

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Значит, что т.к.  $A$  - 4-рехциф. число, состоящее из одинарн. цифирр, то  $A = a \cdot 1111$ , где  $a$ -цифра (число  $\rightarrow A : 101$  и  $A : 11^2$ )  $A$ -четырехциф.

Чтобы  $A \cdot B \cdot C = q^2$ ,  $q$ -цвт., то комбинации чисел,  $A : 101$  и  $A : 101^2 \rightarrow$   $B : 101$

$C : 101 \rightarrow$  неводушн.числ., т.к.  $C$ -  
четырехциф., что  $B : 101$  и  $B$  содержит 2  $\rightarrow$   
тогда  $B$  имеет видно 202 (одн.трехциф.)

$A : 11 ; A : 11^2 ; B : 11 \rightarrow C : 11$  и  $C$  содержит 3  
 $\rightarrow C$  может быть видно 33, т.к.  
 $C$ -  
четырехциф.

~~если~~: Тогда  $C = 33 ; B = 202 \rightarrow$ :

$$\begin{cases} C : 3 \text{ и } C : 3^2 \\ B : 2 \text{ и } B : 2^2 \end{cases} \rightarrow A : 6^\alpha, \text{ причем } A = a \cdot 1111$$

т.к.  $a < 10$

$\rightarrow \alpha$  только 1

$$A = 6666$$

Проверим, что такая тройка подходит:

$$6666 \cdot 202 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$\rightarrow$  квадрат нест.числ.  $q = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3$

Очевидн.:  $A = 6666$   
 $B = 202$   
 $C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
4 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ищем.  $x, y > 0$  и  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$\Rightarrow$  приведём к общему знаменателю обе части:

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad x \neq 1$$

значение обеих частей равны

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \text{значит, что } x, y > 0$$

но при  $x+y+2=0$  и  $x \neq 1 \Rightarrow x+y+2 > 0 \rightarrow$  противоречие.

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy. \quad \text{При } x = y + 1$$

$$\rightarrow M = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Следовательно:  $M = 1$

достигаем при, например,  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$  ( $x = y + 1$ ):

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = 8 - 1 - 6 = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi y$$

~~$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos \pi x \cos \pi y + \cos^2 \pi y$$~~

$$\rightarrow \sin^2 \pi x = \cos^2 \pi y \rightarrow \sin \pi x = \pm \cos \pi y$$

~~$$\sin \pi x = \cos \pi y$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас было  $n$  11 классиков. Тогда вероятность того, что из четырех системов одна достанется Пете и Вале:  $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^{n-2}}$   
где  $C_{n-2}^2$  - все-ко- способ распределения систем.  $C_n^{n-2}$  - одна система

$C_{n-2}^2$  - общее количество способов распределения систем. Тогда вероятность того, что все-ко- способов достанется Пете и Вале IX:

Вероятность сим. ставки

$$\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^{n-x}}$$

По усл.:  $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^{n-x}}$

$$\rightarrow \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} \cdot \frac{5}{2} = \frac{(n-2)!}{(x-2)! (n-x)!} \cdot \frac{x! \cdot (n-x)!}{n!}$$

$$\rightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 2} \rightarrow x(x+1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 30$$

$$x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$$

т.к. все-ко- система невозможна,  $x = 6$

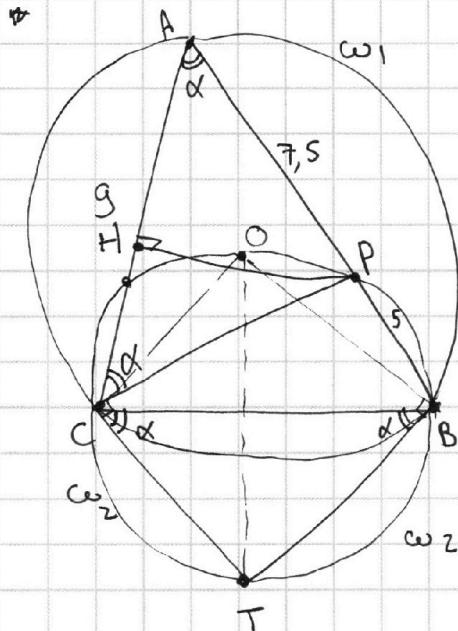
Ответ: 6



- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Проведем касательные к окр-ти  $\omega_1$  в точках В и С.  
И т.к. их пересекают радиусы из центра окр-ти к точкам касания Т-ки касательных  $\rightarrow \angle OBT = \angle OAT$

