



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| X | | | | | | |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ДЕН, $a \leq 9$, $b, c \in \mathbb{Z}$. Известно, что $a+b+c=9$ и $a \neq b \neq c$. Чему может быть abc ?

Т.к все цифры в числе A однозначные, то A представимо

в виде $111 \cdot x$, где x - цифра, из которой составлено число A . Заметим, что $111 = 101 \cdot 11$, где 101 и 11 - простые числа.

Пусть число B представимо в виде $100a + 10b + c$ (здесь a, b, c - цифры)

число C представимо в виде $10m + n$, где m, n - цифры

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot x (100a + 10b + c)(10m + n)$$

$A \cdot B \cdot C$ должно быть кратно наибольшему числу помимо единицы, т.е. множителю разложения на множители числа $A \cdot B \cdot C$

101 должно входит в количество кол-во раз. 101 - простое,

$10m + n$ не может быть максимальным значением, так как $10 \cdot 9 + 9 =$

$= 99$, поэтому $100a + 10b + c$ должна делиться на 101. $100a + 10b + c \equiv -a + 10b + c \pmod{101}$.

Чтобы учесть, что хотят одно из чисел (a, b, c)

равно 6. Пусть это число $a = 6$. $-a + 10b + c$

$-6 + c + 10b$ должно быть сравнимо с членом по модулю 101. Максимальное значение $c - 6 + 10b$ равно $9 - 6 + 90 = 93$, тогда $c - 6 + 10b$ может быть только 93, когда $10b - 6 = 93$ $\Rightarrow 10b = 6 + 93 = 99$. Очевидно, что у данного уравнения единственное решение: $c = 6$; $b = 0$, тогда при $a = 6; b = 0; c = 6$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot x (606 + 101 \cdot 11 \cdot x \cdot 606 \cdot (10m + n)) = 101^2 \cdot 11 \cdot x \cdot 6 \cdot (10m + n)$$

10m + n это должно делиться на 11, следовательно, что хотят тими и равно 3. Пусть $n = 3$, тогда, чтобы $10m + n \equiv 3 \pmod{11}$ получим $10m + 3 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow m \equiv 0 \pmod{11}$. Если $m = 0$,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы с делиться на 11 и остаток был дробью из цифр с единицей то $C=33$, т.к. ~~остаток делится на двузначные числа~~, ~~ко второе деление на 11~~ состоят из однозначных цифр.

$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot X = 101 \cdot 11 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot X$, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом наименьшее число, для подходит значение $X = 2$ и $X = 8$.

Тогда наши подходит $(2222; 606; 33)$ $(8888; 606; 33)$.

(II) пусть $B=6$; тогда:

$-a+60+c \equiv 101$; $60+c-a$ не может быть равно числу всему остаточному на a и 9 , а так же не может равняться 101 , т.к. $60+c-a < 101$ в силу остаточного на a и c .

(III) пусть $C=6$ тогда:

$$108-a+6 \equiv 0 \pmod{101}; 108-a+6=0; 108=a-6 \text{ равенство}$$

во втором случае $a=6$; такой случай реабилитирован б) (I).

$108-a+6 \equiv 101$ в силу остаточного на a, b .

Рассмотрели все возможные случаи, поэтому ответ:
 $(2222; 606; 33)$ $(8888; 606; 33)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы можно было записать следующее равенство:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

①

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}, \quad \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \text{ m.к.}$$

$x, y > 0$, то можно подставить это член в равенства ①
и $(x+y+5)$, тогда: $\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)}$, то есть $(x-2)(y+2) = xy$

$$xy + 2x - 2y - 4 = xy; x - y = 2; x = 2 + y$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy; \text{ подставив } x = 2 + y$$

$$M = 2(4 + 4y + y^2 + 2y + y^2 + y^2) - 6(2 + y)y = 2(3y^2 + 6y + 4) - 6(2y + y^2) =$$

$$= 6y^2 + 12y + 8 - 12y - 6y^2 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) - \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

