



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Даны натуральные числа A, B, C , пусть x — цифра, которая в чет числе A повторяется 4 раза

$A: \underline{x} \underline{x} \underline{x} \underline{x}$

$B: \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$

$C: \underline{\quad} \underline{\quad}$

разложим число A на множители
 A представимо на $x \cdot 11 \cdot 101$

Заметим, что 101 и 11 простые числа

$$\begin{array}{r} x x x x \quad | \quad 101 \\ - x 0 x \quad \quad | \quad x x \\ \hline x 0 x \\ - x 0 x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

1

$$101 \cdot 11 \cdot x \cdot B \cdot C = k^2, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Получаем, что в произведении $A \cdot B \cdot C$ 101 и 11 должны входить в четных степенях. Так как делится на 11, т.е. 101 и 11 взаимно просты и в общем произведении $A \cdot B \cdot C$ 101 и 11 в четных степенях, то при $C:11$ B должно делиться на 1111. Однако B трехзначное $\Rightarrow C:11$. Если число делится на 11 в записи которого есть зна: 33 $\Rightarrow C=33$

Подав общ-е: $A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 11 \cdot B$. Т.е. 101 должно быть в четной степени $\Rightarrow B:101$. Если число делится на 101, в записи которого есть 6:606 $\Rightarrow B=606$

$$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 = (101)^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot x$$

x должно делиться на 2. Из всех четных цифр для x подходят 2 и 8

Отв: $(8888; 606; 33); (2222; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \\ k = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \end{cases}$$

приведем 2 дроби к общ. знаменателю

$$\begin{cases} k = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{5}{xy} \\ k = \frac{y+2}{(y+2)(x-2)} + \frac{x-2}{(y+2)(x-2)} + \frac{5}{(y+2)(x-2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{x+y+5}{xy} \\ k = \frac{x+2+y-2+5}{(y+2)(x-2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \xrightarrow{x \neq 0, y \neq 0} xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = (x-2)(y+2) \Rightarrow xy = xy - 2y + 2x - 4 \Rightarrow 0 = 2x - 2y - 4 \Rightarrow 2 = x - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y + 2$$

Подставим рав-во в выраж-е для k : $(y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) =$
 $= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$. Получаем, что единствен-
 ное возможное значение выраж-е 8. Достигается при $x=3, y=1$
 Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\text{Заметим, что } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$$

Получается будут подходить все точки кроме тех, где достигается строгое не-во. Рассмотрим где $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = 1 \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Заметим, что по первой ур-е подходит

бесконечно много пар (x, y) , т.к. серия $(2n-y; y)$ при любом целом значении y покрывает бесконечно много пар целых чисел. При этом по второй ур-е подходит только два возможных пара $(x, y) \Rightarrow$ все пар будут удовлетв. ~~бесконечно много пар~~ x ограничение на $\arcsin$ ~~ответ: бесконечно много.~~

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$$

$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$$

Подходит все целые x и y ур-е, уравнению, не-бу $-6 \leq x \leq 6$ $-2 \leq y \leq 2$ и

такие что $x \neq 6, y \neq 2$ удовлетвено. ~~Получается~~

$$\begin{aligned} y \neq -2 & \quad x \neq -6 \oplus \\ y = -2 & \quad x = -5 \ominus \\ y = -2 & \quad x = -4 \oplus \\ y = -2 & \quad x = -3 \oplus \\ y = -2 & \quad x = -2 \oplus \\ y = -2 & \quad x = -1 \ominus \\ y = -2 & \quad x = 0 \oplus \\ y = -2 & \quad x = 1 \oplus \\ y = -2 & \quad x = 2 \oplus \\ y = -2 & \quad x = 3 \oplus \\ y = -2 & \quad x = 4 \oplus \\ y = -2 & \quad x = 5 \oplus \\ y = -2 & \quad x = 6 \oplus \end{aligned}$$

