



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.к. A - 4-разрядное число, составл. из одинак. цифр, то $A = a \cdot 1111$, где a - цифра (иначе $A \div 101$ и $A \div 11$ A -неступно.)

Чтобы $A \cdot B \cdot C = q^2$, q - н.ч., то каждый множ. должен входить в произведение в четн. степени $A \div 101$ и $A \div 101^2 \rightarrow \begin{cases} B \div 101 \\ C \div 101 \end{cases} \rightarrow$ невозможно, т.к. C - 3-значное.

наблюдаем, что $B \div 101$ и B содержит 2 $\rightarrow$ тогда B может быть только 202 (оно простое.)

$A \div 11$; $A \div 11^2$; $B \div 11 \rightarrow C \div 11$ и C содержит 3 $\rightarrow$ ~~C может быть только 33, т.к. C - 3-значное.~~

~~тогда~~ Тогда $C = 33$; $B = 202 \rightarrow$

$\begin{cases} C \div 3 \text{ и } C \div 3^2 \\ B \div 2 \text{ и } B \div 2^2 \end{cases} \rightarrow A \div 6^4$, ищем $A = a \cdot 1111$ где $a < 10 \rightarrow a$ только 1

$\Rightarrow A = 6666$

Проверим, что такая тройка подходит:

$$6666 \cdot 202 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$\rightarrow$ и квадрат н.ч. число $q = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3$

Ответ: $A = 6666$
 $B = 202$
 $C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по усл. $x, y > 0$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

приведем к общему знаменателю и посчитаем:

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad x \neq 1, y > 0$$

числители обеих частей равны

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ xy=(x-1)(y+1) \end{cases} \rightarrow \text{замечим, что } x, y > 0 \rightarrow \text{противоречие.}$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1 \rightarrow x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy. \text{ При } x = y + 1$$

$$\rightarrow M = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Следует: $M = 1$

достигается при, например, $x=2, y=1$ ($x=y+1$):

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = 8 - 1 - 7 = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi y$$

$$\cancel{\sin^2 \pi x} + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \cos^2 \pi y$$

$$\rightarrow \sin^2 \pi x = \cos^2 \pi y \rightarrow \sin \pi x = \pm \cos \pi y$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас было n 11 классиков. Тогда вероятность того, что из группы 5 человек два достанутся Петя и Вова: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^5}$
где C_{n-2}^2 - кол-во способов выбрать 2 человека из $n-2$ человек, а C_n^5 - общее кол-во способов выбрать 5 человек из n человек.

C_n^4 - общее кол-во способов выбрать 4 человека из n человек. Тогда вероятность того, что из группы 4 человек два достанутся Петя и Вова: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$

По усл.: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x}$

$$\rightarrow \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} \cdot \frac{5}{2} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x! \cdot (n-x)!}{n!}$$

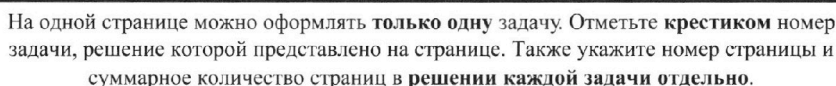
$$\rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 2} \rightarrow x(x-1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 30$$

$$x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 6 \end{cases}$$

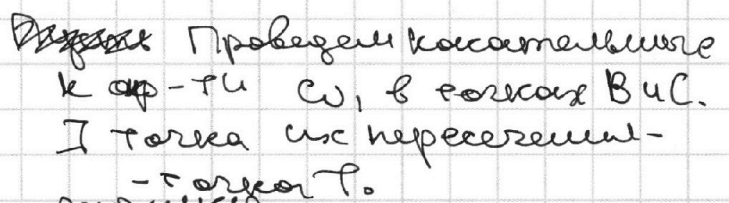
т.к. кол-во человек положительно,
 $x = 6$

Ответ: 6



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Результат ~~Результат~~ из центра окр-ти
к точкам касания $\perp$ -на
касательным $\rightarrow OBLBT$

W A I A T

→ з-к 2-го ОВСТ $\alpha = 30^\circ$ $\rightarrow$ он вынужден. Угол по 30° $\rightarrow$ он вынужден. Но т.к.