пусть $\pi x = \alpha$, $\pi y = \beta$

тогда исходное равенство имеет вид:

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 0$$

$$\cos 2\alpha - \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0 ; \begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

получаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} \textcircled{I} \frac{3x-y}{2} = k, k \in \mathbb{Z} \\ \textcircled{II} \frac{x+y}{2} = l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\textcircled{I}: \frac{3x-y}{2} = k; 3x-y=2k; 3x=2k+y; x=\frac{2k+y}{3}$$

$$\textcircled{II}: \frac{x+y}{2} = l; x+y=2l; x=2l-y$$

Ответ на пункт а) $\left(\frac{2k+y}{3}; y\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$
 $(2l-y; y)$, где $l \in \mathbb{Z}$.

б) чтобы пары целых чисел (x, y) удовлетворяли одновременно
 и уравнению и неравенству, необходимо, чтобы $x=\frac{2k+y}{3}$
 или $x=2l-y$; рассмотрим эти два случая и определим
 ~~$x=\frac{2k+y}{3}$~~ . $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

$$x=\frac{y+2k}{3}; \arcsin \frac{y+2k}{18} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi \quad \textcircled{*}$$

Чтобы ограничить значения, выполнить подстановку арккосинус
 и две части неравенства $\textcircled{*}$ приведем отдельно $\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В уравнении отрицательны

т.к. в первенстве arcsin числа отрицательны, то появляется ограничение.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} \leq 1 \\ -\frac{x}{6} \leq 1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq y \leq 2 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{array} \right.$$

В задаче отрицательные про

являют решение, тогда давайте переберём все возможные ~~возможные~~ значения y . У момента этого рабочий

$-2, -1, 0, 1, 2$.

Ищем $y = -2$.

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin(-1) \in \mathbb{N}, \quad \text{множество} \arcsin(-1) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \text{так как } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \in \mathbb{N} + \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{x}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right], \quad \text{так как верно при всех} \\ \text{допустимых } x, \text{ т.к. } \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}. \quad \text{таким образом } 13 \text{ значений}$$

x при $y = -2$.

$$\text{ищем } y = -1: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{\pi}{2} \in \mathbb{N}, \quad \text{так как верно}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}; \quad \arcsin \frac{x}{6} \in \left[\mathbb{N} + \frac{\pi}{6} \right]; \quad \arcsin \frac{x}{6} \in \left[\frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6} \right], \quad \text{тако}$$

всего при всех ~~и~~ допустимых x имеем $\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

также получаем еще 13 пар решений.

также получаем $-6 \leq x \leq 6$, но необходимо для решения уравнения решить уравнение $x = x$ для этого берём рабочее $x = \frac{y+2k}{3}$; при $y = -2$: $x = \frac{2k-2}{3}$

$$\frac{2k-2}{3} = -6; \quad 2k = -16; \quad k = -8 \text{ не подходит}; \quad \frac{2k-2}{3} = -5; \quad 2k-2 = -15; \quad \text{не подходит, так как} \\ \text{член не является делителем 2, а правое член, значит } k \text{ не целое.}$$

$$\frac{2k-2}{3} = -4; \quad 2k-2 = -12; \quad 2k = -10; \quad k = -5 \text{ подходит}; \quad \frac{2k-2}{3} = -3; \quad \text{не подходит, так как} \\ k \text{ не целое}; \quad \frac{2k-2}{3} = -2; \quad 2k-2 = -6; \quad 2k = -4; \quad k = -2 \text{ подходит}$$

$$\frac{2k-2}{3} = -1 \text{ не подходит, так как } k \text{ не целое}; \quad \frac{2k-2}{3} = 0; \quad k = 1 \text{ подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2k-2}{3} = 1; k\text{-четное } \frac{2k-2}{3} = 2; 2k-2=6; k=4 \quad \frac{2k-2}{3} = 3 \text{ не подходит } k\text{-четное}$$

