

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$A$  - число из 4 однотак. цифр. Т.е.  $A = 1111 \cdot k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$   
 $k \in [1; 9]$

$A = 1111k = 11 \cdot 101k$ . Заметим, что 11, 101 - простые.  
( $> 9; k \neq 1, 10$ )

Тогда если  $ABC = n^2$ ,  $BC = 101^2 \cdot 11^2 \cdot r^2$ .

Т.к. 101 - 3-цифр.,  $C$  не может быть: 101. Тогда  $B: 101$   
д-цифра

$B = 101d$  при этом в  $B$  есть цифра 6.

Значит, единственное возможное  $B = 606$

Тогда  $ABC = (11 \cdot 101 \cdot k) \cdot 606 \cdot C = 101^2 \cdot \underbrace{11 \cdot k \cdot C}_{n^2}$

Т.к.  $11 \cdot k \cdot C$  является квадратом и  $k$  - цифра

$C : 11$ ;  $C = 11z$ , и т.к. в  $C$  есть цифра 3

единственное возможное  $C = 33$

$ABC = (11 \cdot 101 \cdot k) \cdot (101 \cdot 6) \cdot (11 \cdot 3) = 11^2 \cdot 101^2 \times \cancel{101} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot k$

Получим, что  $2k$  является квадратом.

Очевидно, что т.к.  $k$  - цифра возможны 2 вар:  
 $k=2$  и  $k=8$

Тогда существуют 2 таких тройки чисел:

(2222; 606; 33) и (8888; 606; 33)

Ответ: (2222; 606; 33); (8888; 606; 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\text{Имеем: } k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

Приведем к 1 знам. левую и правую части

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \quad \begin{matrix} x, y \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq -2 \end{matrix}$$

Тогда возможны 2 варианта:

$$1) x+y+5=0$$

$$y = -x-5$$

$$xy = x(-x-5) = -x^2 - 5x$$

$$x^3 + x^2 + 5x + 6x^2 + 30x = 2x^3 + 27x^2 +$$

$$*x^2(x+25)$$

~~х~~  $x, y$  — положительные,

тогда  $x > 0; -x < 0; -x-5 < 0$

противоречие  $\Rightarrow$

Сл-но, этот вариант невозможен

$$2) xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$x = 2y + 2 \quad y = x-2$$

$$y = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

единственный  
вариант

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается **чертежником** и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

y	x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
-1	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-
0	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
1	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-
2	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-

Будем отмечать +, если

при указанных x, y

хотя бы одно из чисел

$$\frac{x+y}{2}$$

$$\frac{3x-y}{2}$$

целое

При  $x=6$  и  $y=2$  - -

читаем кол-во пар

(32)

Ответ: 32 пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.








СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \left( \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x + \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x \right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$* \sin \alpha = 0 \text{ при } \alpha = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$

$$2) \sin \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\frac{x+y}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x-y}{2} + x \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x-y}{2} \in \mathbb{Z}$$

Ответ: подходят пары  $(x, y)$  такие, что  $\frac{x+y}{2}$  - целое

или  $\frac{3x-y}{2}$  - целое.

$$\delta) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$\arcsin \alpha \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ , с1-мо неравенство не

выполняется только при  $\arcsin \frac{x}{6} = \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

Это (при  $x, y \in \text{обл. опр. } \arcsin$ )

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6 \quad -2 \leq y \leq 2$$

Небходимо посчитать пары ~~из~~ целых  $x, y$ . Составим таблицу.

См. с1. стр.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Посчитаем, какова вероятность, что при  $k$  билетах на  $n$  человек 2 определенных человека получат билеты.

Вариантов, что получат = кол-во способов раздать  $k$ -2 билета оставшимся  $n-2$  людям =  $C_{n-2}^{k-2}$

Всего Всего способов раздать билеты =  $C_n^k$

$$\text{Тогда Вероятность} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$\text{Изначально } k=4. \text{ Вероятность} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Вероятность увеличилась в 6 раз при  $k_1$ ,

$$6 \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{k_1(k_1-1)}{n(n-1)}$$

$$72 = k_1(k_1-1)$$

$k_1$ -натуральное, значит  $k_1=9$

Ответ: 9 билетов.

