xy = \\ &= 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64 \end{aligned}$$

Объем: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sin^2 y - \sin^2 x$

$$a) (\sin^2 y - \sin^2 x) \sin^2 y = (\cos^2 y + \cos^2 x) \cdot \cos^2 y$$

$$\sin^2 y - \cancel{(\cos^2(y-x) + \cos^2(y+x))} = \cos^2 y + \frac{1}{2} (\cos^2(y+x) + \cos^2(y-x))$$

$$\cos 2\pi y + \cos 2\pi(y-x) = 0$$

$$\cos 2\pi y = \cos(2\pi(1-y+x))$$

$$\begin{cases} 2\pi y = 2\pi(1-y+x) + 2\pi n \\ 2\pi y = \pi(y-x-1) + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+1}{3} + 2n \\ y = -x-1 + 2n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Получаем все пары чисел вида $(m; \frac{m+1}{3} + 2n) \cup (m; -m-1+2n)$

где $m, n \in \mathbb{Z}$

$$d) \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

ОДЗ:

$$1) 0 < \frac{x}{7} < \pi$$

$$\arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$2) 0 < x < 7\pi$$

$$\frac{x}{7} > \cos(\arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{7} > \frac{y}{4}$$

$$-2\pi < y < \pi$$

Следовательно: $y = \frac{x+1}{3} + 2n$: $4x > \frac{7}{3}x + \frac{7}{3} + 14n$

$$x\left(\frac{19}{3}\right) > \frac{7}{3} + 14n$$

$$x > \frac{7+42n}{19}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть m - число одиннадцатиклассников, тогда в начале месяца вероятность попадания на концерт у Васи, и Пети будет:

$$P_1 = \frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1}$$

Пусть n -число билетов выданных Васе, тогда вероятность:

$$P_2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1}$$

По условию задачи $P_2 = 11P_1$

$$\frac{4}{m} \cdot \frac{3}{m-1} \cdot 11 = \frac{n(n-1)}{m(m-1)}$$

$$n^2 - n = 132$$

$$n = \cancel{12}$$

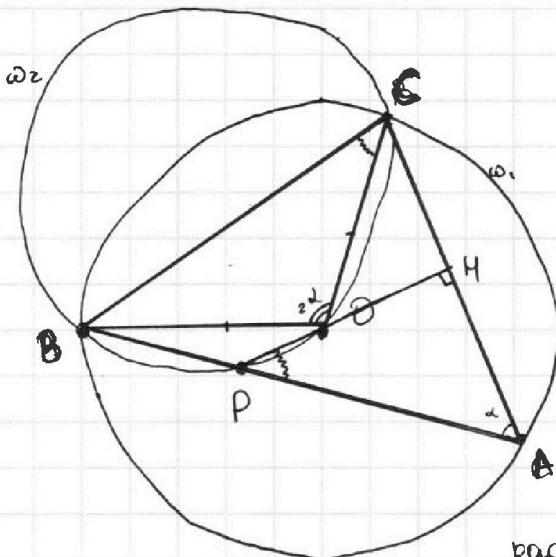
$n = 12$ - неуд, т.к. значение нуль

Объем: 12 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$S_{ABC} - ?$$

$$AP = 16, BP = 8, AC = 22$$

Решение:

1) $\angle BAC = d \Rightarrow \angle BOC = 2d$ (с центральными, опирающимися на BC)

2) $\triangle BOC$ - ртс, м.к. $OB = OC$ - радиусы $\Rightarrow \angle BCO = \frac{180 - 2d}{2} = 90 - d$

$$\text{радиусы} \Rightarrow \angle BCO = \frac{180 - 2d}{2} = 90 - d$$

3) Точки BPOC лежат на $\omega_2 \Rightarrow \angle BPO = 180^\circ - \angle BCO = 90 + d$

4) $\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90 - d$ - смежные

5) Продолжим PO до пересечения с AC - точка H; получим, что

$$\angle KPA = 90 - d; \angle PAH = d \Rightarrow \angle PHA = 90^\circ;$$

6) Т.к. $PH \perp AC$ и $O \in PH \Rightarrow PH$ - серединный перпендикуляр к AC.