$$\frac{2k-2}{3} = 4; 2k-2=12; 2k=14; k=7 \quad \text{(V)} \quad \frac{2k-2}{3} = 5 \text{ не подходит } k\text{-четное}$$

$$\frac{2k-2}{3} = 6; 2k-2=18; 2k=20; k=10 \quad \text{(V)}$$

Получаем, что на этом этапе нам подходит следующее пары:

$$(-6;-2) (-4;-2) (-2;-2) (0;-2) (2;-2) (4;-2) (6;-2).$$

Теперь рассмотрим $y = -1$, $\arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{6}$ при всех допустимых x .

$x = \frac{2k-1}{3}$. Если x -четный, то нам не подходит, т.к. $3x$ будет делиться на 2, а $2k-1$ нет. Рассмотрим, чтобы нечетное x .

$$\frac{2k-1}{3} = -5; 2k-1=-15; k=-7 \quad ; \quad \frac{2k-1}{3} = -3; 2k=-8; k=-4 \quad ; \quad \frac{2k-1}{3} = -1; k=-1$$

$$\frac{2k-1}{3} = 1; 2k-1=3; k=2 \quad ; \quad \frac{2k-1}{3} = 3; 2k=k+2; k=5 \quad ; \quad \frac{2k-1}{3} = 5; k=8$$

подходит следующие пары: $(-5;-1) (-3;-1) (-1;-1) (1;-1) (3;-1)$
 $(5;-1)$.

Теперь $y=0$: $x = \frac{2k}{3}$; $\frac{2k}{3} \neq 0$ (иначе будем подходит только

четные x , т.к. чётные $2k$ будем делить на 2, а $3x$ нет).

$$\frac{2k}{3} = -6; k=-9 \quad ; \quad \frac{2k}{3} = -4; k=-6 \quad ; \quad \frac{2k}{3} = -2; k=-3 \quad ; \quad \frac{2k}{3} = 0; k=0 \quad ; \quad \frac{2k}{3} = 2; k=3$$

$\frac{2k}{3} = 4; k=6 \quad ; \quad \frac{2k}{3} = 6; k=9$. подходит пары подходит еще 7 пар.

Теперь $y=1$:

$x = \frac{2k+1}{3}$; нам подходит только четные x , т.к. чётное $3x \neq 2$ а $2k+1 \neq 2$,
также это если нам подходит еще 6 пар.

Теперь $y=2$: $\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ при всех допустимых x , кроме $x=6$, т.к. $\arcsin \frac{6}{6} = \frac{\pi}{2}$.

$x = \frac{2k+1}{3}$; нам подходит только четные x , т.к. чётное подходит еще 6 пар, $x=6$ нам не подходит, т.к. уравнение спротивлено и это нам подходит $7+6+7+6+6 = 21+12 = 33$ пары

Ответ: а) $(\frac{2k+1}{3}; y), k \in \mathbb{Z}$; $(2k-y, y), k \in \mathbb{Z}$

б) 33 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть однодневными классами x человек, а двойками, выделенными на концерт в конце месяца y пар.

Вероятность того, что Наташа и Вася оба попадут на концерт в исегаше месяца равна $\frac{y \cdot 3}{x(x-1)}$, а вероятность того, что Наташа и Вася оба попадут на концерт в конце месяца равна $\frac{y \cdot (y-1)}{x(x-1)}$.

