



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны натуральные числа A, B, C , пусть x - цифра которая в чет числе A повторяется x раз

$A: \underline{x} \underline{x} \underline{x} \underline{x}$

$B: \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$

$C: \underline{\quad} \underline{\quad}$

разложим число A на множители
 A представимо на $x \cdot 11 \cdot 101$

Заметим, что 101 и 11 простые числа

$$\begin{array}{r} x x x x \quad | \quad 101 \\ - x 0 x \quad \quad | \quad x x \\ \hline x 0 x \\ - x 0 x \\ \hline 0 \end{array}$$

$A \cdot B \cdot C = k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$

1

$101 \cdot 11 \cdot x \cdot B \cdot C = k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$

Получаем, что в произведении $A \cdot B \cdot C$ 101 и 11 должны входить в четном степенях. Так как делится на 11 , т.е. 101 и 11 взаимно просты и в общем произведении $A \cdot B \cdot C$ 101 и 11 в четном степенях, то при $C:11$ B должно делиться на 1111 . Однако B трехзначное $\Rightarrow C:11$. Если число делится на 11 в записи которого есть зна: $33 \Rightarrow C=33$

Подав общее чис: $A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 11 \cdot B$. Т.е. 101 должно быть в четной степени $\Rightarrow B:101$. Если же число делится на 101 , в записи которого есть $6:606 \Rightarrow B=606$

$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 = (101)^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot x$

x должно делиться на 2 . Из всех четных цифр для x подходят 2 и 8

Ответ: $(8888; 606; 33); (2222; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \\ k = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \end{cases}$$

приведем 2 дроби к общ. знаменателю

$$\begin{cases} k = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{5}{xy} \\ k = \frac{y+2}{(y+2)(x-2)} + \frac{x-2}{(y+2)(x-2)} + \frac{5}{(y+2)(x-2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{x+y+5}{xy} \\ k = \frac{x+2+y-2+5}{(y+2)(x-2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \xrightarrow{\substack{x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq 2, y \neq -2}} xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = (x-2)(y+2) \Rightarrow xy = xy - 2y + 2x - 4 \Rightarrow 0 = 2x - 2y - 4 \Rightarrow 2 = x - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y + 2$$

Подставим рав-во в выраж-е для k: $(y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) =$

$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8. \text{ Получаем, что единствен-}$$

ное возможное значение выраж-е 8. Достигается при $x=3, y=1$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 4 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в) $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

Заметим, что $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2}$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$

Получаются будут найдены все точки кроме тех, где достигается строгое не-во. Попробуем где $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$
 $\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Заметим, что по первой ур-е найдены

бесконечно много пар (x, y) , т.к. серия $(2n-1; 1)$ при

любом целом значении n покрывает бесконечно много пар целых чисел. При этом по второй ур-е найдены

только два возможных пара $(x, y) \Rightarrow$ все пар будут пара вна ур-е. Бесконечно много пар x ограниченные на arcsin
 Ответ: бесконечно много.

$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$

$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$

Находят все целые x и y ур-е.
 уравнению, не-бу $-6 \leq x \leq 6$
 $-2 \leq y \leq 2$

такие что $x \neq 6, y \neq 2$ удовлетворяют. Попробуем другие

- ~~$y = -2, x = 7 \oplus$~~
- ~~$y = -2, x = -5 \ominus$~~
- ~~$y = -2, x = 4 \oplus$~~
- ~~$y = -2, x = -3 \oplus$~~
- ~~$y = -2, x = -2 \oplus$~~
- ~~$y = -2, x = -1 \ominus$~~
- ~~$y = -2, x = 0 \oplus$~~
- ~~$y = -2, x = 1 \oplus$~~
- ~~$y = -2, x = 2 \oplus$~~

Заметим условия на x и y в другой форме
 $x+y=2n, n \in \mathbb{Z}$
 $3x-y=2k, k \in \mathbb{Z}$
 Условие того, что существует пара (x, y) рав-
 Носимые условию, что для данных x, y
 либо существует $n \in \mathbb{Z}$, либо существует
 $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2k \end{cases}$
 Получается, что x и y должны быть одина-
 новой четности и любая пара единиц любой
 четности подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \pi x = \alpha \\ \pi y = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \beta \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow$$

