



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- 3
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обойтись вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что Т.к. A состоит из однократных цифр и четырехциф. то $A = 1111 \cdot k$, где $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

Т.к. $A, B, C \in \mathbb{N}$ и $A \cdot B \cdot C$ - точный квадрат, то все простые входят в разложение числа $A \cdot B \cdot C$ в четной степени, т.к. в числе A 11 и 101

простые, а $k < 11 < 101$, то в разложении $B \cdot C$ тоже должно быть хотя бы по одному числу 11 и 101.

Поскольку C - двузначное (т.е. $C < 101$), то 101 входит в B, но поскольку B трехзначное и содержит единицу в своей записи, то B в точность 101. Т.е. $A = 11 \cdot 101 \cdot k$, $B = 101$

Тогда ~~B~~^C содержит в своей записи 11, а поскольку C имеет в своей записи цифру 5, то $C = 5$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 101 \cdot 5 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5^2, \text{ т.е. } k = 5$$

$$\text{т.е. } A = 5555, B = 101, C = 5$$

$$\text{Ответ: } (5555, 101, 5)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(y+3)(x-3)}, x, y \geq 0, x \neq 3$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{(x-3)}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Заметим что $x+y+1 > 0$, т.е. равенство
записано означает равенство знаменателей
(т.к. числители равны и не ноль)

$$xy = (x-3)(y+3); 3x - 3y - 9 = 0; x - y - 3 = 0$$

$$x = y+3; M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+3)^3 - y^3 - (y+3)y =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - y^2 - 3y = 8y^2 + 24y + 27, f(y) = 8y^2 + 24y + 27$$

Парабола ветви вверх, т.к. минимум достигается

$$\text{вершине } \frac{-24}{8 \cdot 2} = -\frac{3}{2} = -1,5, \text{ т.к. } y \geq 0, \text{ то } \text{ вершина}$$

$8y^2 + 24y + 27$ возрастает при всех $y \geq 0$, значит

$$M \in (f(0); +\infty), M \in (27; +\infty)$$

Ответ: $M \in (27; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В остальных случаях $\arccos x + \arccos y < 2\pi$

т.е.

$$x \in \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$$

$$y \in \{-9; -8; \dots; 8; 9\}$$

$$\arccos(\frac{x}{4}) \neq \pi$$

$$\arccos(\frac{y}{8}) \neq \pi$$

т.е.

$$x \neq 4$$

$$y \neq 8$$

$$(x, y) = \begin{cases} (1+2k-a, a) \\ (b; 3b-1-2n) \end{cases}$$

$$k, m, a, b \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим $x=4$, тогда $y \neq 8$ и у нас есть.

$$x = 1 + 2k - a = 4 \Rightarrow a = 1 + 2k - 4 = 2k - 3, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.е. } y = a \in \{-9; -7; -5; \dots; 7\} \quad \begin{matrix} \cancel{k=-3} \\ \cancel{k=-2} \\ \cancel{k=-1} \\ \cancel{k=5} \\ \cancel{k=6} \end{matrix} \quad (\text{8 пар})$$

Заметим, что для остальных четных x аналогично можно подобрать k , так, чтобы y было любым нечетным из $\{8, 9\}$ (10 пар)

Рассмотрим $x=3$, тогда y четные

$$x = 3 = 1 + 2k - a \Rightarrow a = 2k - 2, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.е. } y = a \in \{-8; \dots; 8\} \quad \begin{matrix} \cancel{k=3} \\ \cancel{k=5} \end{matrix}$$

Аналогично для любых нечетных x можно подобрать k так, чтобы $y = a \in \{-8; 8\}$ (~~четные~~) но 8 пар

$$\text{тогда суммарно пар } 8 + 10 + 8 = 26$$

$$\begin{matrix} x=4 & x=0 & x=1 \\ \cancel{x \neq 4} & \cancel{x=2} & \cancel{x=2} \end{matrix}$$

Ответ: а) См. решение "Ответ на пункт а"

б) 85

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \cdot \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) - \sin(\pi y) \sin(\pi x) = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi y) \cdot \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos(\pi y) \cdot \cos(\pi x) + \sin(\pi y) \cdot \sin(\pi x)$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$0 = \cos(2\pi x) + \cos(\pi y - \pi x)$$

$$0 = 2 \cos\left(\frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2}\right)$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0}$$

$$\boxed{\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0}$$

$$\boxed{\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{x = 1 + 2k - y, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{y = 3x - 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}}$$