Установлено известно, что $\frac{y(y-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{4 \cdot 3} = 6$

$$y(y-1) = 72; y^2 - y - 72 = 0$$
$$(y-9)(y+8) = 0 \quad y > 0, \text{ т.к. числом} \text{человек не может быть отрицательное.} \Rightarrow y = 9.$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

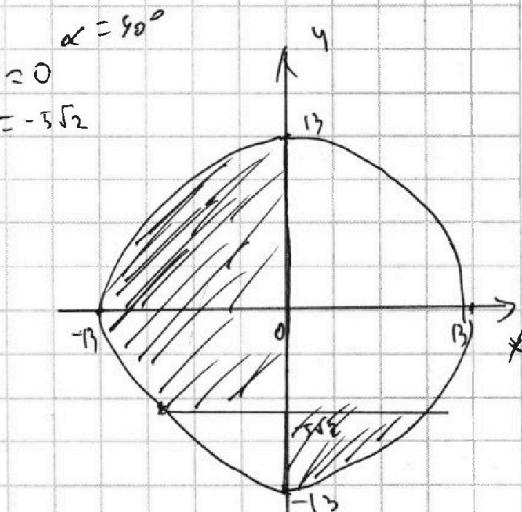
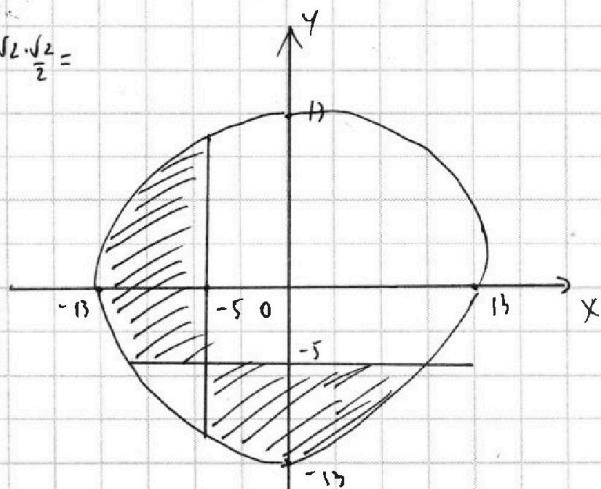
$$\begin{cases} \textcircled{1} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ в зависимости от α

$x \neq 0$ и $y \neq 0$

нашлось два частоты. При $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \alpha &= 45^\circ \\ x &= -5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5 \\ y &= -5 \end{aligned}$$



Эти два графика нарисованы для каждого представления. Предположим, что любой такой график при наложении так, чтобы эти дуги отдельных частей фигуры "смылись" в одну и эта дуга будет охватывать собой конгруэнтность. Например, в графике где $\alpha = 90^\circ$ получим перевесение конгруэнтных смыющихся областей ОУ перекрестило левую часть линии непрерывности. И поэтому можно видеть, что граница квадрата является дугой, равной конгруэнтным долям отдельности. Рассмотрим что при разных альфа на пересечении фигуры $\Phi(\alpha)$ при изменении альфа в некотором диапазоне, $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$ и $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$, то есть необходимо максимум уменьшить длину этих прямых. Чем ближе прямые $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$ и $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$ к ОУ и ОК со временем тем больше их засечки, чем меньше $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ тем ближе кривые к оси \Rightarrow \Rightarrow надо минимизировать сумму $\sin \alpha + \cos \alpha$. продолжение \Rightarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$, минимальное значение $\sin \alpha$ будем искать $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Мы получаем пучине α , теперь найдём значение M .

Напомним как это вспоминали ранее, выражение состоит из длины дуги и радиуса синуса. длина дуги равна $\pi \cdot 13 = 13\pi$ ~~13~~ 13~~π~~

13~~π~~; при $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
~~уменьшили~~

значения (26).

Остались из членов равенства длине ~~радиуса (13)~~
~~а длина радиуса~~ ~~крайней~~ равенство длине ~~значения~~
~~-~~ ~~552~~ 5 $\sqrt{2}$. Итак, значение M равно

$$13\pi + 26 + 26 - 5\sqrt{2}$$

Ответ: $52 - 5\sqrt{2} + 13\pi$.