~~из~~ из центра окр-ти к точкам касания Т-ки касательных  $\rightarrow \angle OBT = \angle OAT$

$\rightarrow$  из 2-х о.окр. ~~окр.~~ противолеж. углов  $90^\circ \rightarrow$  они вмес. Но е.к.

точки В, О, С лежат на окр-ти  $\omega_2$ , то и т.  $T \in \omega_2$

( $\angle CAB$  и окр-ти  $\omega_1$  опир. на  $\angle BCT$ )  $\rightarrow \sum \alpha = \alpha \rightarrow$

$\angle CBT = \angle A = \cancel{\angle ABC} \rightarrow \angle CBT = \angle A = \angle BCT = \alpha$

$\angle BCT = \angle A$  аналог.

~~из~~ ~~из~~

Проведем PC. Ч-к PBTC - вмес. и  $\angle CPB$  опир. на

$\angle BC = \angle CBT + \angle BCT = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha \rightarrow \angle CPB = 2\alpha$

Но  $\angle CPB$  - внешний угол  $\triangle APC \rightarrow \angle A + \angle ACP = 2\alpha$

$\rightarrow \angle ACP = \alpha$ .

В р/с  $\triangle APC$  проведем биссект. РН. Тогда из

н/у  $\triangle AHP$  ~~из~~:  $\cos \alpha = \frac{AH}{AP}$ , и.к.  $\triangle APC$  р/с и

РН - биссект., а сомн. и неизд.  $AH = \frac{AC}{2} = \frac{g}{2}$

$AP = \frac{15}{2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{g/2}{15/2} = \frac{3}{5} \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$\rightarrow S_{\triangle ABC} = AC \cdot AB \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} = g \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 45$

Ответ: 45.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                    |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | СТРАНИЦА<br>1 из 2 |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha) \cdot (y - 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \\ x \geq 3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

окружность с центром в т. (0,0) и радиусом  $\sqrt{25}$

Задача такая же как ~~6~~. ~~18 < 25~~  $3\sqrt{2} < 5$

Точка A ~~не~~ имеет коорд.  $(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha)$

Тогда заметим, что т.

A лежит либо на окр-ти с центром в т. 0;0 и

радиусом  ~~$\sqrt{25}$~~   $3\sqrt{2}$

$$\text{т. к. } (3\sqrt{2})(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ = 18 = R^2$$

Прежде всего звезда

$\varphi(\alpha)$  - это фигура, образованная

окр-тию с радиусами 5 и

противол., 1-ии оси симметрии

и пересеч. в т. А. Её P будет

равна сумме дуг  $l_1 + l_2 + CD + EF$  (согласно

из рисунка) заметим, что  $l_1 + l_2 = 2\angle CAF =$

$$= 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ \rightarrow \text{т. е. } l_1 + l_2 \text{ равна } 180^\circ$$

по окр-тию  $\rightarrow l_1 + l_2 = \text{const.}$

Тогда можно звезду - можно ли её обозначить

$CD + EF$ . ~~Поскольку, если~~

$$\frac{CD + EF}{2} \leq \sqrt{CD^2 + EF^2}$$

то окр-тию конц  $\Rightarrow$  превышение P-го

достижимое при  $CD = EF$ ,  $\Rightarrow$

состр. это симметрия, когда

т. А лежит на дуге Четв.

