

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одноклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одноклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одноклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что число  $A$  можно записать так:  $\overline{aaab}$ .

$A = \overline{aaaa}$ , где  $a$  — цифра, и из четырех ее копий, которые составляют  $A$ . Тогда  $A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$ . Заметим, что 101 и 11 — простые, и  $a$  — тоже не является единицей, т.к. это цифра, значит  $A$  содержит простые 101 и 11 в первом столбце. Чтобы число  $A \cdot B \cdot C$  было квадратом натурального числа, оно должно содержать все простые делители в четверти степени, значит оно должно быть <sup>также</sup> ~~одно из~~ <sup>также</sup> одни из чисел  $A \cdot B \cdot C$  делится на 101 и на 11. Заметим, что  $C$  — двузначное, значит оно  $C < 100$  и не может делиться на 101, значит  $B$  делится на 101, а т.к. оно трехзначное, то оно представимо в виде  $B = \overline{60b}$ , где  $b$  — некоторая цифра.

Однако по условию в записи  $B$  есть цифра 1, значит  $b = 1$ , и  $B = 101$ . Также заметим, что  $B = 101$  не делится на 11, тогда  $C \mid 11$ , а значит  $C$  — двузначное, значит

С представимо в виде:  $C = \overline{cc}$ , где  $c$  — некоторая цифра.

По условию в записи  $C$  есть цифра 5, значит  $c = 5$  и  $C = 55$ .

Тогда произведение  $A \cdot B \cdot C$  можно записать так:  $101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 5$

Т.к. это произведение должно быть квадратом, то оно содержит 5 когда  $a$  в первом столбце, а т.к.  $a$  — цифра, т.к.  $0 \leq a \leq 5$ , то  $a = 5$  (заметим, что  $a \neq 0$ , т.к. при  $a = 0$   $A = 0$ , и это не является натуральным, то противоречит условию).

Таким образом  $A = 5555$ . Тогда искомое тройка чисел  $(A; B; C)$ :

$$(5555; 101; 55)$$

Ответ:  $(5555; 101; 55)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \quad \text{и } 2 \\ \text{По условию, если } x \text{ увеличить на 3,} \\ \text{а } y \text{ - уменьшить на 3, то значение } K \text{ не изменится, т.е.}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \begin{array}{l} : (x+y+1), \text{ по условию } x > 0 \text{ и} \\ y > 0, \text{ значит } x+y+1 > 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy - 3y + 3x - 9}$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x - y = 3$$

Четвертая запись дает  $M$ :

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy.$$

Поставим  $(x-y) = 3$ :

$$M = 3(x^2 + xy + y^2) - 3xy = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy =$$

$$= 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2$$

Поставим  $x-y=3$ :

$$M = 3 \cdot 3^2 = 27$$

Ответ:  $M = 27$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нр 3.

$$a). (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 1 - 2k, k \in \mathbb{Z} \quad x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Тогда уравнение удобнее записать так:

$$(x; 3x - 1 + 2k), (x; -x + 1 + 2n), \text{ где } x \in \mathbb{R},$$

$$k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } (x; 3x - 1 + 2k);$$

$$(x; -x + 1 + 2n), x \in \mathbb{R}; k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$b). \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Запись, что ~~арккосинус~~ арккосинус

Найдем область определения функции  $f(t) = \arccos t$ , т.е.  $\{t | -1 \leq t \leq 1\}$ , а область значений  $E(f) = [-\pi; \pi]$ . Тогда неравенство определено, когда

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При этом при всех допустимых  $x \neq y$ :

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq 2\pi, \text{ т.е. неявное}$$

равенство при всех допустимых  $x \neq y$ , т.е. кроме, когда

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \\ x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

При этих значениях неявное

равенство не выполняется, т.е.