Запишем условие на x и y в другой форме $x+y=2n, n \in \mathbb{Z}$ $3x-y=2k, k \in \mathbb{Z}$ Условие того, что существует пара (x, y) рав-носимые условию, что две данные x, y либо существует $n \in \mathbb{Z}$, либо существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\begin{cases} x+y=2n \\ 3x-y=2k \end{cases}$ Получается, что x и y должны быть одинаковой четности и любая пара одинаковой четности подходит.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2)(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \pi x = \alpha \\ \pi y = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \beta \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow$$

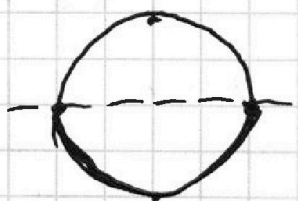
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha - \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{2\alpha + \alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{2\alpha - \alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha - \beta}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi k + \beta}{3} \\ \alpha = 2\pi n - \beta \end{cases}$$

Обр. замена: $\begin{cases} \pi x = \frac{2\pi k + \pi y}{3} \\ \pi x = 2\pi n - \pi y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k + y}{3} \\ x = 2n - y \end{cases}$



И. и. все переносы равносильны, то данное рав-во будет выполняться для любых $y \in \mathbb{R}$ и $x = \frac{2k+y}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $x = 2n - y$, где $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: множество пар вида $(\frac{2k+y}{3}; y)$, где $k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$ и множество пар вида $(2n-y; y)$ где $n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для кота Назовей интервалом для x $-6 \leq x \leq 6$, а для y интервал: $-2 \leq y \leq 2$.

Для $y = -2$ ~~итд.~~ $\Rightarrow x$ должно быть четным и все четные x подойдут $\Rightarrow$ подойдет 7 x -ов, принадлежащих интервалу

Для $y = -1 \Rightarrow$ подойдет только нечетные x : 6 вар-ов

$y = 0 \Rightarrow$ все 7 четных x -ов

$y = 1 \Rightarrow$ 6 вариантов нечетных x

$y = 2 \Rightarrow$ 7 вар-ов, но $x = 6$ не подходит, поэтому 6 вар-ов

$6 + 6 + 7 + 6 + 7 = 32$ варианта Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 6 ИЗ 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего людей N в классе

Тогда вероятность Пети и Васи поехать на концерт в начале равна $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$ вер-я того, что той поедет

вер-я того, что поедет 1 (выбавили по формуле условной вероятности) стало x билетов
 в конце выделены еще x билетов, тогда новая вероятность равна $\frac{x}{N} \cdot \frac{(x-1)}{N-1}$. При этом можно записать уравнение:

$$\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} \cdot 6 = \frac{x(x-1)}{N(N-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-8 \end{cases}$$

Итого билетов стало 9, а изначально было 4.
 Получается, что в конце месяца было

Тогда вероятность Пети и Васи вместе поехать на концерт равна $\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$ по формуле условной вероятности

вер-я Пети поедет на концерт
 вероятность Васи поедет на концерт

В конце было x билетов, тогда вероятность поехать на концерт в конце стала равна $\frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$

$$\text{Запишем ур-е: } \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} \cdot 6 = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-8 \text{ не подходит} \end{cases}$$

Ответ: в конце было 9 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
7 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \end{cases}$$

модуль координат ≤ 13 (все лежит в окр-сти радиуса 13)