коорд. бирюзовой

т. е. возмож. при  $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$

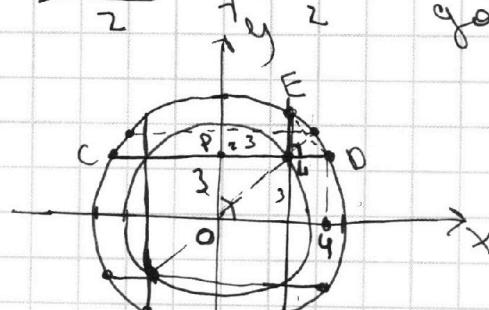
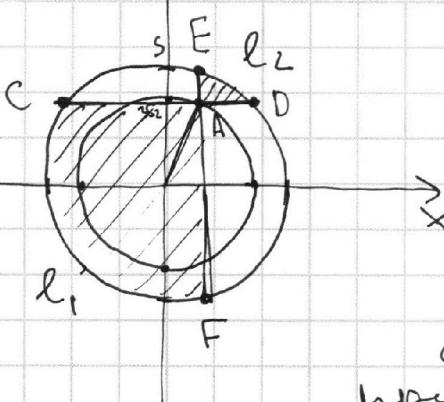
(т. к. все эти

симметрии

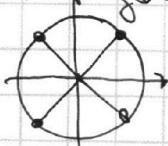
единич.)

$$\Rightarrow \left[ \alpha = \pi k \pm \frac{\pi}{4} \right],$$

где  $k \in \mathbb{Z}$



Математика





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найдем коорд. т. D:  $y = 3$  и  $y^2 + x^2 = 25$   
 $\rightarrow x^2 = 25 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow x = 4$   
( $y = 3$ , т.к. сирт/н/  $y \leq 0$  РПЛ (чел. рис.)  $OQ = r = 3\sqrt{2}$ ,  
 $y$  - катет)

$$\rightarrow x = 4, CD = 2x = 8 = EF$$

$$\rightarrow M = \pi \cdot R + 8 + 8 = [5\pi + 16]$$

Решение  $CD^2 + EF^2 =$   
~~т.к. коорд. т. D; x<sub>1</sub> - коорд. т. E~~  
 $= (2x_0)^2$

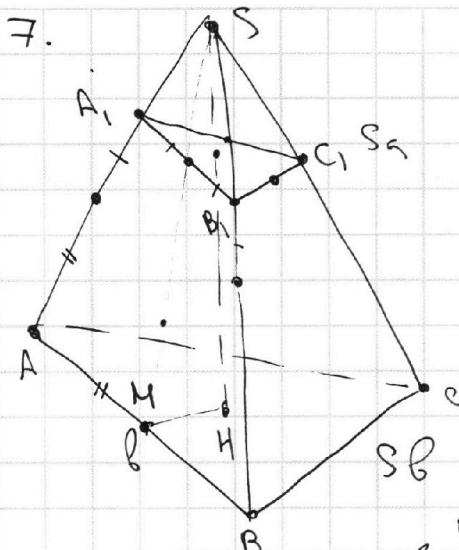


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



7.  $\triangle A_1B_1C_1$  равна  
 $a$ ;  $\triangle ABC$  равна  
 $a \cdot k = b$

Тогда разные смежные  
коэ. прямых равны  $\alpha$ .  
разные смежные коэ.  
ребер равны  $k$ .

$$V_{ABC A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot (S_{\text{бок}} + S_a + k^2 \cdot S_a)$$

(объем равен  $\frac{1}{3}$  суммы  
поверхн. умнож. на  $3$  разные  
лини. смежн.)

$$\text{и } V_{ABC A_1B_1C_1} = S_b \cdot h_f - S_a \cdot h_a = S_a \cdot k^2 \cdot \frac{ha}{3} - S_a \cdot ha =$$

$$= \frac{1}{3} S_a \cdot ha \cdot (k^3 - 1) = \frac{1}{3} \cdot ha \cdot (k-1) \cdot (k^2 + k + 1) \cdot S_a$$