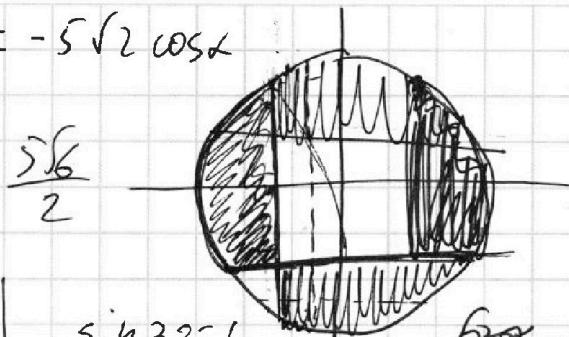
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$



$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(3y^2 + 6y + 4) - 6(2y + y^2)$$

$$2(y + 2y + y^2 + 2y + y^2 + y^2)$$

$$2y - x - y - 2x - x + y + x + y - x$$

$$5/\sqrt{2} = x$$

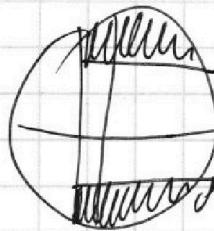
$$x - y = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x - y - 2 = 0$$

при написании ~~х~~ = $y - x$ + $2x - 2y$ ~~и~~ $y = (x - y)(2 - 1)$

$$\text{значе. } 5\sqrt{2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{y - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6xy = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6xy$$

$$6y^2 + 6y + 12y + 8$$

$$6y(2+y)$$

$$(2+y)^3 = 8 + 3 \cdot 4y + 6y^2 + y^3$$

$$(2+y)(y)$$

$$x = 2 + y$$

$$xy = (x - 2)(y + 2)$$

$$\frac{xy}{(x - 2)(y + 2)} = \frac{(x - 2)(y + 2)}{(x + 2)(y + 2)}$$

$$x + y + 5 = y + 2 + x - 2 + 5$$

$$1337$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{f} + \frac{5}{3} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{f}{(x-2)(y+2)}$$



$$x^3 - y^3 - 6xy^2$$

1.111.111.6.11.3

2.101.11.11/101.6.3.11.11.2

101.101.11

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{XXXX}$$

$$\overline{XXX} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{mn} = k^2$$

26
-

$$B = \overline{abc}, \text{ где } \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=6 \end{cases}$$

$$1111 \cdot \overline{abc} \cdot \overline{mn} = k^2$$

-
55

$$C = \overline{ab} \overline{mn}, \begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow k$ делится на 1111

$$k^2 : 1111 \cdot 1111$$

$$1111 \cdot (600 + 108 + c) (30 + n) = k^2$$

$$108 + 6 - a : 101.$$

$$(600 + 108 + c) (30 + n) : 1111$$

$$108 + c - b$$

$$18000 + 600n + 600c$$

~~60 + c - a~~ аутн.

$$1111 \cdot \cancel{abc}$$

$$1111 (600 + 108 + c) (30 + n) = k^2$$

~~$600 + 108 + c = 1111$~~

$$1111 (100a + 60b + c) (30 + n) = k^2$$

~~$108 + c = 511$~~

~~$1111 (\cancel{abc})$~~

$$100a + 60b + c$$

~~2222~~

$$100a + 60b + c = 1111$$

$$101 \underbrace{+}_{7} \underbrace{1}_{7} \underbrace{-}_{91}$$

~~$2222 (600 + 108 + c)$~~

~~$1111 \cancel{abc}$~~

~~$1111 \cancel{abc}$~~

$$3333 = 3 \cdot 1111$$

~~$1111 \cancel{abc}$~~

~~$1111 \cancel{abc}$~~

$$701$$

$$101 \cdot 11$$

~~$1111 \cancel{abc}$~~

~~$1111 \cancel{abc}$~~

~~$101 \cdot 11$~~

$$101 \cdot 11 \cdot x \cdot (100a + 108 + c) (10m + n) = k^2$$

$$m=10, n=1$$

$$100a + 108 + c : 101$$

~~$1111 \cancel{abc}$~~

~~$1111 \cancel{abc}$~~

$$101 \cancel{abc}$$

$$600 + 108 + c = 101k$$

$$100a + 60b + c = 101m$$

$$100a + 108 + c = 101n$$

$$600 = -6$$

$$100a + 108 + c = 101n$$

$$6 - 9 + 108 \text{ делится на 101}$$

$$600 + c - a$$

$$-6 + 108 + c$$

$$600 - 6$$

$$60 + c - a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 = (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)) \sin(\gamma) + (\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)) \cos(\gamma)$$