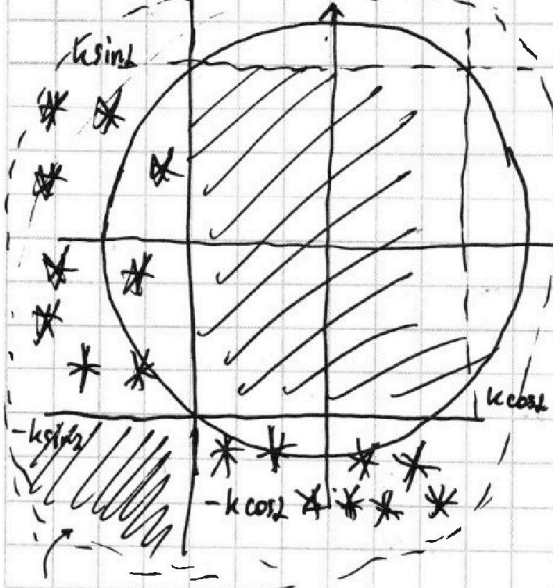
$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$k = 5\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x \leq -k \cos \alpha \\ y \geq -k \sin \alpha \\ x \geq -k \cos \alpha \\ y \leq -k \sin \alpha \end{cases}$$

Нарисуем окружность радиуса k



Отметим две взаимно-перпендикулярные прямые $k \cos \alpha$ и $k \sin \alpha$ (пуантиром), сделаем симметрично относительно их начала координат и получим прямые $-k \cos \alpha$ и $-k \sin \alpha$

Выделим 2 поперечные на окружности. (поперечные обозначены *, не поперечные штрихованы)



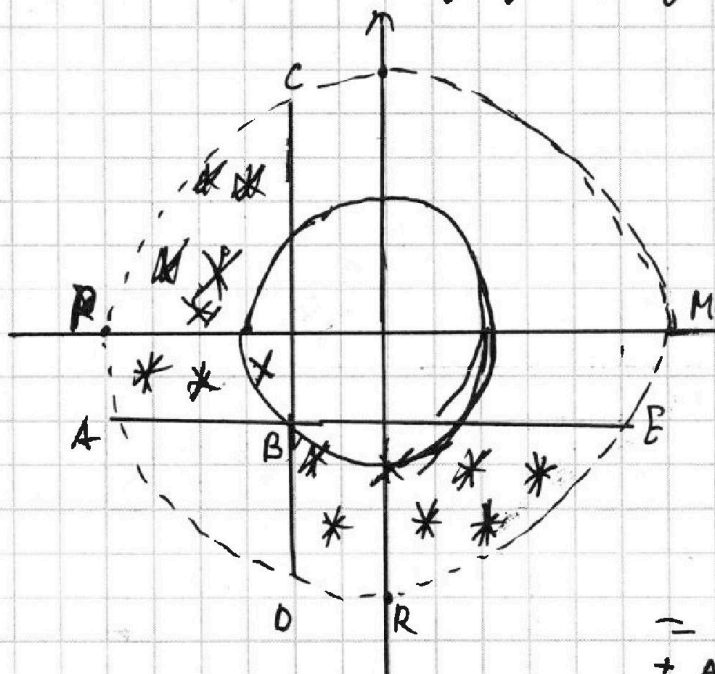
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
8 из 8

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Можно нарисовать следующий рисунок



Внешняя окружность имеет радиус 13, - выг-решение $k=5\sqrt{2}$ (подлежащая область выделена *)

суммарная дли-на выделенной области составляет

$$\begin{aligned} & \cup AC + \cup DE + AB + BE + \\ & + CB + BD = \\ & = \cup CP + \cup PA + \cup RE + \cup EM + \\ & + AB + BE + CB + BD = \\ & = \cup RP + \cup ME + \cup DP + \cup DE + \\ & + AB + BC + BE + BD = \end{aligned}$$

(Вместо дуги PA берем дугу PE, вместо дуги PC берем дугу PR)

$$= \cup RDM + AB + BC + BE + BD =$$

$$= 13\pi + AB + BC + BE + BD \Rightarrow \text{необходимо минимизировать}$$

сумму $AB + BC + BE + BD = AE + CD$. Замечим, что

наименьшее значение будет достигаться тогда, когда $AE = CD$, т.е. в точках, где φ равны $\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm 2\pi$

$$\text{Значение равно } 13\pi + 4\sqrt{169-125}$$

$$\text{Ответ: достигается при } \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \varphi_2 = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