Причем заметим, что  $h_f - ha = 2V \Rightarrow ha(k-1) = 2V$

$$\Rightarrow V_{ABC A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot \cancel{ha} \cdot S_a \cdot 2V \cdot (k^2 + k + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot S_a \cdot 2V \cdot (k^2 + k + 1) = \frac{1}{3} \cdot \cancel{S_a} \cdot (S_{\text{бок}} + S_a(k^2 + 1))$$

$$2S_a(k^2 + 1) + S_a \cdot k \cdot 2 = S_{\text{бок}} + S_a(k^2 + 1)$$

$$S_{\text{бок}} = S_a(k^2 + 2k + 1) = S_a(k+1)^2$$

Равносторонний треугольник с рёбрами  $a$  и т. д.

Касан. к т. А к этому треугольнику равен, прямой т. к. касания симметрических сторон касаются в их середине.

Касан. проведение из одной точки к

одной прямой  $\rightarrow AA_1 = \sqrt{a^2 + h^2}$

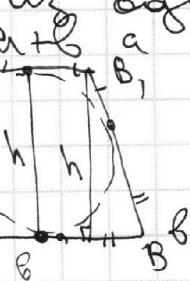
Применим АПРПП:  $AA_1^2 = a^2 + h^2$

но т. Пиthagора:

$$h^2 + a^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = (a+b)^2$$

$$4h^2 + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\rightarrow h^2 = ab \rightarrow h = \sqrt{ab}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

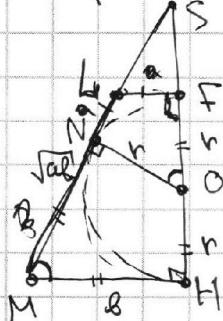


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

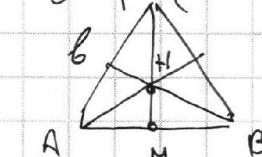
теперь  $\triangle SHM$ , где  $M$  - середина  $AB$ :



$\triangle SH \perp \text{бисект. } A, B, C_1 = F$

и  $L$ -сер.  $A, B, 1$

из  $\rho/c \triangle ABC$ :  $MC = \frac{b\sqrt{3}}{2}$   $\text{косинус}$   
 $b$   $AC$



$MH = \frac{b\sqrt{3}}{3}$   $\text{медиан.}$   
 $b$   $\text{пересек}$   
 $b$   $\text{средняя}$   
 $b$   $\text{отн. } 2:1$

огранич.  $\triangle A, B, C_1$ , ~~не~~  $\triangle ABC$ .

$$FL = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$

$$\triangle SBF \sim \triangle SMH \rightarrow \frac{LF}{MH} = \frac{SL}{SM}$$

но блокированные однозначн.  $b = a \cdot k$

$$\rightarrow \frac{LF}{MH} = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot k}{b \cdot k \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{b} = \frac{SL}{SM} \rightarrow SL \cdot k = SM + \sqrt{ab}$$

$\square$   $N$  - р-кас. ~~и~~ бисс.  $b$   $\text{перпендикульар}$  стороны  $(\sqrt{2})$ . Тогда  $NA = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $MA = MH$   $\text{косинус}$   $\cos$   $\angle$   $NA$

суммы  $\angle$   $NA$ . Итогда, т.к.  $MA = \sqrt{ab}$ :

$$\sqrt{ab} = (a+b) \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \mid : \sqrt{ab} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \cancel{a+b=6} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{k}} + \sqrt{k} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Задача в квадрате:  $\frac{1}{k} + 2 + k = \frac{36}{3} = 12$

$$k + \frac{1}{k} = 12 \rightarrow \frac{1}{k} + 1 + k = 13$$

$$\cancel{\frac{1}{k} + 1 + k = 13} \rightarrow \cancel{\frac{1}{k} + 1 + k = 13} \rightarrow \cancel{\frac{1}{k} + 1 + k = 13}$$