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AC = 11$$

$$7) BH \Delta AHI \text{ по г. Пифагора: } PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{(16-11)(16+11)} = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$$

$$\begin{array}{r} -256 \\ -121 \\ \hline 135 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \hline 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\sin d = \frac{PH}{AP} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$8) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin d = \frac{1}{2} (AP + BP) \cdot AC \cdot \sin d = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

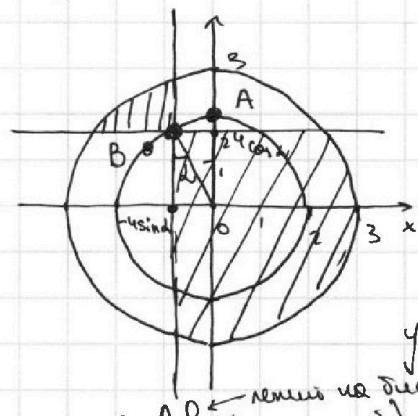
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin \alpha)(y-4\cos \alpha) \leq 0 & \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

окр. с центром $(0;0)$ и $r=6$

окр. с центром $(0;0)$ и $r_1=4$

① точка с координатами $(4\sin \alpha; -4\cos \alpha)$ лежит на окр. с центром $(0;0)$ и $r_1=4$, а графиком будет 2 четверти получившиеся (нижние правые и верхние левые) ограничение премежки $x = -4\sin \alpha$ и $y = 4\cos \alpha$



II. - фигура $\mathbb{F}(\alpha)$

С точки зрения симметрии максимум длины периметра Φ будет

у фигуры, образованной точкой лежащей на дуге AB (диаметре). Периметр фигуры

состоит из 2-х дуг большей окружности и 2-х пересекающихся премежек, причём из-за симметрии сумма длин дуг $\angle \alpha$ равна $\pi r_2 = 6\pi$ (половина длины окр.). Значит периметр фигуры зависит только от длины 2-х премежек. Сумма их длин monotonно изменяется и проходит через 0 в $\alpha = 90^\circ$. Рассмотрим 2 случая изменения:

1) $\alpha = 45^\circ$ (точка B): длина премежек равна в силу симметрии и равна $4 \cdot \sqrt{36 - (2\sqrt{2})^2} = 4 \cdot \sqrt{28} = 8\sqrt{2}$

2) $\alpha = 0^\circ$ (точка A): одна из премежек диаметр, а другая боковая равна $2 \cdot \sqrt{36 - 16} = 4\sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Сравнив величины 6-ти-килограммовых и 8-килограммовых супчиков

$$1) \quad > \quad 2)$$

$$8\sqrt{7} > 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{7 \cdot 64} > \sqrt{5 \cdot 16}$$

\Rightarrow Максимум и будет при $d = 45^\circ$
и равен $8\sqrt{7} + 6\sqrt{5}$

из симметрии имеем

Объем: $8\sqrt{7} + 6\sqrt{5}$, $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \cdot n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ подходит $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0_1 U_{\perp} = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$0_1 U = \sqrt{r^2 - b^2}$$

$$M U = \sqrt{a^2 + M U_1^2} = \sqrt{a^2 + 4ab}$$

$$M M^2 = \cancel{a^2}^2 + b^2 - 2 \cdot \cancel{a^2}^b \cdot b \cdot \cos \delta$$

$\frac{NM}{NM}$

$$\cos \delta = \frac{a^2 + 4ab - a^2 - 2ab - b^2 - b^2}{-2b \cdot (ab)} = \frac{b^2 - ab}{b(a+b)}$$

$$\frac{b-a}{a+b}$$

$$\sin \delta = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \frac{a}{b}}$$

$$\frac{b-a}{\sqrt{b}} = \frac{b-a}{a+b}$$

находим значение a и b и ищем угол

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b-a}}{a+b}$$

$$a+b = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = b^2 - a^2$$

$$2a^2$$

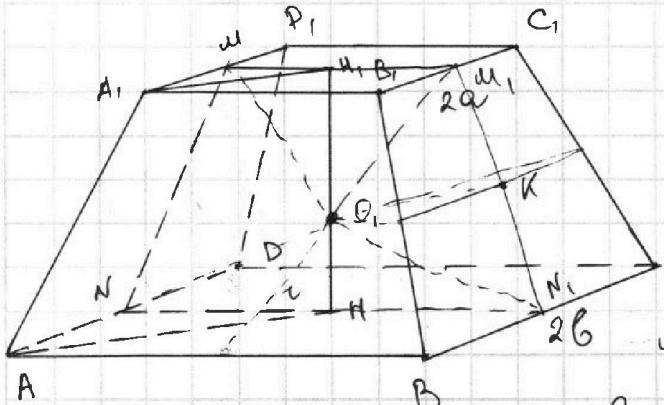


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть сторона верхнего основания $2a$, а нижнего $2b$ (это квадрат, т.к. пирамида правильная)