~~х, у~~, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ неограничен по радиусу x, y движение

$$\boxed{(1+2k-\alpha, \beta)}$$

$k, n \in \mathbb{Z}$ Ответ на пункте а

$$a) \arccos \frac{x}{9} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi, x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(x, y) = \begin{cases} (1+2k-\alpha, \beta) \\ (6, 3\beta - 1 - 2n) \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}, \text{заметив, что } (x, y) \text{ радиусом} \\ \text{заткосте}$$

аргумент $\arccos \in [-1; 1]$ т.е. $\frac{x}{9}, \frac{y}{9} \in [-1; 1]$

$$\text{т.е. } x \in \{-9, -3, \dots, 3, 9\}; y \in \{-9, -3, \dots, 3, 9\}$$

$$\arccos(\alpha) \in [-\pi; \pi] \text{ т.е. } \arccos(\alpha) + \arccos(\beta) = 2\pi$$

только при $\arccos \alpha = \pi = \arccos \beta$

ан. с. место



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Усть однозначных чисел x , общее стоя больше на y , $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$

• Внешне задача: Вер-ть то, что Петя и Вася оба пойдут на концерт $\frac{4}{x} \cdot \frac{4-1}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$

• Внутри задача: Вер-ть то, что Петя и Вася оба пойдут на концерт $\frac{4+y}{x} \cdot \frac{4+y-1}{x-1} = \frac{(4+y)(3+y)}{x \cdot (x-1)}$

Из условий задачи известно, что

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)} \quad | \cdot (x-1)x \neq 0,$$

$$42 = (4+y)(3+y) ; y^2 + 7y - 30 = 0 ; (y+10)(y-3)=0$$

$$\text{т.к. } y \in \mathbb{N}, \text{ то } y=3$$

$$\text{Тогда всего билетов стоим } 4+3=7$$

Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

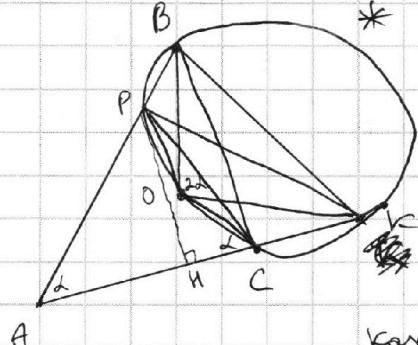
$\triangle ABC$

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = ?$$



Решение:

$$\angle BAC = 2$$

тогда $\angle BOC = 2 \cdot 2$

как центральный

$$\angle BOC = \cancel{180^\circ} = 2 \cdot 2 = \angle BPC$$

т.к. опир. на $\hat{B}C$

$$\angle CPA = 180 - 2 \cdot 2$$

как смежные с $\angle BPC$

также $\angle APC < A = 2$

$$\angle APC = 180 - 2 \cdot 2, \text{ тогда } \angle PCA = 2$$

т.к. сумма углов $\triangle = 180^\circ$

т.е. $\triangle APC - \text{п/р } AP = PC = 3,2$

$$\text{Дано } \cos \angle PCA = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2 \cdot AP \cdot AC}$$

Опустим высоту (нег/дис) PH ; $AH = HC = \frac{AC}{2} = 2$

$$\sin(2) = \frac{AH}{AP} = \frac{\text{прим. катет}}{\text{гипотен.}} = \frac{2}{3,2} = 0,625$$

$$\text{тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot \sin 2 \cdot AC}{2} = \frac{(AP+PB) \cdot 0,625 \cdot 4}{2} = \\ = 5,2 \cdot 0,625 \cdot 2 = 16,64$$

* на картинке отмечена "малая точка" K . она никак не используется в решении, ее существование и местоположение отн. других точек - неважно.

Ответ: 16,64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

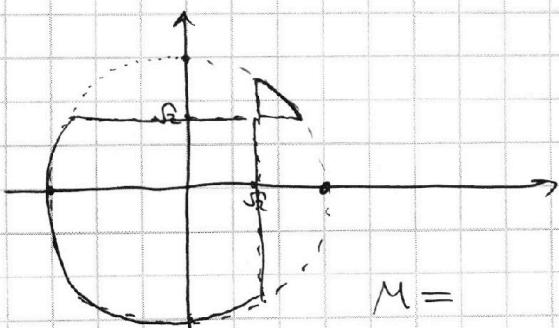
$$\left\{ \begin{array}{l} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- круг с ц. } (0,0) \text{ и } R=3 \\ \text{- полуплоскость} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\cos\alpha \quad \text{- прямая} \\ y = 2\sin\alpha \quad \text{- прямая} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- полуплоскость} \\ \text{- полуплоскость} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y > 2\sin\alpha \quad \text{- полуплоскость} \\ x < 2\cos\alpha \quad \text{- полуплоскость} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- полуплоскость} \\ \text{- полуплоскость} \end{array}$$