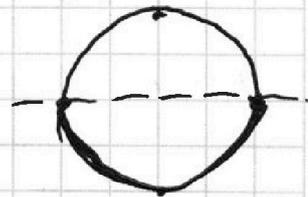
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha - \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{2\alpha + \alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{2\alpha - \alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha - \beta}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi k + \beta}{3} \\ \alpha = 2\pi n - \beta \end{cases}$$

Обр. замена: $\begin{cases} \pi x = \frac{2\pi k + \pi y}{3} \\ \pi x = 2\pi n - \pi y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k + y}{3} \\ x = 2n - y \end{cases}$



И. и. все переменные равнозначны, то данное рав-во будет выполняться для любых $y \in \mathbb{R}$ и $x = \frac{2k+y}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $x = 2n - y$, где $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: множество пар вида $(\frac{2k+y}{3}; y)$, где $k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$ и множество пар вида $(2n-y; y)$ где $n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для кота Глазвейн интервалом для x $-6 \leq x \leq 6$, а для y интервал: $-2 \leq y \leq 2$.

Для $y = -2$ ~~итд.~~ $\Rightarrow x$ должно быть четным и все четные x подойдут \Rightarrow подойдут 7 x -ов, принадлежащих интервалу

Для $y = -1 \Rightarrow$ подойдут только нечетные x : 6 вар-ов

$y = 0 \Rightarrow$ все 7 четных x -ов

Для $y = 1 \Rightarrow$ 6 вариантов нечетных x

Для $y = 2 \Rightarrow$ 7 вар-ов, но $x = 6$ не подходит, поэтому 6 вар-ов

$6 + 6 + 7 + 6 + 7 = 32$ варианта Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего людей N в классе

Тогда вероятность Пети и Васи попасть на концерт в классе равна $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$

вер-ся того, что гой поает
вер-ся того, что поает 1 (вычислим по

ф-ле условной вероятности) стало x билетов
в классе выделены еще x билетов, тогда новая
вероятность равна $\frac{x}{N} \cdot \frac{(x-1)}{N-1}$. При этом можно

записать уравнение: $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} \cdot 6 = \frac{x(x-1)}{N(N-1)}$ (*)

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-8 \end{cases}$$

Итого билетов стало 9, а выделенных билетов 4.
Получается, что в классу осталось 9 билетов

Тогда вероятность Пети и Васи вместе попасть на концерт равна $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$ по формуле условной вероятности

вер-ся
Петя поает на
концерт

вероятность Васи поает на
концерт

В классе было x билетов, тогда вероятность попасть на концерт в классе стала равна $\frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$

$$\text{Запишем ур-е: } \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} \cdot 6 = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-8 \text{ - не подходит} \end{cases}$$

Ответ: в классе было 9 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА 7 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \end{cases}$$

модуль координат ≤ 13 (все лежит в окружности радиуса 13)

$$(\pm 5\sqrt{2})(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

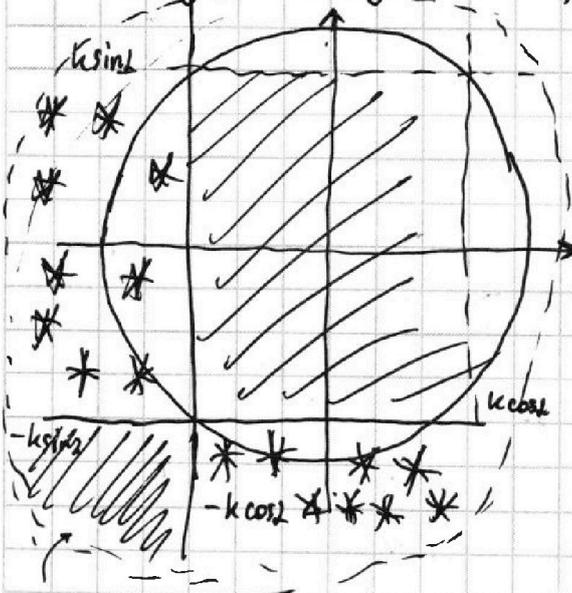
Заметим, что из первого ур-е следует то, что все точки с координатами попарно не имеют радиуса 13