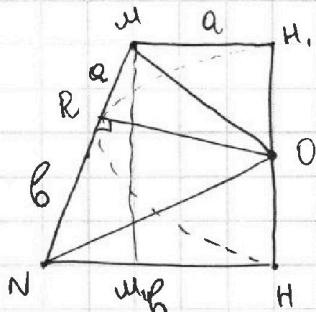
2) Рассмотрим прямоугольную трапецию MN, NK : $MN = Q$,

$NK = b$; M -середина A_1P_1 , N -середина A_1D_1 .

В этой плоскости шар ω касается ~~стороны~~ грани A_1A, P, D : $OR = ON = OH$ - радиусы; $NR > NK > b$ (касательные из 1-ой точки N), аналогично $MK = MN = a$. Перенесем MN , параллельно b т. $M \rightarrow M'$, $MN = M'N$, $MN^2 = M'N^2$

$$= MN^2 - M'N^2 = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = 2\sqrt{ab} -$$

- высота усеченной пирамиды



3) Рассмотрим грани AA_1P, u найдём AA_1 :

$$AA_1 = \sqrt{MN^2 + (b-a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + a^2 - 2(a-b)^2} = \\ = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = \sqrt{2(a+b)^2}$$

a) Рассмотрим $AA_1, A_1P \leq MN = a$ - исходный

Рассмотрим MN, NN, N : $S_{MNN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot 2(a+b) = 2(a+b)\sqrt{ab}$

$$S_{MNN} = MN \cdot NN \cdot \sin d = (a+b) \cdot 2b \cdot \sin d = 2(a+b)\sqrt{ab}$$

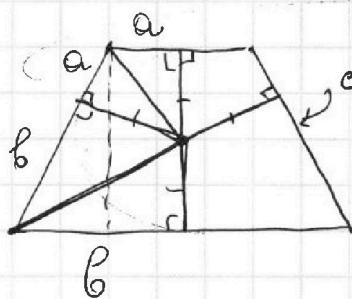
5) $O, K = \sqrt{ab}$; $r^2 = \sqrt{ab + \frac{a^2+b^2}{2} + ab} = \frac{a^2+b^2+4ab}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

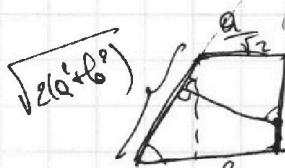
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



середина боковой грани



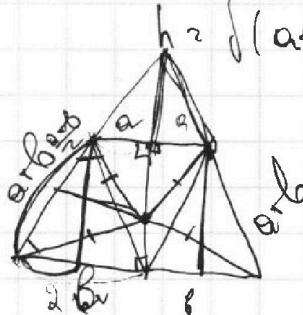
сторона ус. и.



$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{b-a}{\sqrt{2}}$$

$$h = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2}}, \sqrt{\frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{2}}$$



$$h = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = 2\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{3a^2 + 3b^2}{2} + ab}$$

$$2\sqrt{ab} (\sqrt{a+b})$$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot (2a + 2b) = h(ab) \frac{3a^2 + 3b^2 + 2ab}{2} = 4ab$$

$$\frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{2} = 0 \quad \sqrt{ab} (\sqrt{a+b}) \cdot \sin \angle$$

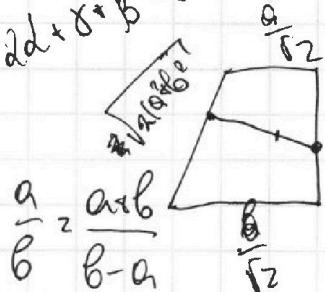
$$\sqrt{ab} \sin \angle = \sqrt{ab}$$

$$(a\sqrt{3} - b\sqrt{3})^2 = 0 \quad \sin \angle = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a^2 + x^2 = b^2 + y^2 \quad x+y = 2\sqrt{ab}$$

$$y = \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$2d + x + y = 2\sqrt{ab}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{a\sqrt{b^2 - x^2}}{b-a}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - b^2} = h^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