① формулы

② числа ОТ

③ кр-ва

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x^3 - y^3 - 6xy}{xy} = \frac{y + x + 5}{xy}$$

$$k = \frac{y + x + 5}{(x-2)(y+2)} = \frac{y + x + 5}{(x-2)(y+2)}$$

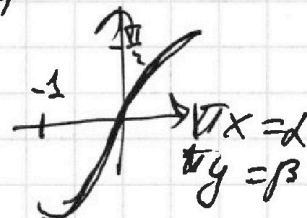
$$(x-2)(y+2) = xy \Leftrightarrow xy - 2y + 2x - 4 = xy$$

$$2x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y + 2$$

$$y^3 + 3y^2 \cdot 2 + 3 \cdot y \cdot 2^2 + 8 - y^3 - 6y(y+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 12y$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = \cos$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$\frac{2}{\sqrt{5}}$
 $\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$27 - 1 - 6 \cdot 3 \cdot 1 \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \cos \beta \cos \alpha$$

$$\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11:30 - старт задачи 1.

① натуральные числа (A, B, C)

$$A: \begin{array}{r} \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \end{array}$$

$$B: \begin{array}{r} \div 6 \div \text{либо } 11 \\ 6 \div \div \text{либо } 11 \\ \div \div 6 \end{array}$$

$$C: \begin{array}{r} \div 3 \\ 3 \div \end{array} \text{ либо}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2 \quad k \in \mathbb{N}$$

$$A = x + 10x + 100x + 1000x$$

$$A: 11$$

$$A: 11 \Rightarrow k^2 = 121t^2$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot k$$

$$\begin{array}{r} k k k k \div 101 \\ - k o k \\ \hline k o k \end{array} \quad k \leq 9$$

$\Rightarrow B$ должно делиться на 101 и 11
 в разложении B и C на простые множители

$$\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$C = 33$$

$$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot k \quad \underline{606},$$

$$C: 11$$

$$\underline{33},$$

$$101$$

$$202$$

$$303$$

$$404$$

$$\begin{array}{r} 505 \\ 606 \\ 707 \end{array}$$

$$808$$

$$909$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 101 \cdot k = \\ \underline{\quad \quad \quad} \underline{\quad \quad \quad} \underline{\quad \quad \quad} \\ = 3^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = -2 \sin \left(\frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$-1 - 0 = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$BC = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha}$$

$$BC = \sqrt{35^2 + 30^2 - 2 \cdot 35 \cdot 30 \cos \alpha}$$

$$2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha = \dots \cos 2$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = r$$

$$\begin{array}{l} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ -x \geq 5\sqrt{2} \cos \alpha \end{array}$$