Рассм $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ т.к. $2\sin\alpha = 2\cos\alpha = \sqrt{2}$

Найдем М для $\Phi(\frac{\pi}{4} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$



В силу симметрии
именно для $\sin\alpha = \cos\alpha$
то M будет макс
т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x, y > 0 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(y+3)(x-3)} \\ x \neq 3 \end{aligned}$$

$$\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{x-3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(y+3)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

(I) $x+y+1=0$, т.е. $y = -1-x$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy < x^3 + (1+x)^3 + 3x(1+x) =$$

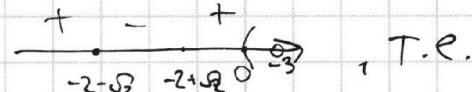
$$= x^3 + 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 3x + 3x^2 = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$\exists f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$, находим обл. значений для $x > 0, x \neq 3$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + 12 = 6(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$$

находим корни промежутки возрастания $f(x)$

Метод интервалов



при $x > 0$, $f(x)$ - возр. т.е. $f(x) \in (f(0); +\infty) / \{f(3)\}$

$$f(0) = 1, f(3) = 193, \text{т.е. } f(x) \in (1, 193) \cup (193, +\infty)$$

II ~~найдите~~ $xy = (x-3)(y+3)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть однозначных чисел x , а единиц стало больше y , $x, y \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 - 6 \cdot 7 = \\ 36 + 6 = 42)$$

Вер-ть ~~того~~ что Петя и Вася ~~вывели~~

~~одна~~ ~~числа~~ ^{в начале месяца} \checkmark $\frac{4}{x} \cdot \frac{4-1}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$ ~~победят~~ ~~на концерт~~:

Вер-ть ~~того~~ что Петя и Вася ~~в конце~~

~~месяца~~

$$u_2 = (4+y)(3+y)$$

$$u_2 = 12 + 7y + y^2$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 30 = 169 - 13^2$$

$$y_1 = \frac{-7 - 13}{2} = -10$$

$$y_2 = \frac{-7 + 13}{2} = 3$$

~~sin(5x) > sin(3x)~~

~~ура~~

$$\sin(\sin(\alpha)) = (\sin(\alpha) - \sin(\alpha)) \cdot \sin(\alpha) = (\cos(\alpha) + \cos(\alpha)) \cos(\alpha)$$

$$\sin(\sin(\alpha)) = \sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$a = \alpha, b = \alpha; \quad \sin^2 a - \sin b \sin a = \cos^2 a + \cos b \cos a$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = \cos b \cos a + \sin b \sin a$$

~~sin~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
— ИЗ —

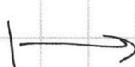
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



№

Бычий: 4

Лошади: x



Бычий + лошади

Лошади: x

Д. Пет. В.

~~$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$~~

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

$$x = 4$$

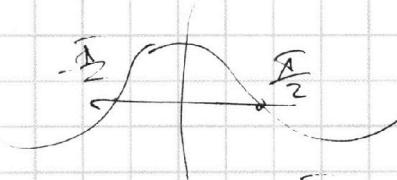
$$\frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = ?$$

2cos

$$2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\alpha = \beta \quad 2 \cos(\alpha) \cos(0)$$



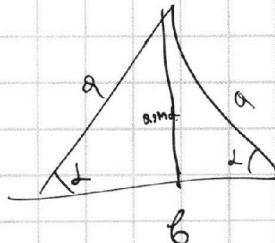
$$\frac{\alpha}{2} + \pi k$$

$$\frac{\pi k + \pi y}{2} = \frac{\alpha}{2} + \pi c$$

$$\pi k + \pi y = \pi + 2\pi c$$

$$k + y = 1 + 2c \quad 9. \pi + \omega$$

85



$$2k - 3 = 2$$

$$-3 - 7 - 5 - 3 - 1 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9$$

$$-8 - 6 - 4 - 2 + 2 + 4 + 6 + 8$$

Мн

$$-4 - 3 - 2 - 1 0 1 2 3 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№

(A; B; C)

