



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) По условию A имеет вид $\overline{aa\alpha}$, где a -какая-то цифра.

$$\text{Значит } A = \overline{aa\alpha} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

Чтобы произведение чисел было четвёртым квадратом, каждый из простых множителей должен делиться четвёртой кратностью раз. 11 и 101 - простые, а $a \leq 9$ (т.к. это цифра), значит одно из чисел B и C должно быть кратно 11, а другое 101. П.к. C - двузначное, оно же может быть кратно 101, значит $C : 11 \Rightarrow C = \overline{cc}$, где c- некоторая цифра. По условию одна из цифр C = 1, поэтому $c = 1 \Rightarrow C = 11$.

П.к. B : 101, то это число вид $B = \overline{b0b}$, где b- некоторая цифра. По условию одна из цифр B = 7, значит $b = 7 \Rightarrow B = 707$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 707 = 1111^2 \cdot 7a \Rightarrow 7a - \text{четвёртый квадрат}$$

П.к. a-цифра, единственный вариант $a = 7 \Rightarrow A = 7777$

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Приводим уравнение к:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3)((x-4)(y+4)-xy)=0$$

По условию x и y - положительные, значит $x+y+3 > 0$,
можем сократить:

$$xy + 4x - 4y - 16 - xy = 0$$

$$y = x - 4$$

Подставим получившую y в M :

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4)$$

$$M = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x$$

$$M = 64$$

Ответ: $M = 64$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \text{a)} (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y - \sin^2 \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$2 \cos(\pi y + \frac{\pi}{2}(x-y)) \cos(\pi y - \frac{\pi}{2}(x-y)) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}(x+y)) \cos(\frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \quad \textcircled{1} \\ 3y - x = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \quad \textcircled{2} \end{array} \right.$$

Приобретем второе равенство:

$$y+x+2y-2x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1+2(k+x-y), k \in \mathbb{Z}$$

Получь замечти, что получившее равенство равносильно

\textcircled{1} равенству, т.к. k и n - любые целые числа, значит

\textcircled{1} и \textcircled{2} равенства дают одинаковые пары чисел, поэтому можно оставить только одно из них.

$$x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: пары чисел (x, y) , удовлетворяющие равенству



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x+y = 1+2n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

д) Запишем ограничение на неравенство:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

Теперь преобразуем неравенство с помощью формулы:

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$-\arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$$

III. к. $\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, существенная неудовлетворимая неравенству пара, когда $\arcsin \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$

Теперь посчитаем общее кол-во пар удовлетворяющих этим ограничениям:

III. к. $x+y = 1+2n \Rightarrow x+y - \text{нечётное число, значит}$

и. к. $x+y \in \mathbb{Z}$, то либо x -нечётное и y -чётное, либо

x -чётное и y -нечётное. В первом случае $7 \cdot 4 = 28$ пар.

Во втором - $8 \cdot 5 = 40$ пар. Итого общее кол-во пар = $28+40-1=67$ пар

Ответ: 67 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) Посчитаем вероятность в общем виде через число сочетаний:

Пусть n -количество одиннадцатиклассников, а k -количество билетов.

Тогда общее кол-во случаев $= C_n^k$, а случаи, когда и у Пети и у Васи есть билет посчитаем так: т.к.

и у Пети, и у Васи есть билет получим, что у Пети и у Васи в этих случаях уже есть билеты, то кол-во возможных вариантов распределения $k-2$

билетов между $n-2$ учениками $= C_{n-2}^{k-2}$

Значит, вероятность равна:

$$P = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{(k-2)!}$$

Пусть P_1 -вероятность в начале числа, а P_2 -в конце. Тогда

$$1) P_1 = P_2$$

$$1) \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{2!} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{(k-2)!}$$

$$1) \frac{k!}{(k-2)!} \leftarrow \text{это членомонно возрастающая функция,}\text{значит корень можно подобрать} \Rightarrow k = 12$$

Ответ: 12 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

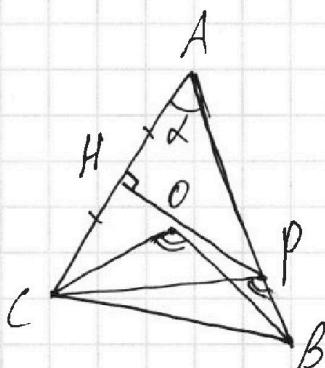
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) \mathcal{D} : w_1 ; w_2 ; $\triangle ABC$; $AP = 16$; $BP = 8$; $AC = 22$

$H: S_{ABC}$

?