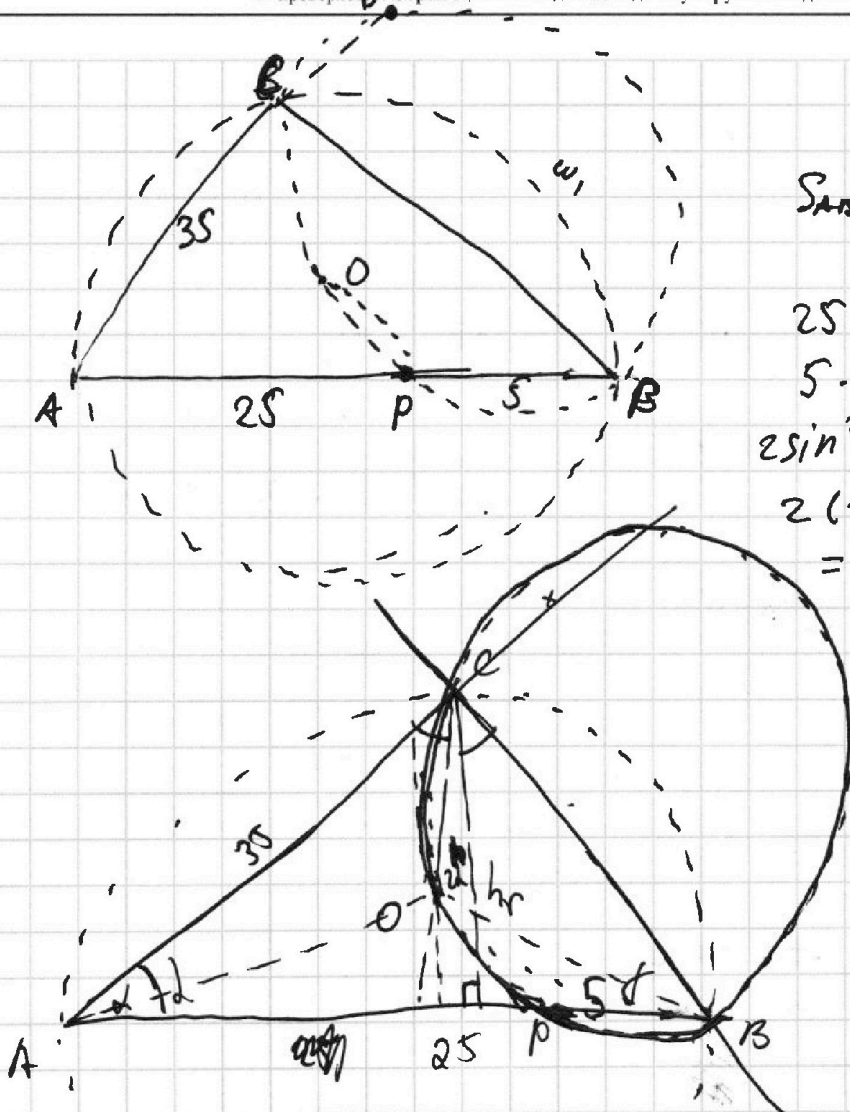


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABC} = ?$

$$25 \cdot 30 = 35 \cdot x$$

$$5 \cdot 30 = 7 \cdot x$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$2(1 - \cos^2 \alpha) = 2 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\frac{h}{35} = \sin \alpha$$

$$\frac{h}{CB} = \sin \alpha$$

$$\frac{35}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$35 \sin \alpha = BC \sin \alpha \Rightarrow$$

$$(\Rightarrow 35 \cdot \frac{h}{35})$$

$$\frac{2n}{\sin \alpha} = r$$

$$x + y$$

$$CB =$$

$$2n = x + y$$

$$2k = 3x - y$$

$$2n - y = x$$

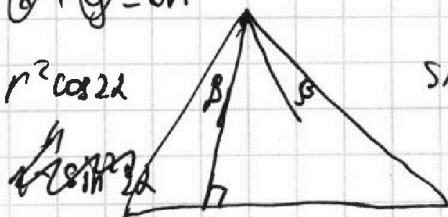
$$\frac{2k + y}{3} = x$$

$$2n = x + y$$

$$3x + y = 2n \quad 2k + y = 3x \Rightarrow$$

$$x + y = 2n$$

$$2r^2 \sin^2 \alpha = r^2 - r^2 \cos^2 \alpha$$



$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{BC \sin \alpha \cdot r}{BC}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверка:

$$y = \frac{2k+4}{3}$$

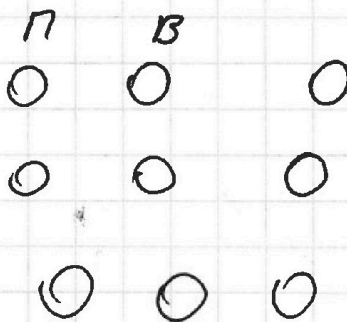
$$y(2n-y) \quad x = 2n-y \Rightarrow \pi x = 2\pi n - \pi y$$

$$- \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) \pi y$$

$$\cos(2\pi n - \pi y) - \cos(\pi y) = 0$$

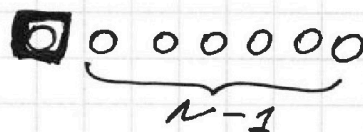
$$\sin(2\pi n - \pi y) + \sin(\pi y)$$

④



вначале берем 4 + x билетов
 всего N людей
 обилие
 понасть
 на концы

$$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^4} \quad \text{где } \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