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{3} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

при  $x = -4 \neq y = 3$  неявное не выполняется, значит

при  $x \in [-4; 4]$  и  $y \in [-3; 3]$  неявное не выполняется. (установлено, что для каждого  $x$ , есть

требующее доказать  $x \neq y$ :

$$x \in [-4; 3]; y \in [-3; 8].$$

Теперь подсчитаем, при каких  $x \neq y$  на этих отрезках верно

$$1). y = 3x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Перебираем значение  $x \in [-4; 3]$  и подсчитываем сколько пар  $(x, y)$  соотвествует для  $y \in [-3; 8]$  при

все возможных целых  $k$  (при  $x \in \mathbb{Z}$  и  $y \in \mathbb{Z}$  получим  $y \in \mathbb{Z}$ ):

$$x = -4: y = -13 + 2k; k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ (9 шагов)}$$

$$x = -3: y = -10 + 2k; k = 1, 2, \dots, 9 \text{ (9 шагов)}$$

$$x = -2: y = -7 + 2k; k = 1, 0, \dots, 7 \text{ (7 шагов)}$$

$$x = -1: y = -4 + 2k; k = -2, -1, \dots, 6 \text{ (9)}$$

$$x = 0: y = -1 + 2k; k = -4, -3, \dots, 4 \text{ (9)}$$

$$x = 1: y = 2 + 2k; k = -5, -4, \dots, 3 \text{ (9)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 2; y = 5 + 2k; k = -18; -7; \dots; 1 \quad (9)$$

$$x = 3; y = 8 + 2k; k = -8; -7; \dots; 0 \quad (9)$$

Получаем  $8 \cdot 9 = 72$  пары решений.

$$2). y = -x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

аналогично перебрали значение  $x \in [-9; 3]$ :

$$x = -9; y = 5 + 2n; n = -7; \dots; 1 \quad (9)$$

$$x = -3; y = 9 + 2n; n = -6; \dots; 2 \quad (9)$$

$$x = -2; y = 3 + 2n \quad \cancel{\text{значения}} \quad \dots; 0$$

$$n = -6; \dots; 1; 2 \quad (9)$$

$$x = -1; y = 2 + 2n; n = -5; -4; \dots; 3 \quad (9)$$

$$x = 0; y = 1 + 2n; n = -5; -4; \dots; 3 \quad (9)$$

$$x = 1; y = 0 + 2n; n = -4; \dots; 4 \quad (9)$$

$$x = 2; y = -1 + 2n; n = -4; -3; \dots; 4 \quad (9)$$

$$x = 3; y = -2 + 2n; n = -3; -2; \dots; 3 \quad (9)$$

Получаем еще 56 пар решений. Всего 130

Более одного пункта 1) или 2) пересечений нет, однако между пунктами они могут быть. Найдем их когда совпадут. При ~~пересечении~~ будем же ~~равен~~

$$\begin{aligned} 3x + 13x - 2 &= -x + 1 + 2n \quad \text{Заменим, что } \\ 14x - 2 &= 2n - 1 \end{aligned}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Помогли конкретизацию  $x$  соотвествует все возможные  
и отрицательные  $y \in [-9; 8]$   
 $y$  одной определенной величины, т.к. для каждого  
 $x$  все  $y$  обмежаны на  $2m$ , т.е.  $\mathbb{Z}$ , т.е. они  
одной величины. Так же заметим, что в обоих  
случаях  $x$  и  $y$  одной величины:  $y = 3x - 1 + 2k$ ,  
 $y = -x + 1 + 2n$ ,  
Тогда для каждого числа  $x \in [-9; 8]$   $y$  соотвествующее  
и в обоих случаях однозначное, т.к. это все  
возможные  $y \in [-9; 8]$  определенной величины.  
Значит всего пар столько, сколько в одинак  
из случаев 1) или 2), т.е. 56.

Ответ: 56 пар  $(x, y)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ч 4.

Пусть в классе  $n$  учеников, и на концерт выделено  $k$  билетов, где  $k < n$ , т.к. в классе гораздо есть звёзд учеников: Петя и Валя.

Всего способов выдать из класса  $k$  билетов, которые получат  $n$  билету:  $C_n^k$ .

Пусть Петя и Валя научили билетов. Тогда осталось еще  $k-2$  билета и  $n-2$  ученика. Количество способов выдать  $k-2$  билетов из оставшихся  $n-2$  без Петя и Валей, которые получат билеты:  $C_{n-2}^{k-2}$ . Это все возможные способы, когда Петя и Валя получат билеты

Вероятность того, что Петя и Валя получат билеты:

$$P = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{n! \cdot (k-2)! \cdot (n-2-k+2)!} = \frac{(k-1)k}{(n-1)n}$$

В задаче наше число места выделено  $m$  билета, т.е.  $k=4$  и  $n=9$ .