Пусть $\angle CAB = \alpha$; тогда

$\angle CAB$ - вписанный в w_1 , а

$\angle COB$ - центральный в w_1 , значит

$$\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$$

$\angle CPB = \angle COB = 2\alpha$, т.к. оба угла

вписаны в w_2 и опираются одну дугу BC .

$\angle CPB$ - внешний при вершине $\cancel{\triangle} PBC$,

поэтому $\angle ACP = \angle CPB - \angle CAP = \alpha = \angle CAP$.

Угол при основании AC в $\triangle APC$ равен, значит

$\triangle APC$ - P/ α

Тогда $\cos \alpha = \cos \angle CAP = \frac{AC/2}{AP}$ (высота из вершины P 臺灣 является медианой)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha = \frac{AB \cdot AC}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{2AP}\right)^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC}{2} (AP + BP) \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{2AP}\right)^2} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $x^2 + y^2 \leq 36$ - это круг с центром $B(0;0)$ и радиусом = 6

$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0$ - это неравенство делит

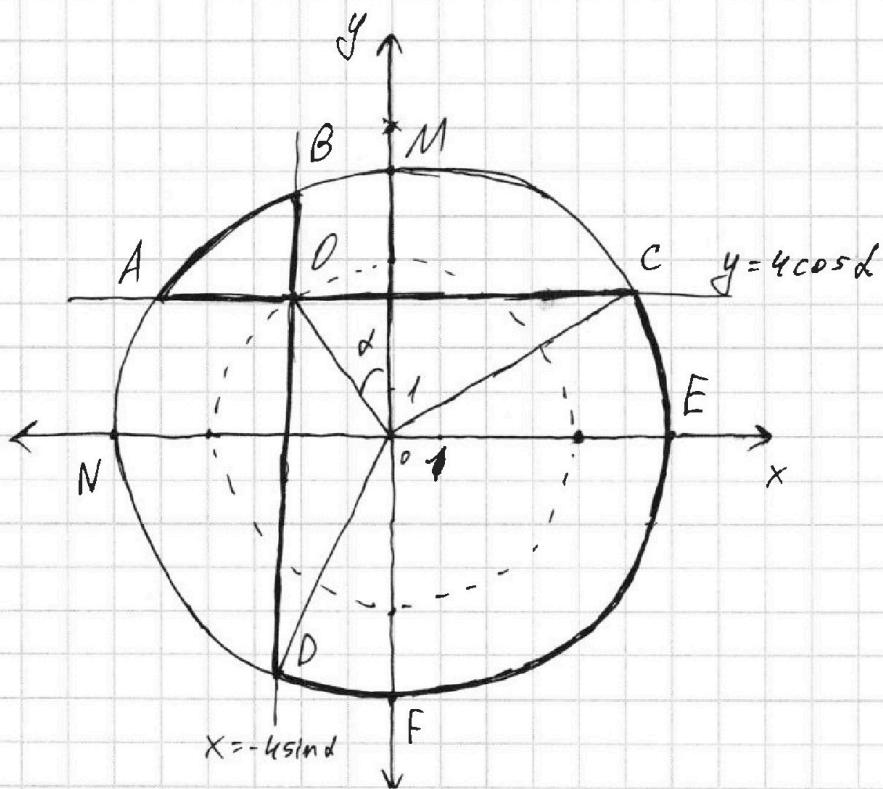
координатную плоскость на 4 четверти прямими

~~$x = -4\sin\alpha$~~ и $y = 4\cos\alpha$.

Написал заметил что точка $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ лежит

на окружности центра B начале координат и

радиусом 4



Фигура $\Phi(x) = ABO + CDO$ (выделена жирным)

I-

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Линия её границы (L) складывается из двух дуг:

$\cup AB \cup CD$ и отрезков AC и BD .