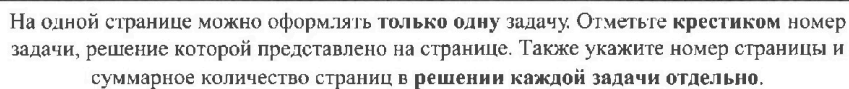


$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

пусть пришло x билетов

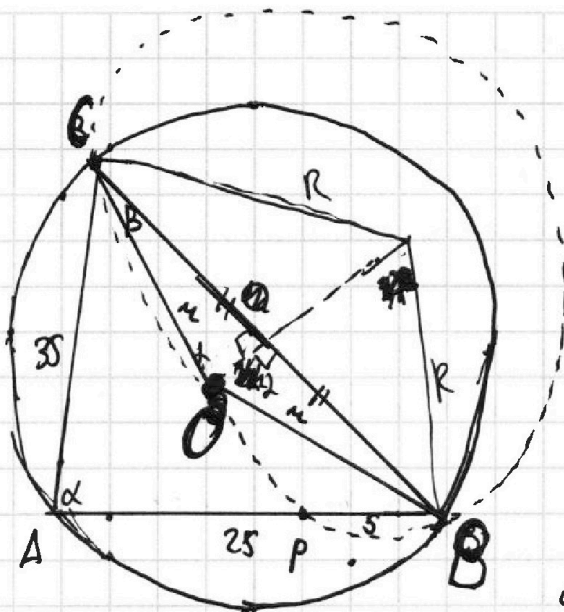
$$\frac{x}{n} \cdot \frac{(x-1)}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)} \cdot 6 = \frac{x \cdot (x-1)}{n(n-1)}$$

$$12 \cdot 6 = x(x-1) \Rightarrow x = 9$$

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Dano:

$AP = 25$

$$BP = 5$$

$AC = 35$

$OA = OB = R$ - радиус
маленькой окружности

$$\angle \alpha - \angle BAC$$

ЛВОС центральный

$$\Rightarrow \angle B\alpha = 2x$$

Мода справивши следующие
соотношения

$$BC = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha} \quad - \text{т. кос для } \triangle BOC$$

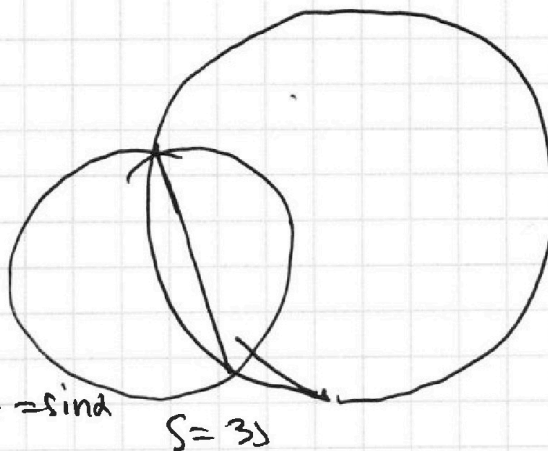
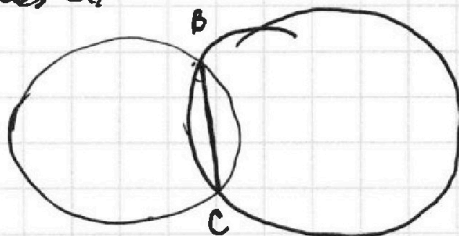
$$BC = \sqrt{30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cos 110^\circ} = 7. \text{ koc } \text{güne } \triangle ACB$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2r \quad \text{т. центр } \Delta ACB$$

$$BC^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 2p^2 (2 \sin^2 \frac{A}{2})$$