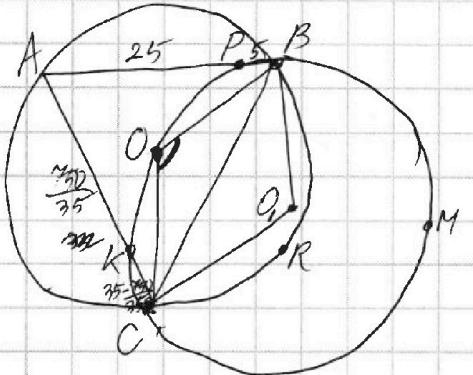


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$AK = \frac{25 \cdot 30}{35} = \frac{750}{35}$$

$$\angle BMC = 2 \angle BOC = 2 \angle BRC = 4 \angle BAC$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } AB + CD = 2 \left( \sqrt{169 - 50\cos^2 \angle} + \sqrt{169 - 50\sin^2 \angle} \right) =$$

$$= 2 \left( \sqrt{119 + 50\sin^2 \angle} + \sqrt{169 - 50\sin^2 \angle} \right)$$

Пусть  $\angle = f = 50\sin^2 \angle$ . Найдем максимум функции

$$f(t) = \sqrt{119 + t} + \sqrt{169 - t}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{119+t}} - \frac{1}{2\sqrt{169-t}} = 0$$

$$2\sqrt{119+t} = 2\sqrt{169-t}$$

$$119+t = 169-t$$

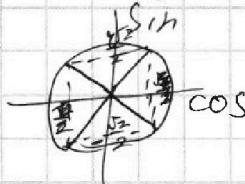
$$2t = 50$$

$$t = 25$$

$$50\sin^2 \angle = 25$$

$$\sin \angle = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Тогда, } (AB + CD)_{\max} = 2 \left( \sqrt{119 + 25} + \sqrt{169 - 25} \right) = 48$$

$$\text{Найдем } P_{\Phi}^{\max} \text{ периметр. } P_{\Phi}^{\max} = 48 + \pi \cdot 13 = 48 + 13\pi$$

$P_{\Phi}^{\max}$  достигается при  $\angle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $48 + 13\pi; \angle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 169 \end{cases}$$

Второе нер-во ограничивает множество точек

круга с радиусом  $\sqrt{169} = 13$  и центром в нач. коорд.

Первое нер-во является линейной связью:

$$\begin{cases} x+5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \\ x+5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0 \\ y+5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Тогда построим <sup>II нер-во</sup> график и проведем <sup>"пр. а"</sup> прямые  $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$  и  $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ . <sup>"пр. б"</sup>

Поймем, что прямые перпендикулярны окружности. Пусть  $ALW = A; B; BLW = C; D$

Нер-во удовлетворяет замкнутым обл.

? Каков периметр? Поймем,

$$\text{Что } \Gamma.K. AB \perp CD \Rightarrow AC + BD =$$

$$= AD + BC. \text{ То есть, длина}$$

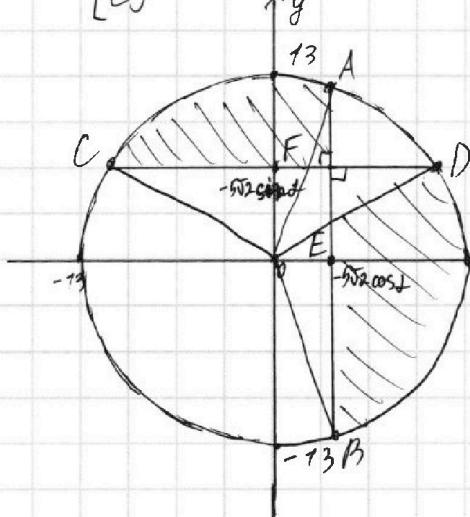
дуг, выходящих в  $\Phi$ -константа. Значит, необходимо найти такие  $\alpha$ , при кот.  $(AB + CD)_{\max}$   
Ит. прир.  $\Delta OEB$

Тогда считаем длину  $AB$ ,  $AB = 2\sqrt{OB^2 - OE^2} =$

$$= 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}. \text{ Аналогично } CD = 2\sqrt{OD^2 - OF^2} =$$

$$= 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$$

см сл. стр.