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha \\ \begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \end{cases}$$

$$] k = 5\sqrt{2} \begin{cases} \begin{cases} x \leq -k \cos \alpha \\ y \geq -k \sin \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -k \cos \alpha \\ y \leq -k \sin \alpha \end{cases} \end{cases}$$

Нарисуем окружность радиуса k



Отметим две равно-отстоящие прямые $k \cos \alpha$ и $k \sin \alpha$ (критерии), сделаем симметрично относительно начала координат и получим прямые $-k \cos \alpha$ и $-k \sin \alpha$. Выделим 2 попарно не имеющие области (попарно отмечены *, не попарно отмечены штриховкой)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

М.е. можно нарисовать след. рисунок

$\sqrt{(r-0)^2}$
 $kx + x + ky + y =$
 $= k(x+y) + 1(x+y) =$
 $= (x+y)(k+1)$

$4\sqrt{169}$
 $2r$
 h
 $2\sqrt{r^2 - h^2}$
 r_1
 $r - h_1$
 $2\sqrt{r^2 - h_1^2} + 2\sqrt{r^2 - (h - h_1)^2}$
 $\sqrt{r^2 - h_1^2} \neq \sqrt{r^2 - (h - 2h_1 + h_1)^2}$
 $\sqrt{r^2 - h_1^2} + \sqrt{\frac{r^2 - h_1^2}{r^2 - (h^2 - 2hh_1 + h_1^2)}} =$
 $= \sqrt{r^2 - h_1^2} + \sqrt{r^2 - h_1^2 + 2hh_1 - h^2}$
 $\frac{1(-2h_1)}{2\sqrt{r^2 - h_1^2}} + \frac{1(-2h_1 + h)}{2\sqrt{r^2 - h_1^2 + 2hh_1 - h^2}}$

R
 $0 \leq h_1 \leq h$



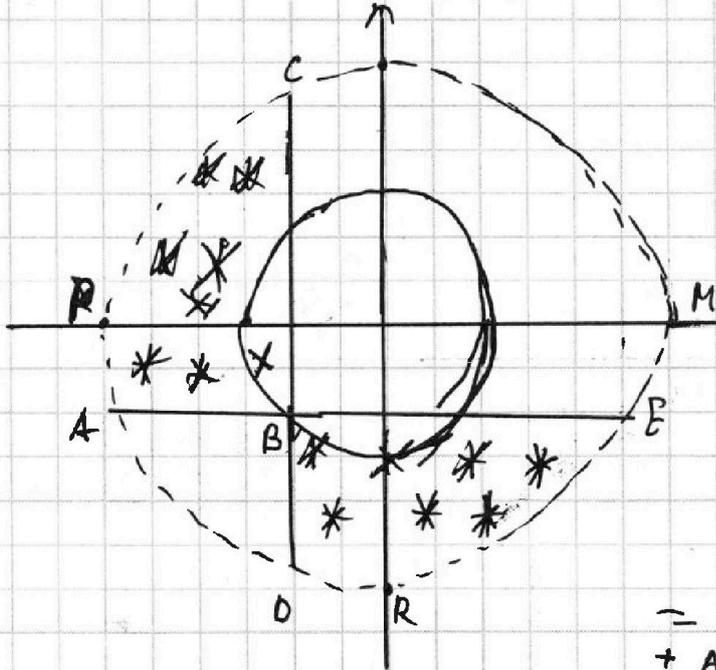
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
8 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно нарисовать следующий рисунок



Внешний окружность имеет радиус 13, - внутренняя $k=5\sqrt{2}$ (покоричневая область выделена *)