Тогда количество учеников в классе пусть равно  $m$ .

Тогда вероятность Петя и Валя научить билетов в нашем классе  $P_1 = \frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 8}$

Пусть в нашем классе выдаётся оценка, что выделено  $m$  билетов, где  $m > 4$  — натуральное.

Тогда вероятность того, что Петя и Валя получат  $m$  билетов, в нашем классе стала равна  $P_2 = \frac{(m-1)m}{(n-1)n}$

По условию  $P_2 = 3,5 P_1$ :

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 3,5}{9 \cdot 8} = \frac{(m-1)m}{(n-1)n} \quad | \rightarrow (n-1) \cdot n = 12 \cdot 7 \text{, решено уравнение}$$

Решение уравнения Петя и Валя

$$m^2 - m = 42$$

$$m = 7 \quad \text{или} \quad m = -6 - \text{не удовлетворяет тому, что } m \in \mathbb{N}$$

Значит в нашем классе на концерт было выделено 7 билетов.

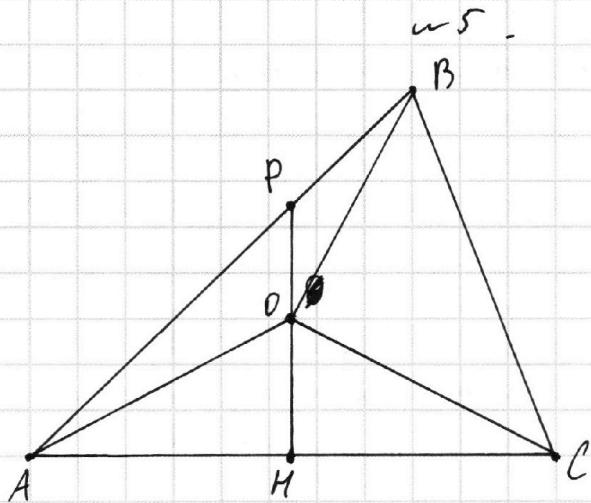
Ответ: 7 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $O$  - центр описанной окружности,  $AP = \frac{16}{5}$ ;  $BP = 2$ ;  $AC = 4$ .

Обозначим угол  $\angle ABO = \alpha$ .  
 $\angle ABL = \alpha$ . Он вписанный в  $w_1$ , т.к. и отражен в  $w_1$  дугу  $BC$ , тогда  $\angle BOC = 2\alpha$ , как центральный, опирающийся на ту же дугу  $BC$ .

Заметим, что  $OB = OC = OA$ , как радиусы  $w_1$ , т.к.

$$\triangle BOC - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle OBC = \angle BCO = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

Заметим, что точки  $C, O, P$  и  $B$  лежат на  $w_2$ , т.к. четырехугольник  $BPOC$  - вписанный, а т.к.  $\angle BPO + \angle BCO = 180^\circ$  то по свойству, получим  $\angle BPO = 90^\circ + \alpha$ .

Тогда все углы с ким:  $\angle APO = 180^\circ - \angle BPO = 90^\circ - \alpha$   
 Продолжим  $PO$  до пересечения с  $AC$ , пусть  $PO$  и  $AC$  пересекают  $AC$  в точке  $H$ .

Рассмотрим  $\triangle PAH$ :  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle P = 90^\circ - \alpha$ .

$\angle PHA = 180^\circ - \angle A - \angle AP = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$  по сумме углов треугольника. В таком случае  $PH \perp AC$ .