I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
ЧИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AB}{CD} = \frac{SN}{SE} = \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} + \frac{2b\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}}{\sqrt{b^2 + SO^2}} = \frac{2b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} + 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} + b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ODC}} = \frac{2\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \left( \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} + b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} + 1 \right) = \left( \frac{2\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right)^2 =$$

$$\Rightarrow = \frac{4(b^2 + SO^2)}{b^2 + SO^2 + b^2 - 2b\sqrt{b^2 + SO^2}}$$

$$\frac{S_{ODC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} + \frac{b^2 - 2b\sqrt{b^2 + SO^2}}{4(b^2 + SO^2)} = \frac{1}{4} + \frac{b^2}{4(b^2 + SO^2)} - \frac{2b}{4\sqrt{b^2 + SO^2}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sin^2 \angle OSE - \frac{1}{2} \sin \angle OSE = \frac{1}{4} (\sin \angle OSE + 1)^2$$

искомое отношение  $\rightarrow 40 \frac{1}{4} (\tau - \sin \angle OSE)^2$

$$\sin \angle OSE = \frac{b}{OS}$$

$$\sin \angle JSK = \sqrt{1 - b^2(b^2 + 2SO^2)}$$

$$\frac{b}{\sin \angle OSE} = \frac{OC}{\sin \angle OSK} = \frac{\sqrt{OE^2 + EC^2}}{\sin \angle OSK} = \frac{\frac{b^2 + SO^2}{b^2 + SC^2 - SE^2}}{\sin \angle OSK} =$$

~~188~~

I

I

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте креcтиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ER = \sqrt{\frac{b^4}{SO^2} + b^2} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + SO^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2} + \frac{(b^2 + SO^2)b^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \times \\ \times \sqrt{\frac{b^2 + SO^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2})^2} \left( \frac{b^2}{SO^2} + 2 \right)}$$

$$ER = RK$$

$$\cos \angle RSK = \frac{RK}{SR} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} \left( \frac{b^2}{SO^2} + 2 \right)}{\sqrt{SL^2 + RL^2}} \approx$$

$$SR = \sqrt{SL^2 + RL^2} = \sqrt{(b^2 + SO^2) \left( \frac{b^2 + SO^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2} \right) + \frac{b^2}{SO^2} (b^2 + SO^2) \frac{(b^2 + SO^2)}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2}} \\ = \frac{b^2 + SO^2}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \sqrt{1 + \frac{b^2}{SO^2}}$$

$$\cos \angle RSK = \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + SO^2} \left( \frac{b^2}{SO^2} + 2 \right)}{\frac{b^2 + SO^2}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \sqrt{1 + \frac{b^2}{SO^2}}} = \\ = \frac{b \sqrt{b^2 + SO^2} (b^2 + 2SO^2)}{(b^2 + SO^2) \sqrt{b^2 + SO^2}} = \frac{b \sqrt{b^2 + 2SO^2}}{b^2 + SO^2}$$

Тогда будем искать площади.

$$S_{ODC} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CD$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot EN (AB + CD)$$

$$\frac{S_{ODC}}{S_{ABCD}} = \frac{OE \cdot CD}{EN(AB + CD)} = \frac{b \cdot CD}{\frac{2b\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} (AB + CD)}$$

$$\frac{S_{AMCD}}{S_{ODC}} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{2\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} + \frac{2\sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

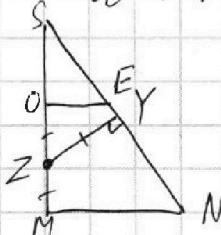
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