$$\rightarrow S_{\text{дискр.}} = S_B \cdot (k+1)^2 = S_B \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = S_B \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$$

$$\frac{S_{\text{дискр.}}}{S_B} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{12 + \sqrt{140}}\right)^2 \quad k^2 - 12k + 1 = 0$$

$$k = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{140}}{2}$$

$$\text{или } \frac{S_{\text{дискр.}}}{S_B} = \left(1 + \frac{2}{12 - \sqrt{140}}\right)^2 = \left(1 + \frac{24 + \sqrt{140} \cdot 2}{48}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{140}}{2}\right)^2$$

$$\text{Однако: } \left(7 \pm \frac{\sqrt{140}}{2}\right)^2$$

L

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{k} + k - 10 = 0$$

$$k^2 - 10k + 1 = 0 \quad | \cdot 25 \cdot 4 - 4 = 24 \cdot 4 = 6 \cdot 16$$

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{96}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\text{окр}}}{S_{\text{б}}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{6}}\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \cancel{\approx} 5 \pm 2\sqrt{6}\right)^2 = (6 \pm 2\sqrt{6})^2$$

$$\text{Очевидно: } \frac{S_{\text{окр}}}{S_{\text{б}}} = (6 \pm 2\sqrt{6})^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{bcad}$$

$$C = \overline{3k} \text{ или } \overline{k3}$$

какие единицы из трех

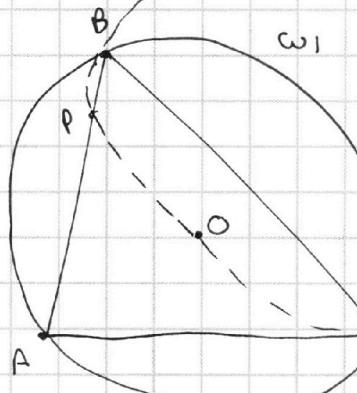
$$\rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 & (1) \\ xy = xy + x-y-1 \rightarrow x=y+1 & (2) \\ x^3 - y^3 - 3xy & \text{b. (1) след.} \rightarrow x=-y-2 \end{cases}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$= (-y-2-y)(y^2 + 4y + 4) - y^2 - 2y + y^2 \neq 3(-y-2)$$

$$\sin \cos d = \frac{g \cdot z}{z \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

5.



Задача?

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times 135 \\ \hline 18225 \\ 135 \\ \hline 18225 \\ 135 \\ \hline 249 \\ 135 \\ \hline 993 \\ 249 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$S^2 + r^2 - 2 \cdot S \cdot r \cdot \cos \alpha = g^2 + 12,5^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot 9 \cdot \cos \alpha$$

$$-2S \cdot 15 \cdot \cos 2\alpha = 4 \cdot 14 + S \cdot 20 - 15 \cdot 9 \cdot \cos \alpha$$

$$-245 \cdot \cos 2\alpha = 128 - 135 \cdot \cos \alpha$$

$$45 \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha - 45 - 135 \cdot \cos \alpha + 128 = 90 \cdot \cos^2 \alpha - 135 \cdot \cos \alpha + 83$$

$$\cos \alpha = 135 \pm \sqrt{135^2 - 4 \cdot 90 \cdot 83}$$

$$1. A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{bcad}$$

$$C = \overline{k3}$$

$$\rightarrow B : 101$$

с B - трехзнач.