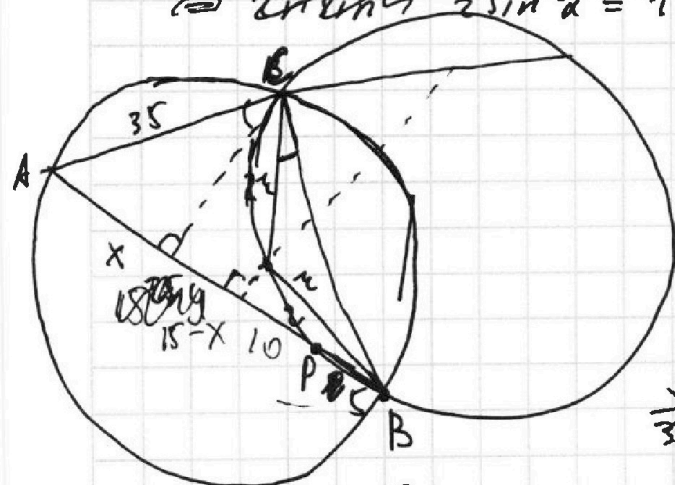
$$4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2r^2 (1 - \cos 2\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi \sin^2 \theta - 2\sin^2 \theta = 1 -$$



$$\frac{x}{35} = \sin \alpha$$

$$S = 32$$



$$4v^2 \sin^2 \alpha$$

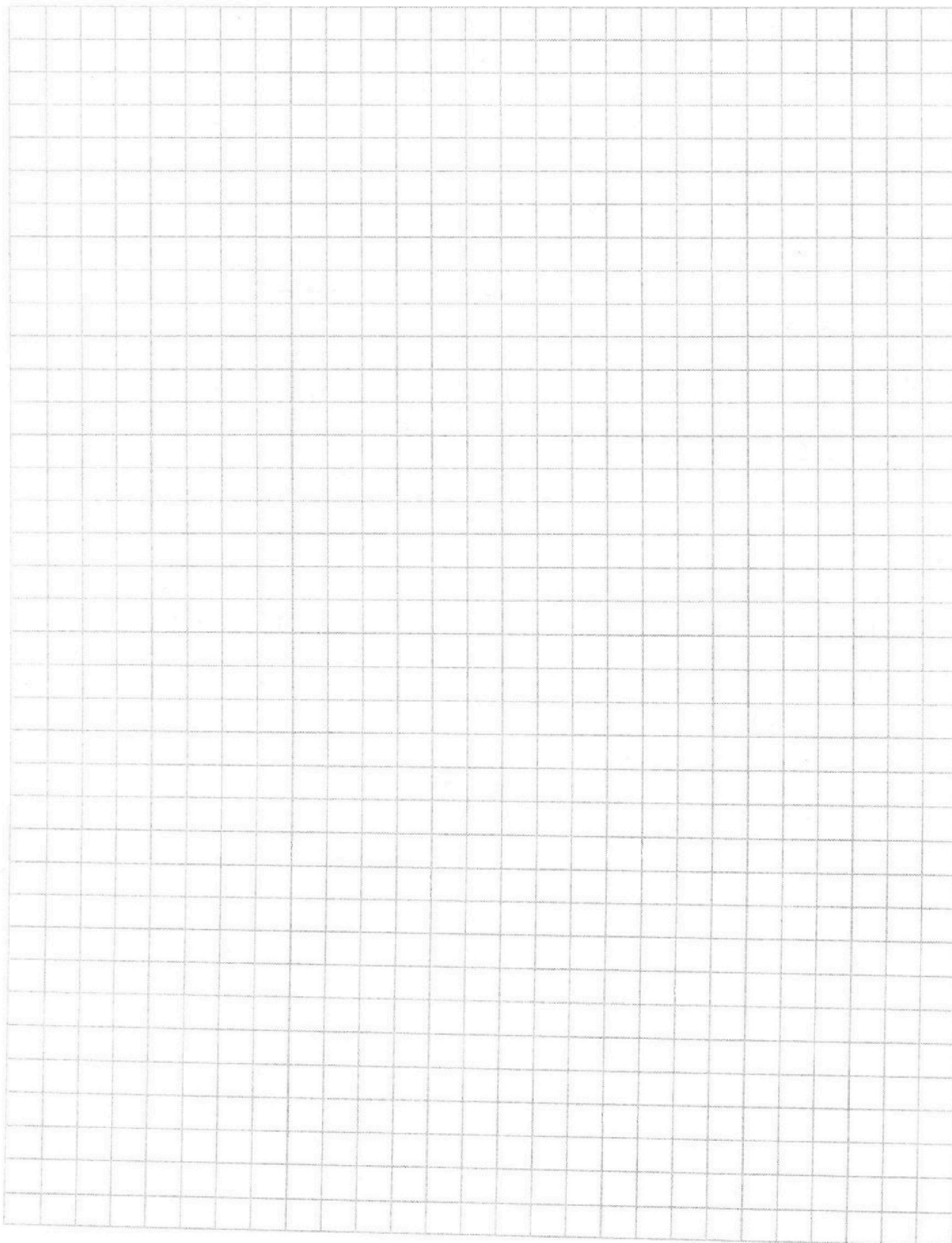


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 169 \\ (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos\alpha \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y + \sin\alpha \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq -\cos\alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y \geq -\sin\alpha$$

$$5\sqrt{2} = k$$