суммарная длина выделенной области составляет

$$\sqrt{AC} + \sqrt{DE} + AB + BE +$$

$$+ CB + BD =$$

$$= \sqrt{CP} + \sqrt{PA} + \sqrt{PE} + \sqrt{EM} +$$

$$+ AB + BE + CB + BD =$$

$$= \sqrt{ME} + \sqrt{PP} + \sqrt{DE} +$$

$$+ AB + BC + BE + BD =$$

(Вместо дуг PA берем дугу PE, вместо дуги PC возьмем дугу PBB)

$$= \sqrt{PDM} + AB + BC + BE + BD =$$

$$= 13\pi + AB + BC + BE + BD \Rightarrow \text{необходимо минимизировать}$$

сумму $AB + BC + BE + BD = AE + CD$. Замечим, что

наименьшее значение дуги достигается тогда, когда $AE = CD$, т.е. в точках, где $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$$\text{Значение равно } 13\pi + 4\sqrt{169 - 125}$$

$$\text{Ответ: достигается при } \alpha_1 = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \alpha_2 = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

- ① формулы
② числа ОТТ
③ пер-ва

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x^3 - y^3 - 6xy}{xy} = \frac{y+x+5}{xy}$$

$$k = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

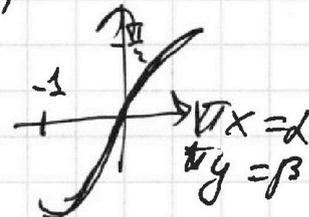
$$(x-2)(y+2) = xy \Leftrightarrow xy - 2y + 2x - 4 = xy$$

$$2x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y + 2$$

$$y^3 + 3y^2 \cdot 2 + 3 \cdot y \cdot 2^2 + 8 - y^3 - 6y(y+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 12y$$

$$(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta = \cos$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\frac{3}{2}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\frac{3}{2}$

$$27 - 1 - 6 \cdot 3 \cdot 1 \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \sin \alpha \cos \beta = (\cos \alpha - \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos \beta = \cos^2 \alpha - \cos \beta \cos \alpha$$

$$\sin \beta \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = -2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \left(\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



11:30 - старт задачи 1.

$$\begin{array}{r} 3333 \quad | 101 \\ - 303 \\ \hline 303 \\ - 303 \\ \hline \end{array}$$

① натуральные числа (A, B, C)

A: $\underline{x} \underline{x} \underline{x} \underline{x}$

B: $\begin{array}{c} \div 6 \div \text{любо} \\ \underline{6} \div \div \text{любо} \\ \div \div \underline{6} \end{array}$

C: $\begin{array}{c} \div 3 \\ \underline{3} \div \end{array}$ *любо*

$$A \cdot B \cdot C = k^2 \quad k \in \mathbb{N}$$

$$A = x + 10x + 100x + 1000x$$

$$A: 11$$

$$A: 11 \Rightarrow k^2 = 121t^2$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot k$$

$$\begin{array}{r} kkkk \quad | 101 \\ - k0k \\ \hline k0k \end{array} \quad k \leq 9$$

\Rightarrow В *дополнительно* *дроби* *дроби* *близ* *к* *о* *о* *о*
ми-ли *101* *и* *11* *дроби* *близ* *к* *о* *о* *о*
в *разности* *В* *и* *С* *или* *просто* *ми-ли* *о*

$$\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$C = 33$$

$$C: 11$$

$$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot \underline{11} \cdot 101 \cdot \underline{11} \cdot k \quad \underline{606},$$

$$\underline{33},$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 202 \\ 303 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \\ 808 \\ 909 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \widehat{3} \cdot \underline{11} \cdot \widehat{101} \cdot \widehat{6} \cdot \underline{11} \cdot \widehat{101} \cdot k = \\ \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \\ = 3^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = -2 \sin\left(\frac{\pi+\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$-1 - 0 = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$BC = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha}$$

$$2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha = \dots \cos 2$$

$$BC = \sqrt{35^2 + 30^2 - 2 \cdot 35 \cdot 30 \cos \alpha}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = r$$

$$\begin{array}{l} x \leq -5\sqrt{2} \cos x \\ -x \geq 5\sqrt{2} \cos x \end{array}$$