Рассмотрим  $\triangle AOC$ , он равнобедренный, т.к.  $AO = OC$ ,  $OH$  - его высота, проведенная к основанию, т.к.  $OH$  - медиана, т.к.

$$AH = HC = \frac{1}{2} AC = 2$$

$$\text{Из } \triangle PAH, \cos \angle PAH = \frac{AH}{AP} = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Из ОТТ: } \cos^2 \angle PAH = 1 - \sin^2 \angle PAH = 1 - \cos^2 \angle PAH = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$$

т.к.  $\angle PAH$  - острый по условию:  $\sin \angle PAH = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$$\text{Тогда площадь } \triangle ABC \ S: S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAH = \\ = \frac{1}{2} \cdot (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \angle PAH = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



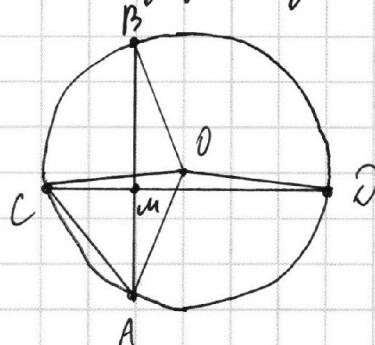
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1). Докажем лемму:  $\angle B + \angle D = \pi - \angle A - \angle C$ .  
 Доказательство:  
 Рассмотрим четырехугольник ABCD с центром O. Тогда  $\angle BOC + \angle AOD = \pi$ , где R — радиус окружности.



Доказательство:  
 Обозначим центр окружности за  $O$ , а  
 $\angle BAC$  за  $\alpha$ . Тогда, потому что пересечение  
 $AB$  и  $CD$  за  $M$   $\angle BAC = \angle BDC$ .  
 Тогда из  $\triangle AMD$   $\angle M = 90^\circ$ :  
 $\angle MCA = 90^\circ - \alpha$ .

Заметим, что углы  $\angle BAC$  и  $\angle MCA$  —  
 вписанные и опирающиеся соответственно на  
 дуги  $BC$  и  $AD$ , тогда дополнительные углы, опирающиеся  
 на соответствующие дуги:  $\angle BDC = 2\angle BAC = 2\alpha$ ,  
 $\angle AOD = 2\angle ACD = 180^\circ - 2\alpha$ .

$$\text{Тогда длина дуги } BC = \frac{\angle BOC}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R \alpha}{90^\circ},$$

$$\text{длина } AD: \frac{\angle AOD}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{(90-\alpha)\pi R}{90^\circ} = \pi R - \frac{\pi R \alpha}{90^\circ}$$

$$\text{Тогда сумма их длины: } BC + AD = \pi R - \frac{\pi R \alpha}{90^\circ} + \frac{\pi R \alpha}{90^\circ} = \pi R$$

Длина всей окружности  $2\pi R \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2\pi - \pi = \pi$   
 $= 2\pi R - (BC + AD) = \pi R$  — р.т.з.

$$2). \begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Второе неравенство означает, что точка лежит внутри круга радиуса 3,  
 с центром в точке  $O(0; 0)$ .

Первое неравенство равносильно:

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

Оно означает область четвертого квадранта  
 между правым верхним и левым левым углом  
 между прямолинейными  $x = 2 \cos \alpha$ ,  $y = 2 \sin \alpha$ .  
 Заметим, что точка их пересечения имеет

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим периметр фигуры  $P(\alpha)$ , как функцию от  $\alpha$  в  $P(\alpha)$ :

$$P(\alpha) = 3\pi + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha},$$

$P(\alpha)$  определена для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Требуется  $P(\alpha) \leq$  убедиться  $\partial T$ :

$$P(\alpha) = 3\pi + 2(\sqrt{5+4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9-4\sin^2 \alpha})$$

(делаем замену:  $\sin^2 \alpha = t, t \in [0; 1]$ )  
Тогда  $P(t) = 3\pi + 2(\sqrt{5+4t} + \sqrt{9-4t})$

Найдем производную этой функции  $P(t)$  во все значения  $t$  и, производная существует

~~При  $t=0$  и  $t=1$  производная равна нулю~~ при любых  $t \in [0; 1]$ :

~~Найдем ее форму~~  $P'(t) = \frac{4}{\sqrt{5+4t}} - \frac{4}{\sqrt{9-4t}}$

Найдем ее нули:  $P'(t) = 0$ :