$$\text{(+)} \quad \frac{x+y}{2} = \frac{n_x + n_y}{2} = \frac{n(x+y)}{2} = \frac{n(2^{k+1}y)}{2} = \frac{n(2^k y)}{2} + \frac{n(y)}{2} = \frac{n(2^k y)}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\begin{aligned} -y &= 0 \\ 2(k-y) &= 0. \quad (+) \\ -\cos 2n(k-y) &= 0. \\ \sin n \quad \text{circle} &= 0. \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{1}{N^2} \frac{\chi(x-1)}{|x|} = 6$$

5/98

$$\frac{c_1}{h}$$

установлено, что в среднем 4 дни на 1000 случаев

$$\frac{c}{x^4} \cdot \frac{4}{x} = \frac{16}{x^2}$$

٦١

$$\frac{2}{25} \cdot \frac{4}{25} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{25 \cdot 25} = \frac{1}{6} \text{ or } \frac{1}{16}$$

$$\frac{x^2}{N^2} \cdot \frac{N^3}{16} = 6 \quad x = 96$$

$$\frac{X}{16} = 6$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y'x - y}{x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2

$$-6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\sin \alpha x + \sin \beta y \cdot \sin \alpha x = \cos \alpha x - \cos \beta y \cdot \cos \alpha x$$

$$\sin^2 \alpha x - \cos^2 \alpha x + \sin \beta y \cdot \sin \alpha x + \cos \beta y \cdot \cos \alpha x = 0$$

$$\cos(\alpha+y) = \cos \alpha \cos y - \sin \alpha \sin y$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha y - \alpha x$$

$$\cos(\alpha-y) = \cos \alpha \cos y + \sin \alpha \sin y$$

~~$\cos(\alpha-\beta)$~~

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha+y) - \cos(\alpha-y) = 0$$

$$\sin^2 \alpha x - \cos^2 \alpha x + \cos(\alpha(y-x)) = 0. \quad \cos(\alpha+y) - \cos(\alpha-y) = -2 \sin$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \alpha x - \cos \alpha x \cdot \cos \alpha x$$

$$\cos(\alpha(y-x)) - \cos 2\alpha x = 0$$

$$\cos(\alpha+\alpha)$$

$$\cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$



$$2\alpha - \alpha + \alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 60^\circ - \cos 30^\circ = -2 \sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3}-1)$$

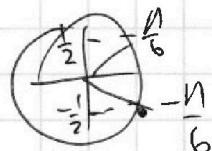
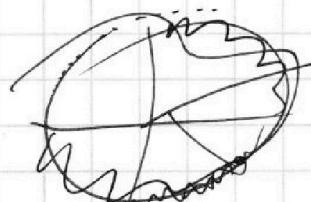
$$\begin{cases} 2k=1 \\ 2k=3 \end{cases} \quad \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\pi(2k-\alpha) - \pi y$$

$$21+12$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$



$$(n; n)$$

$$\frac{y}{2} \leq 1$$

$$\sin -\frac{n}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y+2k}{3} - \frac{2k-1}{3} = -6$$

$$\begin{aligned} & \text{# } (6) \times (-4) \times (2) \times (0) \times (1) \\ & -6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(-6; -4; -2; 0; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