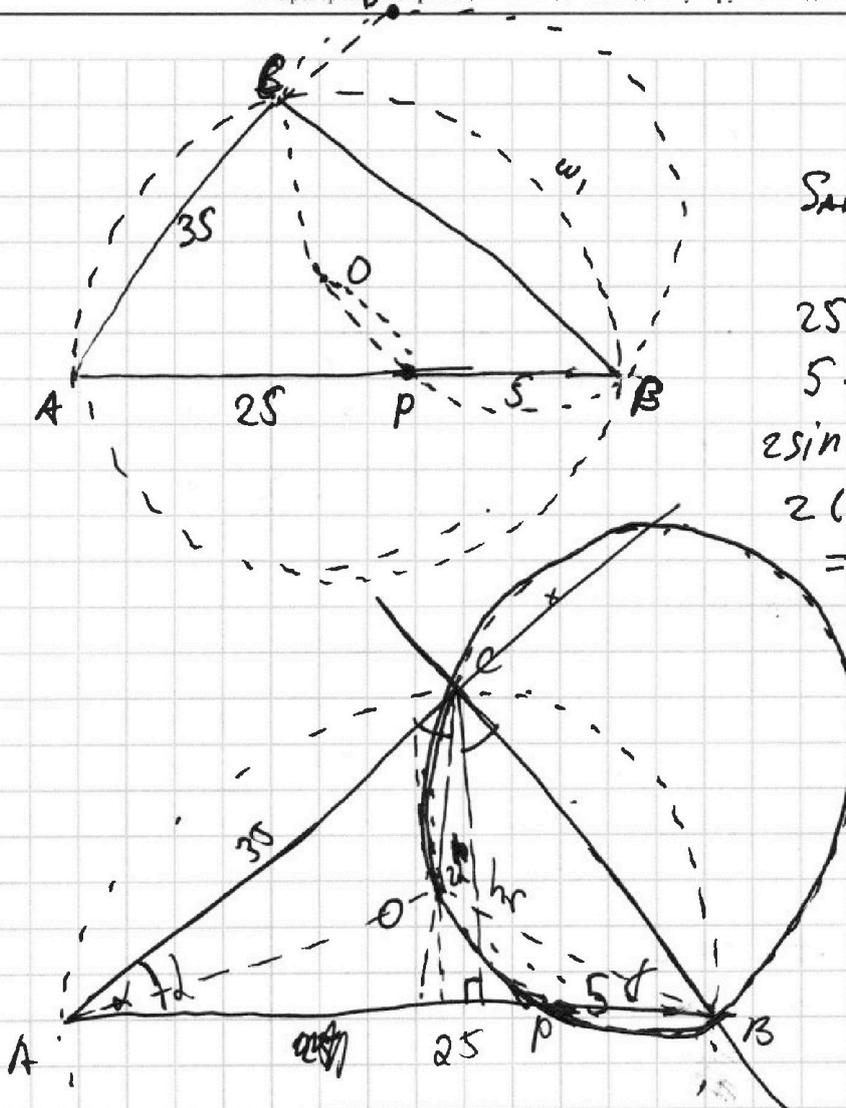


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABC} = ?$

$$25 \cdot 30 = 35 \cdot x$$

$$5 \cdot 30 = 7 \cdot x$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$2(1 - \cos^2 \alpha) =$$

$$= 2 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\frac{h}{35} = \sin \alpha$$

$$\frac{h}{CB} = \sin \alpha$$

$$\frac{35}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$35 \sin \alpha = BC \sin \alpha \Leftrightarrow$$

$$BC = 35$$

$$\frac{2h}{\sin \alpha} = r$$

$x + y$

$$CB =$$

$$2h = x + y$$

$$2h - y = x$$

$$\frac{2h + y}{3} = x$$

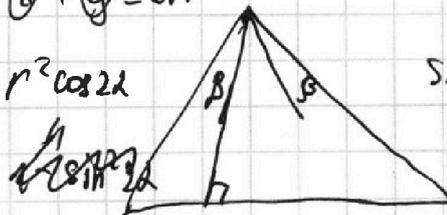
$$2h = x + y$$

$$3x + y = 2h \quad 2h + y = 3x \Leftrightarrow$$

$$x + y = 2h$$

$$2h = 3x - y$$

$$2r^2 \sin^2 \alpha = r^2 - r^2 \cos^2 \alpha$$



$$\sin \beta = \frac{BC \sin \alpha \cdot r}{BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:

$$y = \frac{2k+4}{3}$$

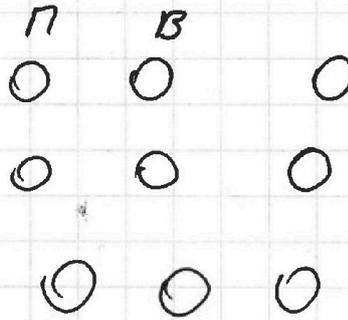
$$y(2n-y) \quad x = 2n - y \Rightarrow \pi x = 2\pi n - \pi y$$

$$\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad \pi y$$

$$\cos(2\pi n - \pi y) - \cos(\pi y) = 0$$

$$\sin(2\pi n - \pi y) + \sin(\pi y)$$

ⓐ



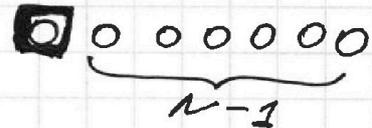
4 + x билетов

вначале берем с общим количеством билетов

всего N людей

4

$$\frac{C_{N-1}^3}{C_N^4} \quad \text{где } \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6}$$



$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{6} = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

пусть купило x билетов

$$\frac{x}{N} \cdot \frac{(x-1)}{N-1} = \frac{12}{N(N-1)} \cdot 6 = \frac{x(x-1)}{N(N-1)}$$

$$12 \cdot 6 = x(x-1) \Rightarrow x = 9$$

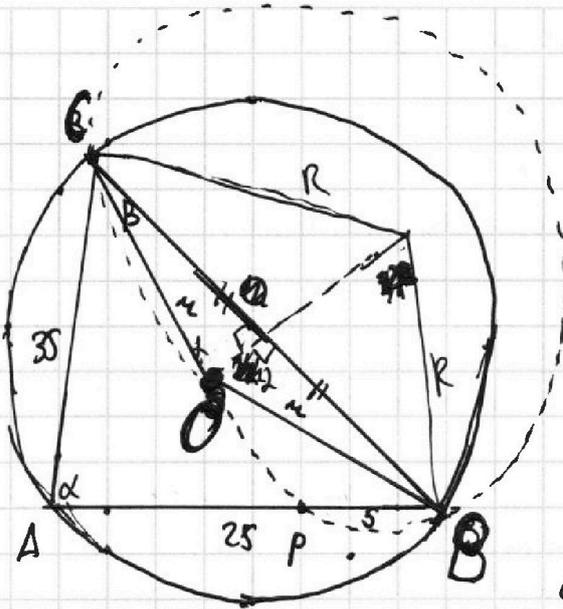


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:
AP=25
BP=5
AC=35

$OA = OB = R$ - радиус
маленькой сф-ры

$\angle A = \alpha$

$\angle BOC$ центральный

$\Rightarrow \angle BOA = 2\alpha$

Можно сравнить следующие
соотношения

$$BC = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha} \quad \text{т. кос для } \triangle BOC$$

$$BC = \sqrt{30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cos \alpha} \quad \text{т. кос для } \triangle ACB$$

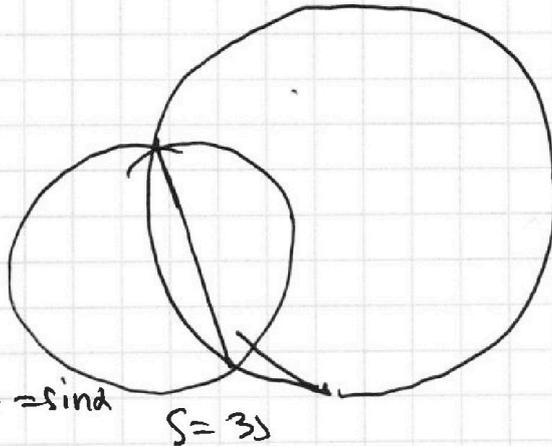
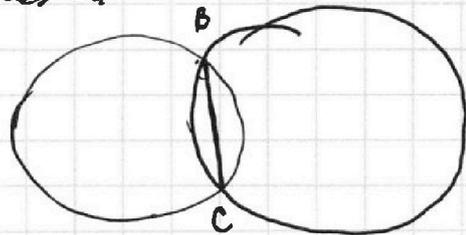
$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2r \quad \text{т. синусов } \triangle ACB$$

$$BC^2 = 4r^2 \sin^2 \alpha = 2r^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$4r^2 \sin^2 \alpha = 2r^2 (1 - \cos 2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