МГ

$\cos \alpha + \cos \beta$

$A \in \{1111, \dots, 9999\}$, т.е. $A = 1111 \cdot k$, $k \in \{1, \dots, 9\}$

$B \in \{\cancel{22}, \cancel{261}, \cancel{216}, \cancel{126}\}$

✓

$C \in \{\cancel{25}, \cancel{52}\}$

$$ABC = n^2$$

$$AB \cancel{BC} = 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \frac{\pi}{4} \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$- \begin{array}{r} 1111 \\ 7 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 411 \\ - 35 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$B = 101$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta +$$

$$- \begin{array}{r} 1111 \\ 11 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$0 = \cancel{\sin \alpha \sin \beta} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2$$

$$\#$$

$$\frac{2}{4} \cdot 2 = 1$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ | \\ 11 \\ | \\ 101 \\ | \\ 111 \end{array}$$

$$11 \cdot k \cdot c = n^2$$

$$c = 11 \cdot l, l = 5 \Rightarrow k = 5$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$k \cdot l =$$

$$M_2 K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \quad x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 - y^3 - 8xy$$

$$\left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array} \right. : 1 + \cancel{\frac{2}{y}} = \frac{1}{-2} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{-2(y+3)}$$

✓

~~х2+3~~

$$1,7 = \frac{2}{y} + \frac{1}{y+3} - \frac{1}{2(y+3)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(y+3)} \cdot \frac{1}{(x-3)} \quad (y+3)^2(y+3) =$$

$$f(x, y) = f(x-3, y+3)$$

$$x^3 - y^3 - 8xy$$

$$\begin{aligned} & (y^2+6y+9)(y+3) = \\ & (y^3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1+x)(1+x) = (1+2x+x^2)(1+x) \\ & = (1+2x+x^2+x+2x^2+x^3) \end{aligned}$$

$$(1+3x+3x^2+x^3)$$

$$\therefore \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1+x+y}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(y+3)(x-3)}$$

$$\frac{1+x+y}{xy} = \frac{1+x+y}{(y+3)(x-3)}$$

$$\textcircled{I} \quad 1+x+y=0 \quad (x \neq 3, y, x > 0)$$

$$x = -y ; M = x^3 - (-1-y)^3 - 3x(-1-x) =$$

$$y = -1-x$$

$$= x^3 + \dots + \dots$$

$$= x^3 + (1+x)^3 + 3x(1+x) =$$

$$\begin{matrix} 17 \\ 3 \\ 108 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 27 \\ 2 \\ 54 \end{matrix}$$

$$\textcircled{II} \quad xy = (y+3)(x-3) ; 0 = \underbrace{-3y+3x-9}_{6x^2+4x+9=0}$$

$$x - y - 3 = 0 ; x = y + 3$$

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$f(3) = 2 \cdot 27 + 12 \cdot 9 + 12 \cdot 3 + 1$$

$$(y+3)^3 = (y^2+6y+9)(y+3) =$$

$$= (y^3+6y^2+8y+3y^2+18y+27) =$$

$$= y^3 + 8y^2 + 27y + 27$$

$$x^2 + 4x + 2 =$$

$$= (x+2)^2 - 2 =$$

$$= (x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$$

$$D = \frac{-a \pm \sqrt{b-4ac}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$54+36=90$$