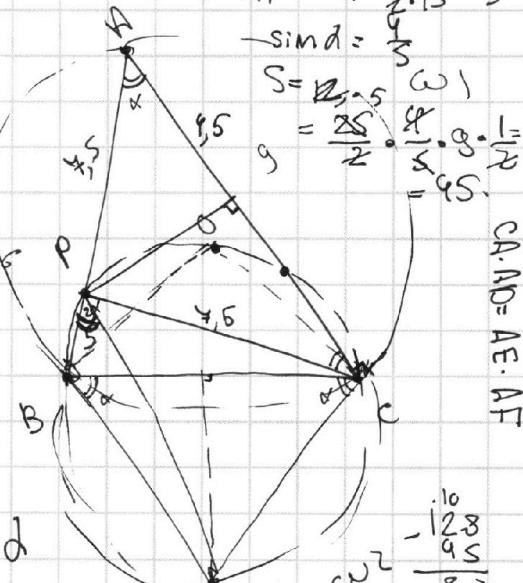
$$C : 11 \rightarrow C = 33$$

$$\rightarrow A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 - 2 \cdot 11 = A = 1116666$$

$$= (101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11)^2$$

$$2. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \cancel{\frac{1}{xy}} \rightarrow \frac{x+y+z}{xy} = \frac{x+y+z}{(x-1)(y+1)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ xy = xy + x-y-1 \rightarrow x-y=1 \end{cases}$$



$$\omega^2 - \frac{128}{95}$$

С. № = А. №. А

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times 135 \\ \hline 18225 \\ 135 \\ \hline 18225 \\ 135 \\ \hline 249 \\ 135 \\ \hline 993 \\ 249 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times 135 \\ \hline 18225 \\ 135 \\ \hline 18225 \\ 135 \\ \hline 249 \\ 135 \\ \hline 993 \\ 249 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

решение  $x^3 - y^3 - 3xy$ , при  $\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x-2 \end{cases}$

при  $y = x-1$ :

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 + 3x =$$

$$= x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x = 1$$

$$y = -x-2$$

$$\rightarrow x^3 + (-x-2)^3 + 3x(-x-2) = x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot x + 8 + 3x^2 =$$

$$= 2x^3 + 9x^2 + 18x + 8$$

$$2(x^3 + 4x^2 + 9x + 4) = x^2 + (2x^3 + 9x^2 + 18x + 8)$$

$$(2x^3 + 9x^2 + 18x + 8) = 6x^2 + 18x + 18 \approx 0 : 6$$

$$x^2 + 3x + 3$$

~~D = R^2 < 0~~

$\rightarrow P \rightarrow$  граничные значения всей  
области опр.

но  $xy \neq 0 \Rightarrow 0$

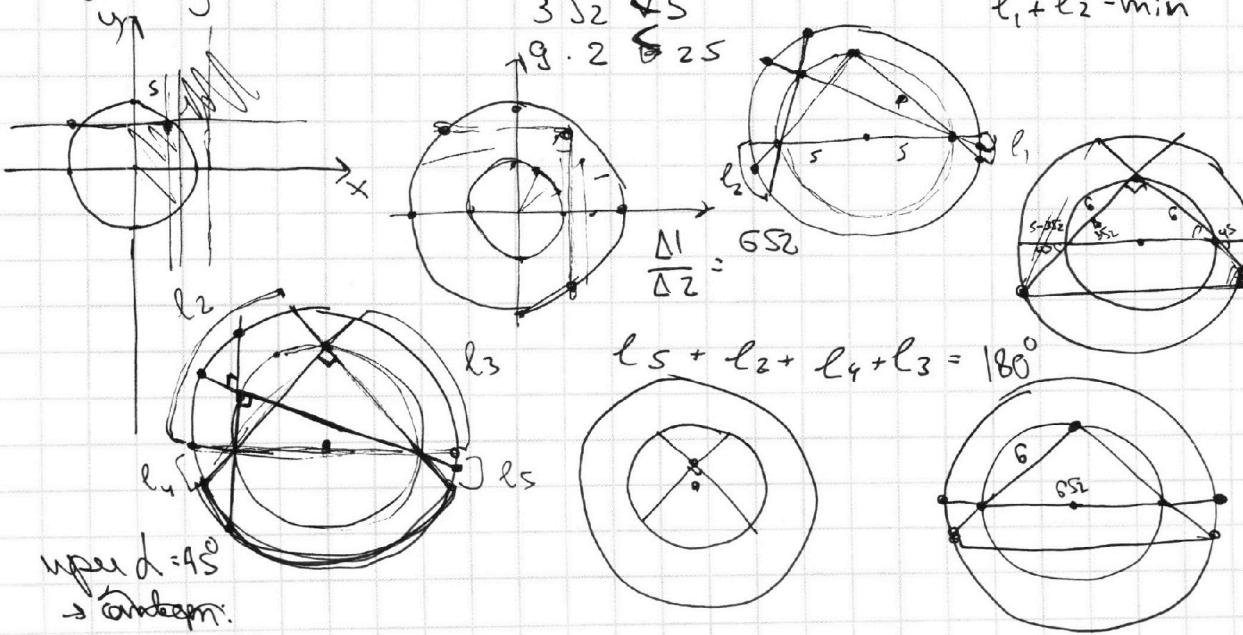
$$(x-1)(y+1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y < -1 \\ x > 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