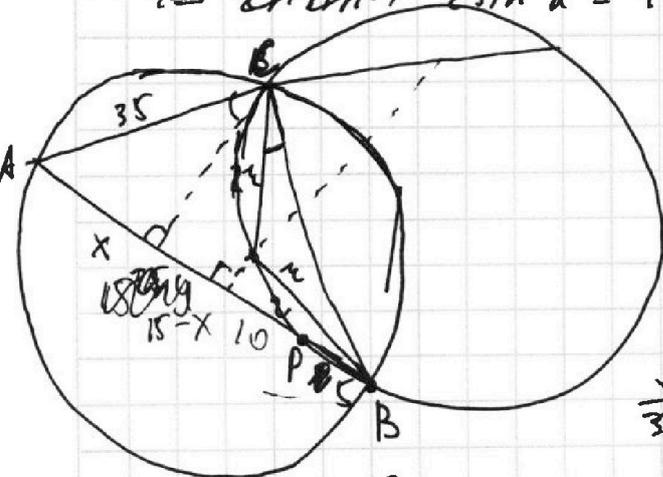
$$\begin{array}{r} 3 \\ 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \end{array}$$



$$\frac{x}{35} = \sin \alpha$$

$$S = 35$$

$$4r^2 \sin^2 \alpha =$$



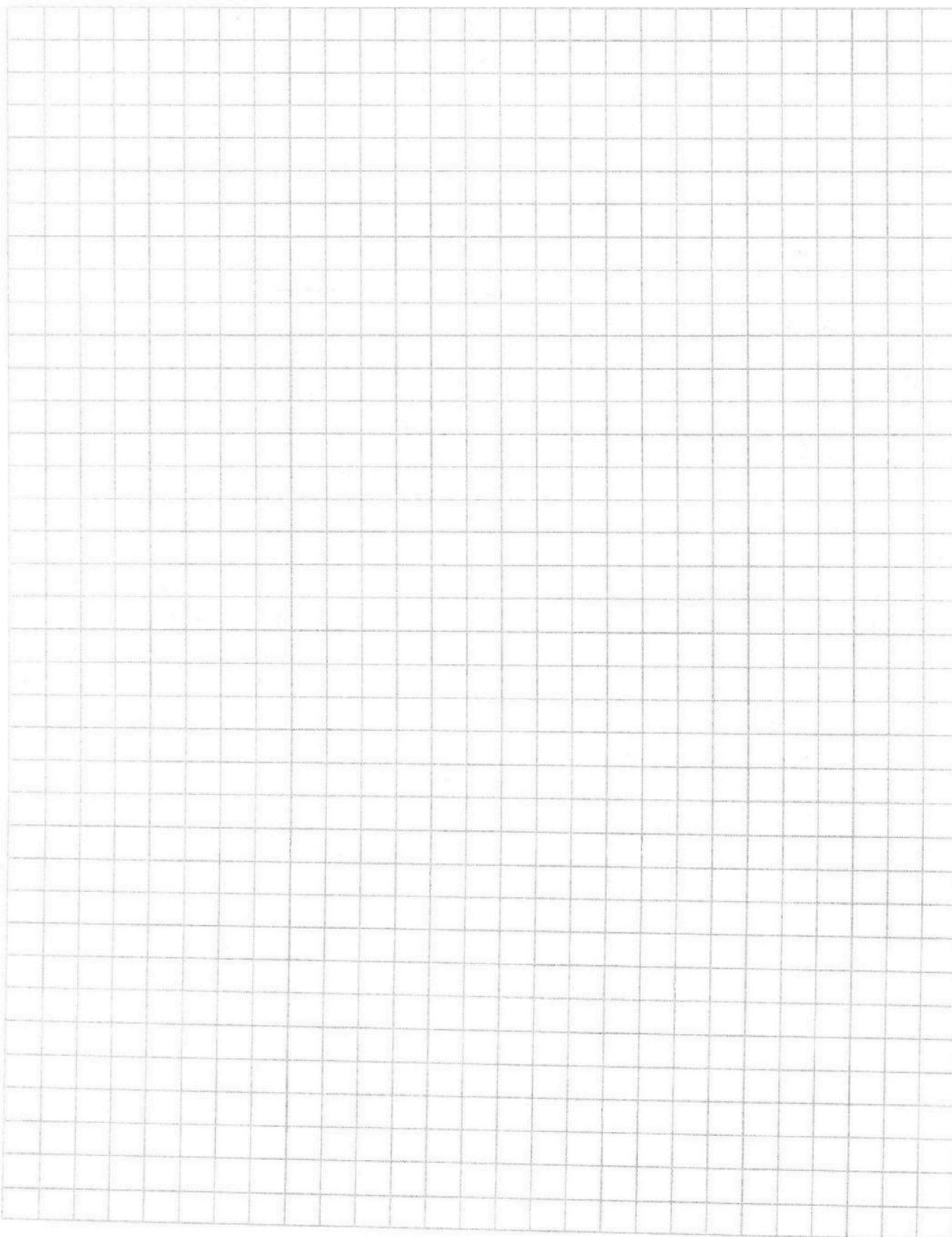


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

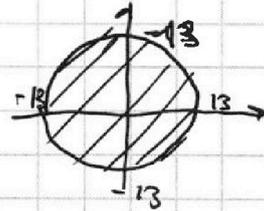
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

Черновики



$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos\alpha \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sin\alpha \geq 0 \end{cases}$$

~~или~~ ~~или~~ ~~или~~ $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq -\cos\alpha$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y \geq -\sin\alpha$$

$$5\sqrt{2} = k$$