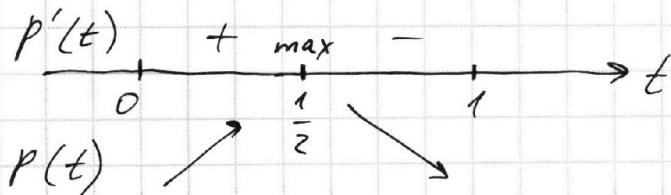
$$\frac{4}{\sqrt{5+4t}} - \frac{4}{\sqrt{9-4t}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5+4t} = \sqrt{9-4t}$$

$$5+4t = 9-4t$$

$$8t = 4$$

$$t = \frac{1}{2}$$



$P(t)$

В точке  $t = \frac{1}{2}$  производная функции имеет знак + имена на линии  $\Rightarrow$  точка  $t = \frac{1}{2}$  — максимум функции  $P(t)$  на отрезке  $[0; 1]$  и наименьшее значение  $P(t)$  достигает именно в точке  $t = \frac{1}{2}$ :

~~При  $t=\frac{1}{2}$  максимум~~

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = P_{\max} = 3\pi + 2\left(\sqrt{2+5} + \sqrt{9-2}\right) = 3\pi + 4\sqrt{7}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

координате  $(2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha)$ , т.е. лежит на окружности  $W$  с центром  $O(0;0)$  и радиусом 2, значит она лежит **вне** круга, задаваемого вторым неравенством.

Фигура  $\varphi(\alpha)$  представляет собой пересечение областей, задаваемых обеими неравенствами.

Пусть  $x = 2 \cos \alpha$  и  $y = 2 \sin \alpha$  пересекают окружность, с центром  $O(0;0)$  и радиусом 3 в точках  $A$  и  $B$ , и  $C$  и  $D$  (точка  $C$  на первом) соответственно. Значит, что второе неравенство имеет вид лежать **внутри** во всех точек  $z$  вне круга  $W$ .

Фигура  $\varphi(\alpha)$  представляет собой сумму областей все между отрезками  $AC$  и  $BC$  и дугой  $-AC$ , и между отрезками  $BD$  и  $CD$  и дугой  $-BD$  (имеются в виду дуги окружности с центром  $O(0;0)$  и радиусом 3).

Тогда периметр фигуры  $\varphi(\alpha)$  равен:  $AB + BC + CD + DA + AC + BD = AB + BC + CD + 2AC + 2BD$ .

Согласно дополнительной линии:  $\angle ACD + \angle BDA = \pi R$ , где  $R$  - радиус окружности, т.е.  $3 \Rightarrow \angle ACD + \angle BDA = 3\pi$ .

Тогда периметр фигуры  $\varphi(\alpha)$  равен:  $3\pi + AB + CD$ , или требуется его минимизировать.

Не удастся обнаружить способы, что  $A$  лежит выше  $B$ ,  $C$  лежит выше  $D$ . Найдем координаты точек  $A, B, C, D$ :

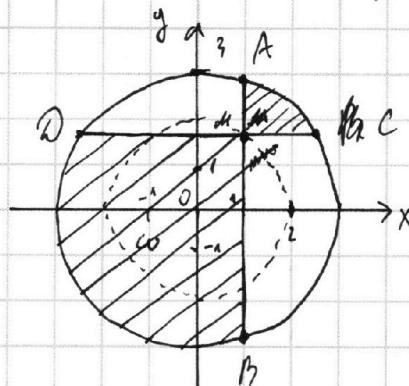
$$A: x = 2 \cos \alpha; y = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$B: x = 2 \cos \alpha; y = -\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$C: x = 2 \sin \alpha; y = \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$D: y = 2 \sin \alpha; x = -\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

Тогда длина отрезков:  $AB = 2\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}; CD = 2\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найденное значение  $P$  достигается тогда:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом  $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$  - максимальное

значение периода функции  $P(\alpha)$  и оно достигается

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $M = 3\pi + 4\sqrt{7}$ ;