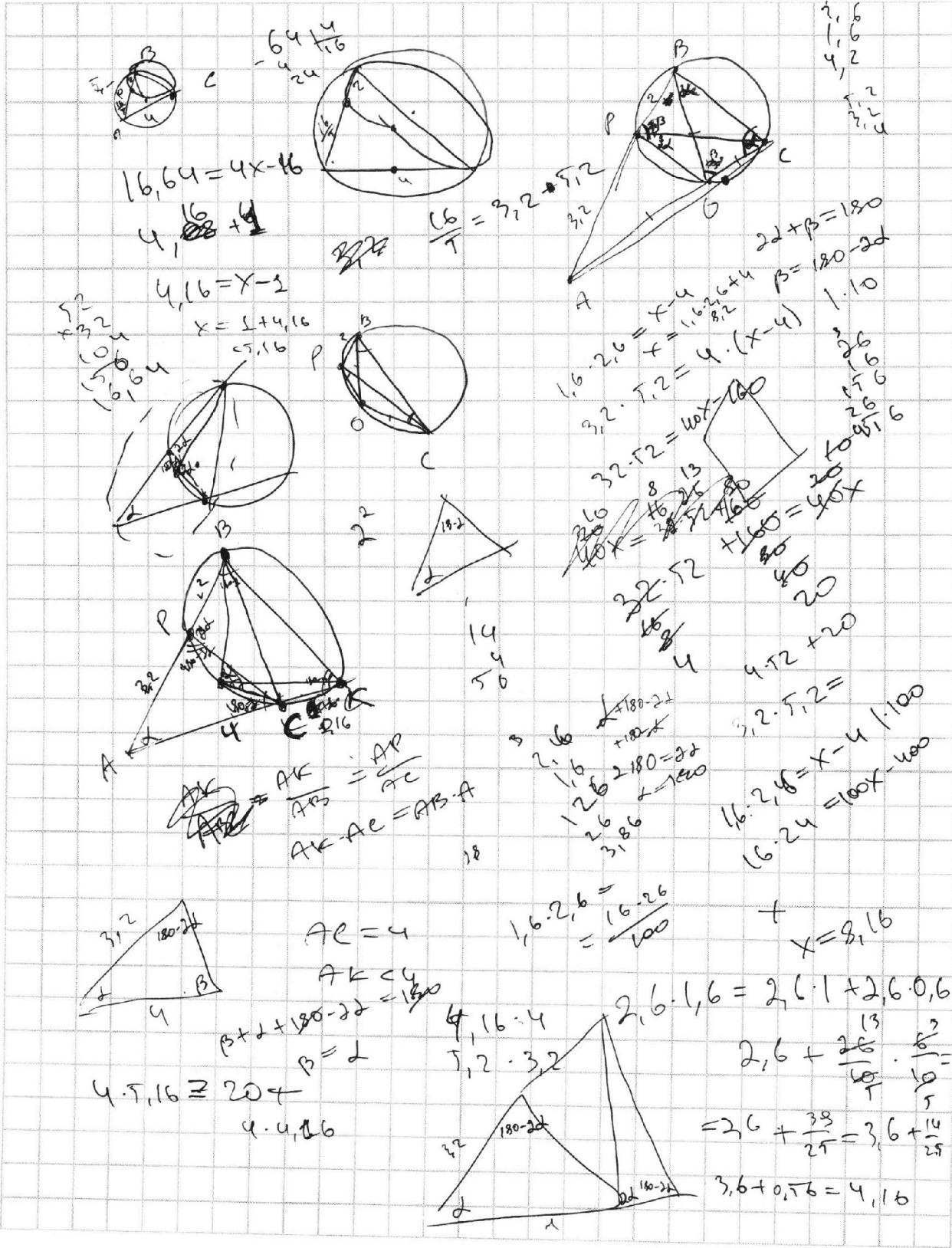
$$198 \quad 199$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

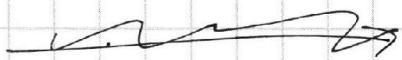
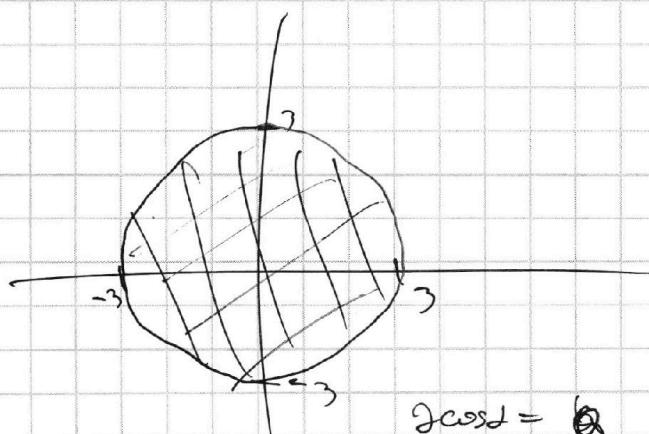
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NB⁷

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - 2 \cos \vartheta)(y - 2 \sin \vartheta) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right.$$

окр. круг

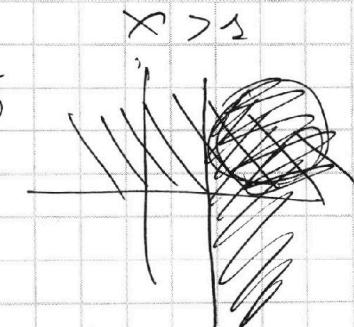


$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cos \vartheta \\ y = 2 \sin \vartheta \\ x > 2 \cos \vartheta \\ y > 2 \sin \vartheta \\ x < 2 \cos \vartheta \\ y < 2 \sin \vartheta \end{array} \right.$$

$$2 \cos \vartheta = a$$

$$2 \sin \vartheta = b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > a \\ y > b \\ x < a \\ y < b \end{array} \right.$$



$$|\sin \vartheta| \leq 1$$

$$2 \sin \vartheta = 2 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta}$$

$$2 \sqrt{1 - a^2}$$