$$x = 2 \quad y = 1$$

$$3 - 1 - 3 \cdot 2 =$$

4. Ученик в 11-ом классе  
зашел в чат с учителем математики:  
если дано  $P = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3}$   
то  $P_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$  ученик считал  $P_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$   
студент  $P_2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}$  ученик считал  $P_2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}$

6.  $\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \cdot \sin d)(y - 3\sqrt{2} \cdot \cos d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

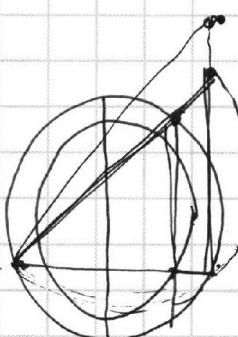
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

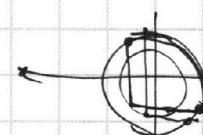
$$\begin{aligned}
 & (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x \\
 & (\sin \pi x)^2 + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x)^2 + \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\
 & \cos d + \cos \beta = 2 \cdot \cos(d + \frac{\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) \\
 & \cos d \cdot \cos \beta = \cos(d - \beta) + \cos(d + \beta) \\
 & \cos(\pi \cdot 90 - d) \cdot \cos(30 - \beta) = \frac{1}{2} (\cos(\beta - d) + \cos(180 - d - \beta)) \\
 & \sin d \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(d + \beta)
 \end{aligned}$$



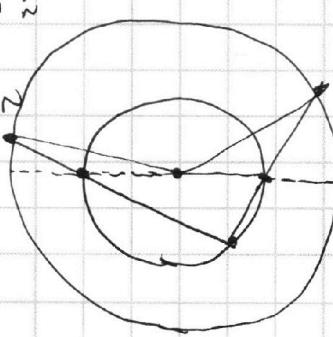
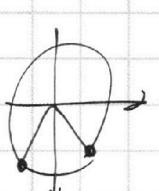
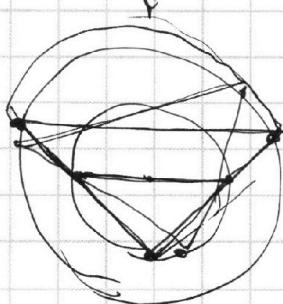
$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \\
 & \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{2})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & (\sin \pi x)^2 + \frac{\cos(\pi y - \pi x)}{2} = (\cos \pi x)^2 + \frac{\cos(\pi y - \pi x)}{2} \\
 & \cos 2\pi x = \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 0 \rightarrow \cos 2\pi x = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \cos 2\pi x = \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 0 \rightarrow \cos 2\pi x = 0 \\
 & \cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x = 1 \\
 & \cos^2 \pi x + \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 1 \\
 & \cos^2 \pi x + \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 1 \\
 & \cos^2 \pi x + \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 1 \\
 & \cos^2 \pi x + \frac{\cos(\pi y - \pi x) - \cos(\pi x - \pi y)}{2} = 1
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