B m. SMN:  $ZY \perp SN$   $ZY = OZ = ZM$



Пусть  $OE = b$ ;  $OZ = c$

$$\sin \angle S = \frac{c}{c+b} \quad \tan \angle S = \frac{b}{SO}$$

$$SE = \sqrt{b^2 + SO^2} \quad \cos \angle S = \frac{SO}{\sqrt{b^2 + SO^2}}$$

$$\tan \angle S = \frac{b}{SO} = \frac{c \sqrt{b^2 + SO^2}}{(c+SO) SO}$$

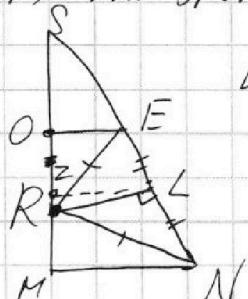
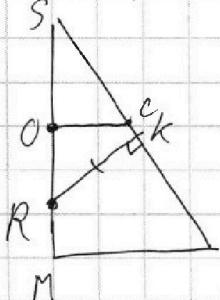
$$b(c+SO) = c \sqrt{b^2 + SO^2}$$

$$c(b - \sqrt{b^2 + SO^2}) = -b SO$$

$$c = \frac{b SO}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

Рассмотрим 1):

B m. SMA: B m. SMN:



$$\text{L-спр EN} \quad \frac{SZ}{SL} = \frac{SO}{SE}$$

$$SO + c = SL \left( \frac{SO}{\sqrt{b^2 + SO^2}} \right)$$

$$SL = \frac{(SO + c) \sqrt{b^2 + SO^2}}{SO} =$$

$$= \left( SO + \frac{b SO}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right) \sqrt{b^2 + SO^2}$$

$$EL = \frac{b \sqrt{b^2 + SO^2}}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b}$$

$$RL = \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right) \sqrt{b^2 + SO^2}$$

$$ER = \sqrt{RL^2 + EL^2} = \sqrt{(b^2 + SO^2) \frac{b^2}{SO^2} \left( 1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + SO^2} - b} \right)^2 + \frac{(b^2 + SO^2)b^2}{(\sqrt{b^2 + SO^2} - b)^2}}$$

cm. ch. ctp



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

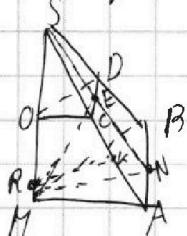
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Т.к. пирамида прав. центры обеих шаров лежат  
(одной)  
на высоте, прям. к основанию пирамиды.

Рассмотрим „кусок“ пирамиды такой, что



$AB, CD$  - стороны основания

$O, M$  - центры оснований.

Поймем, что искомое отношение -  
это отношение  $SODC : SABC$ , т.к. такие куски  
одинаковы для всех рёбер, т.к. будут равны

1) Известно, что  $R$  касается всех рёбер.

Поймем, что если касается, то в середине  
(иначе будет пересек), т.к. до центра  
ребра меньше, чем до любой другой его точки  
 $N, E$  - середины  $AB, CD$ . Тогда на  $SM$   
есть такая точка  $R$ , что  $ER = RN = RK$ , где  
 $\overset{R}{K} \perp AC$  ( $K \in AC$ )

2) Есть  $W$ , кот. касается всех граний.

Поймем, что центр  $W$  - это середина  $OM$  (з

см. с. стр)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\cancel{\sin(\pi \frac{x+y}{2})} \cos(\pi \frac{x-y}{2}) \sin \pi x = -\sin(\pi \frac{x+y}{2}) \sin(\pi \frac{x-y}{2}) \cos \pi x$$

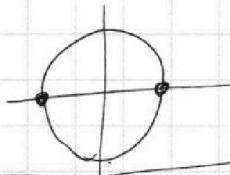
$$\sin(\pi \frac{x+y}{2}) (\cos(\pi \frac{x-y}{2}) \sin \pi x + \sin(\pi \frac{x-y}{2}) \cos \pi x) = 0$$

$$\cancel{\sin(\pi \frac{x+y}{2})} \sin(\pi \frac{x+y}{2}) \sin(\pi x - 2\pi y + \pi x) \sin$$

$$\sin(\pi \frac{x+y}{2}) \sin(\pi x + \frac{\pi y}{2}) = 0$$

$$\left[ \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \right]$$

$$\left[ \sin(\pi x + \frac{\pi y}{2}) = 0 \right]$$



$$\left[ \begin{array}{l} \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{6} < \pi$$