достигается при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

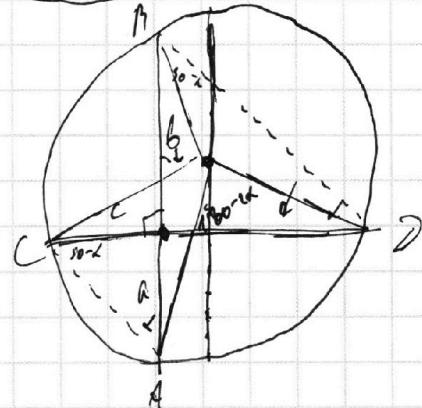
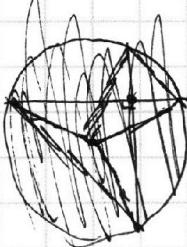
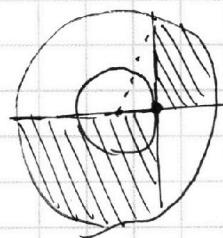
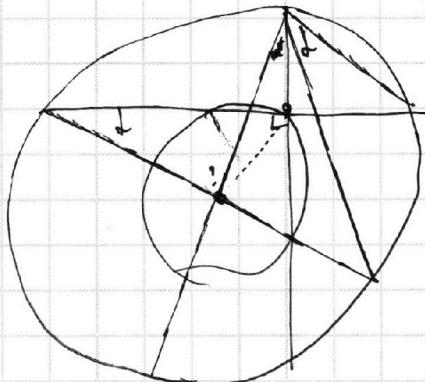
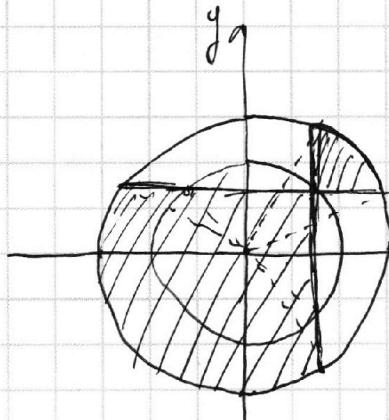
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\left( \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right) \left( \sqrt{9 - 4 \cos^2 \beta} - \sqrt{9 - 4 \sin^2 \beta} \right)$$

~~$$8 - 4 \cos^2 \alpha = 8 + 4 \sin^2 \alpha$$~~

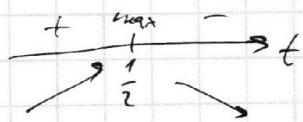
$$\frac{8 - 4 \cos^2 \alpha + 8 - 4 \sin^2 \alpha + 2 \sqrt{16 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 36 \cos^2 \alpha - 36 \sin^2 \alpha + 81}}{19 + 2 \sqrt{4 \sin^2 \alpha + 55}}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{8 - 4 \sin^2 \alpha}$$



$$f(t) = \sqrt{5 + 4t^2} + \sqrt{8 - 4t^2}$$

$$f'(t) = \frac{4t}{\sqrt{5 + 4t^2}} - \frac{4t}{\sqrt{8 - 4t^2}} = 0$$

$$5 + 4t^2 = 8 - 4t^2$$

$$t = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

四月

$$3x - 3y = 9$$

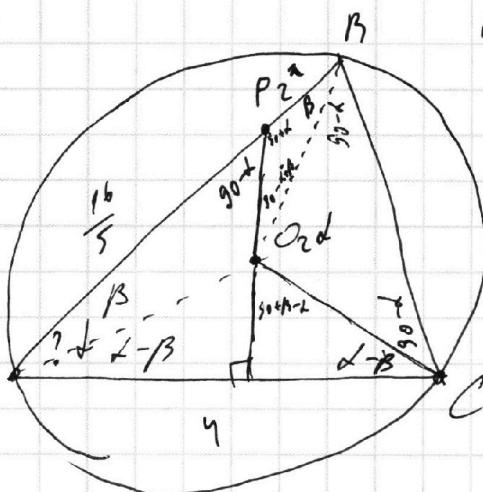
$$x - y = 3$$

$$AP = \frac{16}{5} \quad BP = 2$$

$$AC = 4$$

SLA S<sub>KMC</sub> - ?