Forces B, O, C remain constant
exp - the ω_2 to ω_1 . $T \in \omega_2$

$\angle CBT = \angle A$, так как угол между касат. и хордой

CLA & exp- π ω , ω exp. на (BC) $\rightarrow \Sigma A = A \rightarrow$

$$\angle CBT = \angle A = \angle BCT = \alpha$$

Проведен по РС. 4-к РВТС-воис. и СРВ опер. на

$$\angle BC = \angle CT + \angle BT = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha \Rightarrow \angle CB = 2\alpha$$

Но $\angle CPB$ - внешний угол $\triangle APC \rightarrow \angle A + \angle ACP = 2\alpha$
 $\rightarrow \angle ACP = \alpha$.

В $\triangle APC$ известна высота PH . Тогда из $\triangle AHP$ ~~получим~~: $\cos \alpha = \frac{AH}{AP}$, и т.к. APC $\triangle$ и PH - высота, а значит, и медиана $AP = AC = 3$

В-высота, а соотв. и медиана AP $AP = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$

$$AP = \frac{15}{2} \rightarrow \cos d = \frac{9 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{3}{5} \rightarrow \sin d = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$AB = AP + BP = \frac{15}{2} + \frac{10}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = AC \cdot AB \cdot \sin \angle A \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

Ombeem: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найдем координаты: $y = 3$ и $y^2 + x^2 = 25$
 $\rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow x = 4$
($y = 3$ т.к. центр O ΔOPA (см. рис.) $OA = R = 5$,
а y — катет.)

$$\rightarrow x = 4, \quad CD = 2x = 8 = EF$$

$$\rightarrow M = \pi \cdot R^2 + 8 + 8 = \boxed{5\pi + 16}$$

~~Найдем $CD^2 + EF^2 =$~~
 ~~$2 \cdot (2x_0)^2$~~
~~где x_0 — координата x т. O ; x_1 — координата x т. E~~

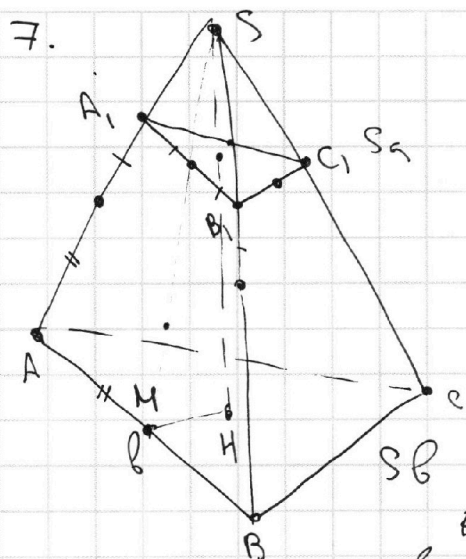


1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Страна $\triangle A_1B_1C_1$ равна a ; страна $\triangle ABC$ равна $a \cdot k = b$

Тогда радиус сферы, кас. грани равен r ; радиус сферы, кас. ребер равен R

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} r \cdot (S_{бок} + S_a + k^2 \cdot S_a)$$

(объем равен $\frac{1}{3}$ площади $\triangle ABC$ умножить на высоту h (высота равна h радиусу сферы))

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_b \cdot h_b - S_a \cdot h_a = S_a \cdot k^2 \cdot h_a \cdot k - S_a \cdot h_a = \frac{1}{3} S_a \cdot h_a \cdot (k^3 - 1) = \frac{1}{3} \cdot h_a \cdot (k-1) \cdot (k^2 + k + 1) \cdot S_a$$

Примем замечание, что $h_b - h_a = 2r \Rightarrow h_a(k-1) = 2r$

$$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot k^2 \cdot S_a \cdot 2r \cdot (k^2 + k + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot 2r \cdot (k^2 + k + 1) = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (S_{бок} + S_a(k^2 + 1))$$

$$2S_a(k^2 + 1) + S_a \cdot k \cdot 2 = S_{бок} + S_a(k^2 + 1)$$

$$S_{бок} = S_a(k^2 + 2k + 1) = S_a(k+1)^2$$

Рассмотрим шар, кас. ребер. и т. А. касат. из т. А к этому шару равен, причем т.к. вписанная сфера, шар касается сторон основания в их серединах.