$$x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha$$

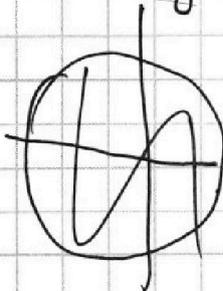
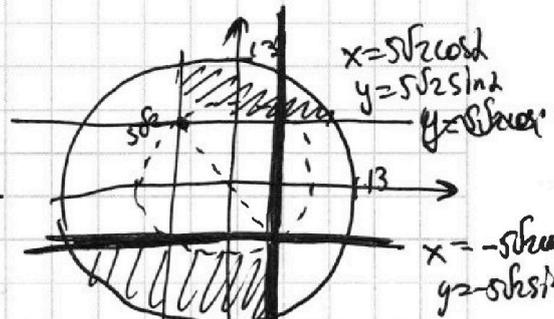
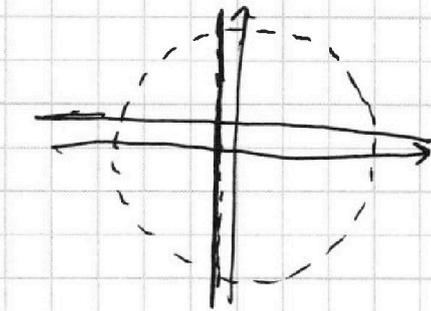
$$\Leftrightarrow x \leq -k\cos\alpha$$

$$y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha$$

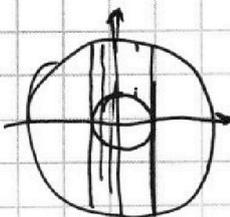
$$x \leq -k\sin\alpha$$

$$-x \geq 5\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$-y \geq 5\sqrt{2}\sin\alpha$$



$$\sin\alpha \geq 0$$



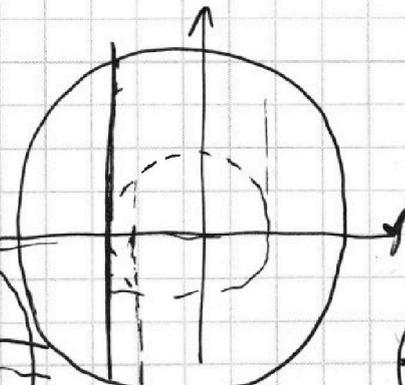
$$l = 2\pi r$$

$$\frac{1}{2}l = \pi r$$

$$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^4} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{4}{n}$$



$\beta \sim$

$n-1$ раз

$$\frac{C_{n-1}^k}{C_n^k} =$$