A

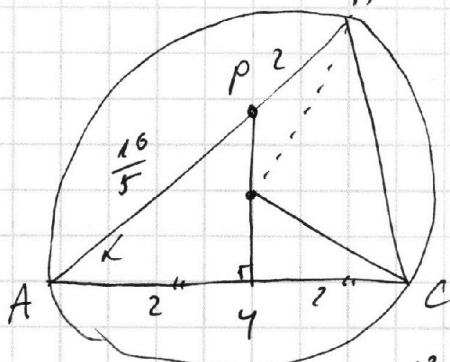


BPOC -  
бюджет

$$10^\circ - 2\alpha + \alpha + \beta + \gamma = 120^\circ$$

$$\beta - \alpha = \gamma$$

$$\beta \quad \quad \quad \phi = \alpha - \beta$$



$$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\cos k = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \angle = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad 39 + 25 = 64$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{26^{13}}{8} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

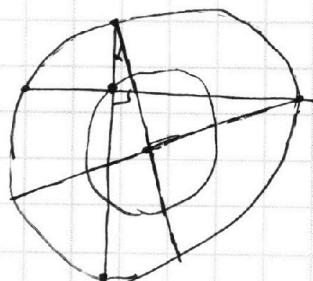
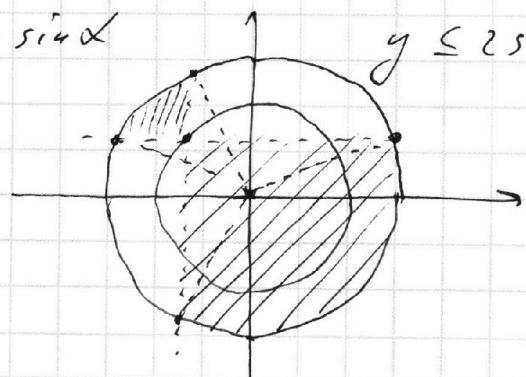
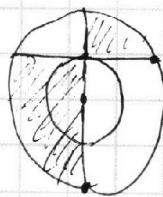
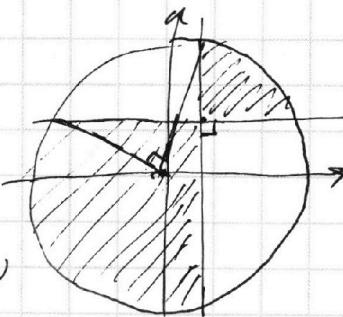
$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$x \geq 2 \cos \alpha$$

$$y \geq 2 \sin x$$

$$x < 2 \cos \alpha$$

$$y \leq 2 \sin \alpha$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a$$

25

и членов

$$B = \overline{\dots} / \overline{1\dots} / \overline{-1}$$

121

б членов

$$C = \cancel{-3k} - 5/5$$

И 2 члены больше  
(дист.)

$$\text{Add.} \cdot L = k^2$$

$$1111 = \overbrace{101}^k \cdot \overbrace{11}^{(k-1)}$$

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

A

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

3,5,6 (как) ср

$$3,5 \cdot 4 \cdot 3 = k(k(y+k)(3+k))$$

$$k^2 + 7k + 12 - 42 = 0$$

$$xy - xy - 3x = 3y + 9 \quad xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$\cancel{x+y=3}$$

$$\cancel{x-y=3}$$

$$\begin{aligned} k^2 + 7k - 30 &= 0 \\ 2 &= 48 + 120 = 168 \\ -10 &\quad (3) \end{aligned}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$M = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 3xy = 3x^2 - 6xy + 3y^2 =$$

$$3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x-y)^2 = 27$$

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a - \sin a \sin b = \cos^2 a + \cos a \cos b$$

$$\cos 2a + \cos(a-b) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3a-b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$3a-b = \pi + 2\pi k$$

$$\frac{C_{n-2}}{C_n} = \frac{k!}{(n-k)!}$$

$$\frac{(n-2)! k! (k-1)!}{(n-k)! (n-k-1)! (k-2)!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\pi x = \alpha, \quad \pi y = \beta$$

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\Rightarrow \sin a \cos b - \sin b \cos a = \cos^2 a$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos^2 \alpha - \cancel{\cos^2 \alpha} \sin^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$$

$\approx \frac{\pi}{2} + 2k\pi$



$$3\alpha = \beta + \pi + 2\pi k \quad \alpha + \beta = \pi + 2\pi n$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x + y = 1 + 2n$$

$$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \beta$$

$$y = 3x - 1 - 2k$$