Касат., проведенные из одной точки к сфере равны $\rightarrow AA_1 = A_1B_1$

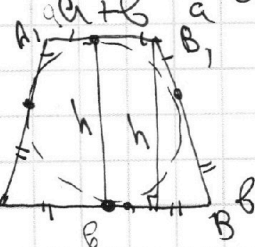
Проведем AA_1BB_1 ;

и т. Пирамиды;

$$h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$4h^2 + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\rightarrow h^2 = ab \rightarrow h = \sqrt{ab}$$





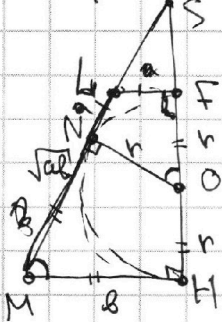
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

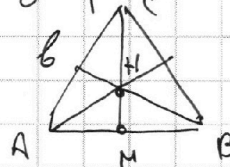
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

теперь ΔSHM , где M - середина AB :



ΔSHM и ΔABC $\sim$ ΔABC и L - сеп. AB

из p/c ΔABC :



$$MC = \frac{b\sqrt{3}}{2} \quad \text{кас. высота}$$

$$MH = \frac{b\sqrt{3}}{6} \quad \text{кас. т. пересек. с центром в отн. 2:1}$$

где $\Delta A_1B_1C_1$ аналог.

$$FL = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Delta SLF \sim \Delta SMH \rightarrow \frac{LF}{MH} = \frac{SL}{SM}$$

по подобию ΔSLF и ΔSMH $b = a \cdot k$

$$\rightarrow \frac{LF}{MH} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}}{b \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{k} = \frac{SL}{SM} \rightarrow SL \cdot k = SM + \sqrt{ab}$$

ΔN - т. кас. к окруж. в центре пересечения медиан ($\sqrt{3}$). Тогда $NH = LA$ и $MA = MH$ кас. касаются с одной точки. Итого, т.к. $MH = \sqrt{ab}$:

$$\sqrt{ab} = (a+b) \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \quad | : \sqrt{ab} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \text{или } \frac{1}{k} + k = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\text{выберем в квадрат: } \frac{1}{k} + 2 + k = \frac{12}{3} = 4$$

$$k + \frac{1}{k} = 2 \rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

$$\rightarrow S_{\text{ок.}} = S_a \cdot (k+1)^2 = S_b \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = S_b \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$$

$$\frac{S_{\text{ок.}}}{S_b} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{12 + \sqrt{140}}\right)^2 \quad k^2 - 12k + 1 = 0 \quad k = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{140}}{2}$$

$$\text{или } \frac{S_{\text{ок.}}}{S_b} = \left(1 + \frac{2}{12 - \sqrt{140}}\right)^2 = \left(1 + \frac{24 + \sqrt{140} \cdot 2}{(12 - \sqrt{140})^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{140}}{2}\right)^2$$

$$\text{Ответ: } \left(7 \pm \frac{\sqrt{140}}{2}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{k} + k - 10 = 0$$

$$k^2 - 10k + 1 = 0$$

$$D = 100 - 4 = 96$$

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{96}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\text{max}}}{S} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{6}}\right)^2 =$$

$$= \left(1 + 5 \pm 2\sqrt{6}\right)^2 = \left(6 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{\text{max}}}{S} = \left(6 \pm 2\sqrt{6}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

значение $x^3 - y^3 - 3xy$, при $\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x-2 \end{cases}$

при $y = x-1$:

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x =$$

$$= x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1$$

$y = -x-2$

$$\rightarrow x^3 + (x+2)^3 + 3x(x+2) = x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot x + 8 + 3x^2 + 6x =$$

$$= 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8$$

$$2(x^3 + 4x^2 + 4x + 2) = 2(x^3 + 4x^2 + 4x + 8) =$$

$$(2x^3 + 9x^2 + 18x + 8)' =$$

$$= 6x^2 + 18x + 18 \neq 0 : 6$$

$$x^2 + 3x + 3$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$\rightarrow f \rightarrow$ φ -числ возраст. на всей о. опр.