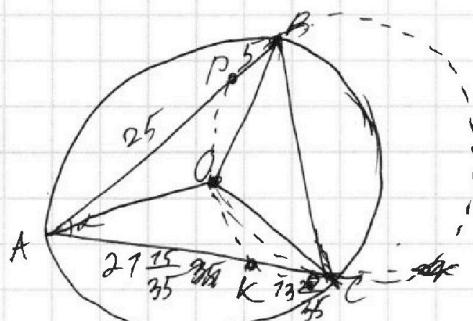
$$\text{следовательно } \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Нельзя чтобы } \frac{x}{6} = 1 \text{ и } \frac{y}{6} = 1$$

$$\left[ \begin{array}{l} x=6 \\ y=6 \end{array} \right] \text{ неверно}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x}{6} \leq 1 & -1 &\leq \frac{y}{6} \leq 1 \\ -6 &\leq x \leq 6 & -6 &\leq y \leq 6 \end{aligned}$$

(5)



$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$25 \cdot 30 = 750$$

$$750 = 35 \cdot (35 + l)$$

$$\frac{750}{35} - 35 = l$$

$$20 \frac{50}{35} - 35 = l$$

$$l = 35 - 21 \frac{15}{35} = 13 \frac{20}{35}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{-x-5} + \frac{5}{x(-x-5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{-x-3} + \frac{5}{(x-2)(-x-3)}$$

$$\frac{-x-5+x+5}{x(-x-5)} = -x-3+x-2+5$$

$$21 \times 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решенис которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) A = 1111 = 11 \cdot 101 \quad A = k \cdot 11 \cdot 101 \quad B = 101 \text{ n } = 606$$

$$A = 2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101 \quad BC = 101 \cdot 11 \text{ m} \quad \cancel{BC}$$

$$ABC = k \cdot 11 \cdot \underline{101 \cdot 101} \cdot 6 \cdot C \quad KC = 66d \quad d = v^2$$

$$k=1 \quad ABC = 11 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot C \quad C = 66 -$$

$k=2$

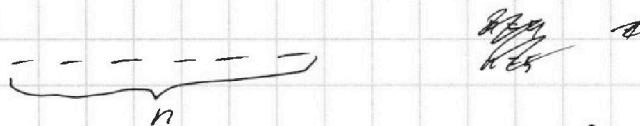
$$(2) \quad k = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \right| = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad \begin{array}{l} x, y \neq 0 \\ x \neq 2 \quad y \neq -2 \end{array}$$

$$\frac{5+x+y}{xy} = \frac{5+x+y}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = (x-2)(y+2) \quad -2y+2x-4=0 \quad x=y+2 \quad y=x-2$$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6 \cdot (x-2) = \cancel{x^3 - 8 + 12x - 8} \quad x^3 - x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2^2 + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

$$(4) \quad 4 \text{ билета} \quad n \text{ 11-классиков}$$



Вероятность, что 0 сда.

$$\frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)! \cdot n!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{6 \cdot 2}{n(n-1)} \quad \cancel{\frac{4!(n-4)!}{4!(n-4)!}}$$

$k$  сда

$$\frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-2)! \cdot (n-k)! \cdot n!} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{(k-2)!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$\frac{\cancel{72}}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \quad k(k-1) = 8 \cdot 9 \quad (k=9)$$

$$\cancel{x^3 + 15x^2 + 75x + 125 + 6x^2 + 30x} = x^3 + (x+5)^3 + 6 \cdot (x+5) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125 + 6x^2 + 30x = x^3 + 21x^2 + 105x + 725$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

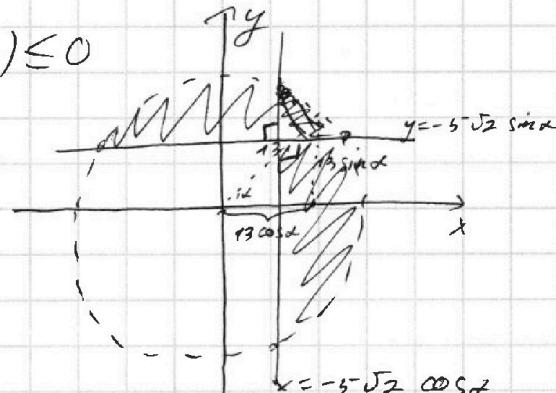
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