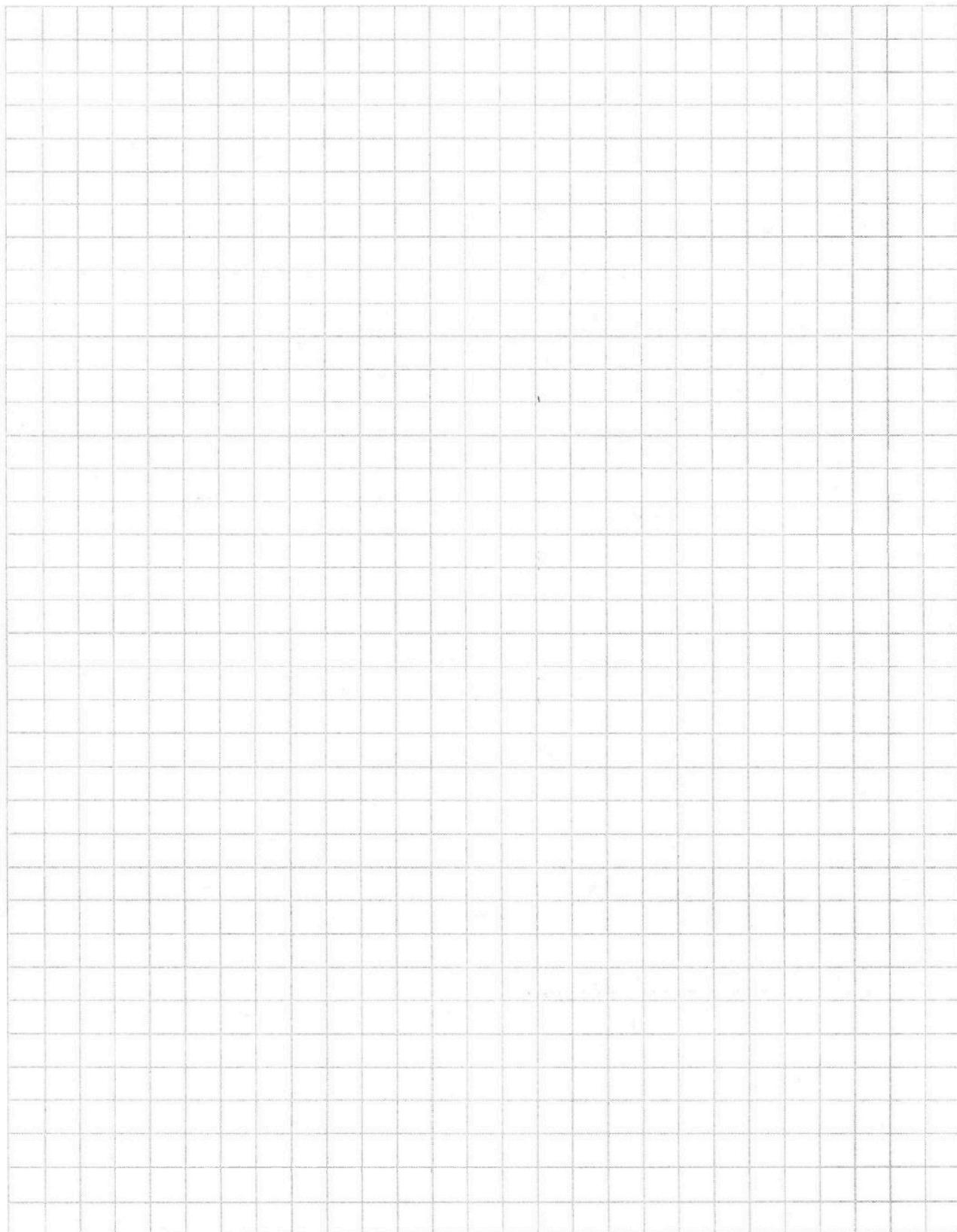
6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{4}$
 $\frac{5}{7}, 0$

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = 1$$

$$-5\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$5\sqrt{2}$$

$$\max(\sin x + \cos x)$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sin x + \cos x \right)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!