но $xy \neq 0$

$$(x-1)(y+1) > 0 \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y < -1 \\ x > 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

$$x=2, y=1$$

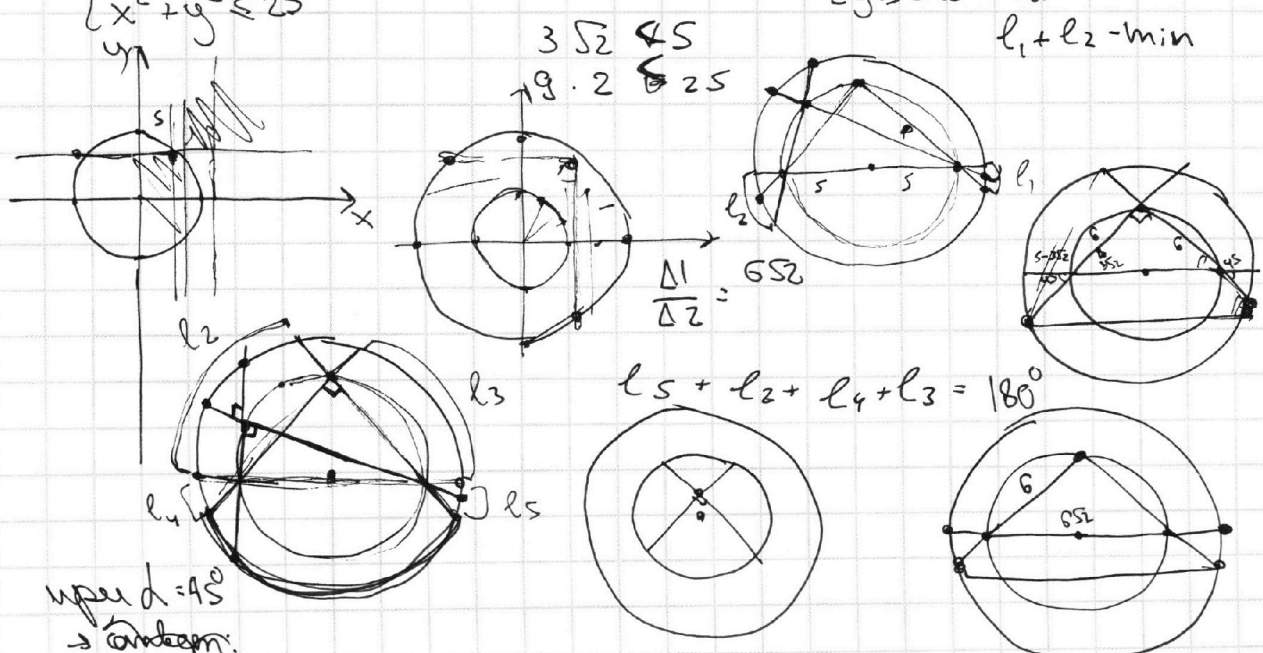
$$8 - 1 - 3 \cdot 2 =$$

4. I_y нас в 11-классе берем. того, что будем составлять 1-му гр.: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3}$

а мы знаем $\rightarrow p^2$ I_y нас стало x будем об.

стало p^1 и $p^1 \cdot 2 = p^2 + 2,5$

$$6. \begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \cdot \sin d)(y - 3\sqrt{2} \cdot \cos d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \cdot \sin d \\ y \leq 3\sqrt{2} \cdot \cos d \\ x \geq 3\sqrt{2} \cdot \sin d \\ y \geq 3\sqrt{2} \cdot \cos d \end{cases}$$





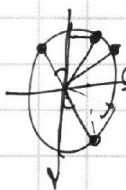
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

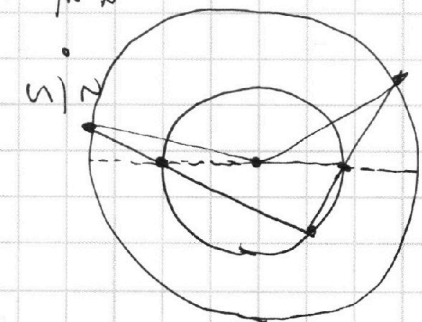
$$\begin{aligned} (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x \\ (\sin \pi x)^2 + \sin \pi y \cdot \sin \pi x &= (\cos \pi x)^2 + \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\sqrt{6}}{8} \\ \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} &= \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \\ \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (\sin \pi x)^2 + \cos(\pi y - \pi x) &= (\cos \pi x)^2 + \cos(\pi x - \pi y) \\ (\sin \pi x)^2 + \cos(\pi y - \pi x) &= (\cos \pi x)^2 + \cos(\pi x - \pi y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\pi x &= \cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y) \\ \cos 2\pi x &= \cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y) \end{aligned}$$