$$x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha$$

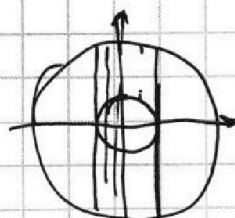
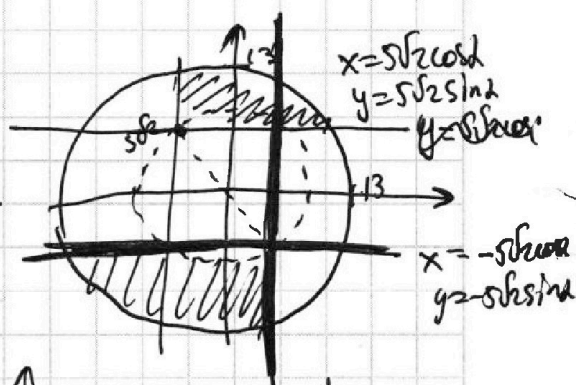
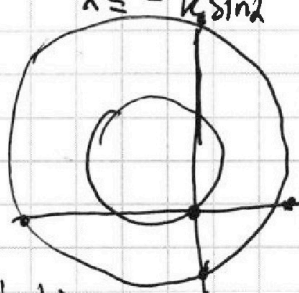
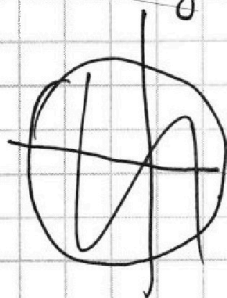
$$\Rightarrow x \leq -k\cos\alpha$$

$$y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$x \leq -k\sin\alpha$$

$$-x \geq 5\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$-y \geq 5\sqrt{2}\sin\alpha$$



$$l = 2\pi n$$

$$\frac{1}{2}l = \pi n$$

$$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^4} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} =$$

$$\frac{4}{n}$$

$$\frac{4}{n}$$

$$\frac{C_{n-1}^k}{C_n^k} =$$

Черновики