круг с радиусом 13

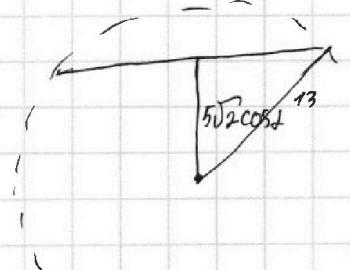
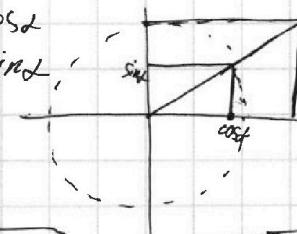


$$x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0$$

$$y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0$$

$$x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0$$

$$y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0$$



$$2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} =$$

$$= 2\sqrt{119 + 50\sin^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$$

$$50\sin^2\alpha = x$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{119+x} + \sqrt{169-x})' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{119+x}} - \frac{1}{2\sqrt{169-x}} = 0$$

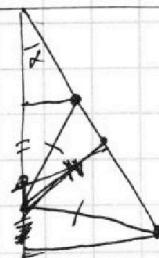
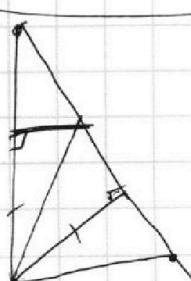
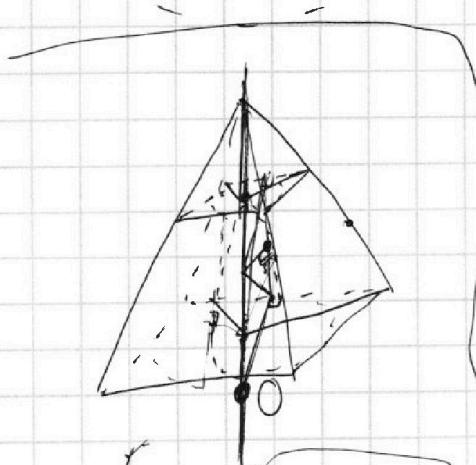
$$\sqrt{119+x} = \sqrt{169-x}$$

$$119+x = 169-x$$

$$50\sin^2\alpha = 25 \quad x = 25$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



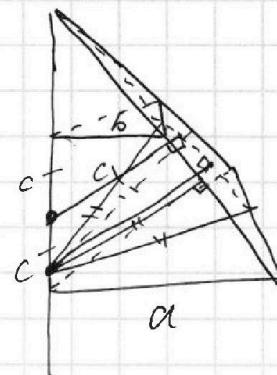
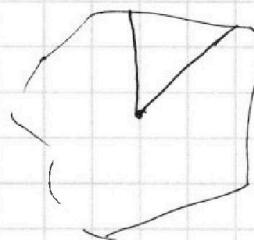


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{bc}{a-b} = \frac{b}{x+2c}$$

$$(x+2c)b = x\alpha$$

$$x(b-a) = 2bc$$

$$x = \frac{2bc}{b-a}$$

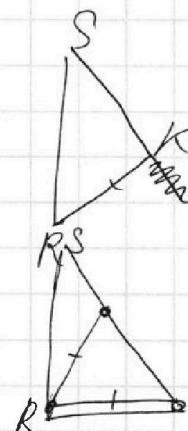
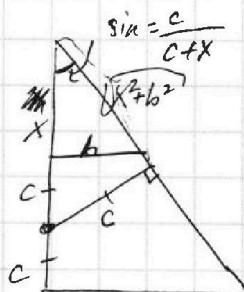
$$S_1 = \sqrt{b^2 - h_b^2} \cdot h_b$$

$$\frac{2bc}{(a-b)} = \frac{2bc}{(a-b)} + 2c$$

$$\frac{x}{c} = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{b} - 1$$

$$\text{отс } x = \frac{c}{b} \sqrt{x^2 + b^2} - c$$

$$\frac{2c + SO}{SN}$$



$$\sin \alpha = \frac{c}{c+x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{x} = \frac{c}{c+x} \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{x}$$

$$\frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{c}{c+x}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{b} = 1 + \frac{x}{c}$$