Заметим, что $\cup AB + \cup CD = \cup AB + \cup CE + \cup FD + \cup EF =$

$$= \cup AN + \cup AB + \cup BM + \cup EF = \cup NM + \cup EF = \frac{2\pi \cdot 6}{2} = 6\pi$$

(по симметрии)

AC и BD найдём из рисунка:

$$AC = 2\sqrt{6^2 - (4\cos\alpha)^2} = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$BD = 2\sqrt{6^2 - (4\sin\alpha)^2} = 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

$$L = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

Заметим $t = 16\cos^2\alpha$

$$L = 6\pi + 2\sqrt{36 - t} + 2\sqrt{20 + t}$$

$$L'_t = \frac{-1}{\sqrt{36-t}} + \frac{1}{\sqrt{20+t}} = 0 \quad \text{б. точка максимума}$$

$$\sqrt{36-t} = \sqrt{20+t} \Rightarrow t = 8 \Rightarrow L_m = L(8) = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

Определяем α :

$$16\cos^2\alpha = 8$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; L_m = 6\pi + 8\sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = d \cdot 1111$$

B - ~~контакт~~ 7

C - ~~контакт~~ \overline{ct} ; надо $1\bar{c}$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$B : 101 \text{ и } C : 11 \Rightarrow C = 11; B = 707$$

$$\sqrt{A \cdot B \cdot C} = \sqrt{11 \cdot 101 \cdot 707 \cdot 11 \cdot 9} = 1111 \sqrt{7 \cdot 9} \Rightarrow d = 7$$

$$A = 7777$$

$$B = 707$$

$$C = 11$$

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3)/(x-4)(y+4) - xy = 0$$

$$(x+y+3)/(4x-4y+16) = 0$$

$$(x+y+3)(x-y+4) = 0$$

$$\begin{cases} y = -3 - x & \text{D, т.к. } y < 0 \\ y = x + 4 & \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3)$$

$$M = x^3 - (x+4)^3 - 12x(x+4)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{-x-3} + \frac{3}{-x(x+3)} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{t-x} + \frac{3}{(x-4)(t-x)}$$

$$M = 2x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 12x^2 + 36x$$

$$M = -12x^2 - 48x - 64 - 12x^2 + 48x$$

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4)$$

$$M = x^3 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x$$

$$M = 64$$

$$3) a) \sin^2 \bar{\alpha} y - \sin \bar{\alpha} x \cdot \sin \bar{\alpha} y = \cos^2 \bar{\alpha} y + \cos \bar{\alpha} x \cdot \cos \bar{\alpha} y$$

$$\cos 2\bar{\alpha} y + \cos \bar{\alpha}(x-y) = 0$$

$$2 \cos(\bar{\alpha}y + \frac{\pi}{2}(x-y)) \cos(\bar{\alpha}y - \frac{\pi}{2}(x-y)) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}(x+y)) \cos(\frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x) = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[\frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[x+y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \right] \textcircled{1}$$

$$\left[3y - x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \right] \textcircled{2}$$

~~много упростить~~ ³



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача } \Rightarrow x \in [-7; 7]; \quad y \in [-4; 4]$$

$$\arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} > -\arccos \frac{y}{4}$$

$$-\arcsin \frac{y}{4} > \arcsin \frac{y}{4} - \pi$$

$$\pi > \arcsin \frac{y}{4} + \arcsin \frac{y}{4} \quad \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{некоторое } y = 4$$

$$\text{некоторое } x = 8$$

$$\text{иное } y = 5$$

$$\text{иное } x = 7$$

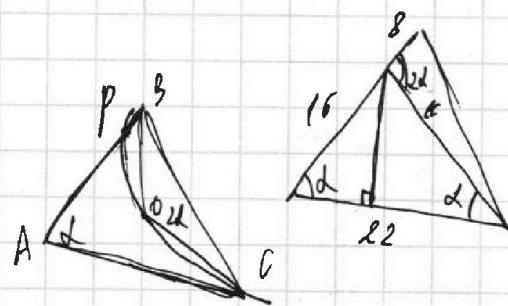
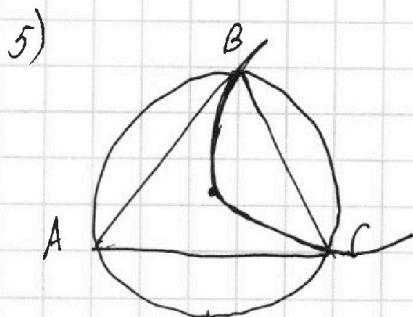
$$\Rightarrow \text{Общее: } 4 \cdot 4 + 8 \cdot 5 - 1 = 67 \text{ пар}$$

$$4) P = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$P_1 = \frac{P_2}{11}$$

$$\cancel{11 \cdot 12} \quad 11 \cdot 12 = k(k-1)$$

$$k = 12$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$22^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16^2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{16^2 - 11^2}{2 \cdot 16^2} = \frac{15}{16}$$

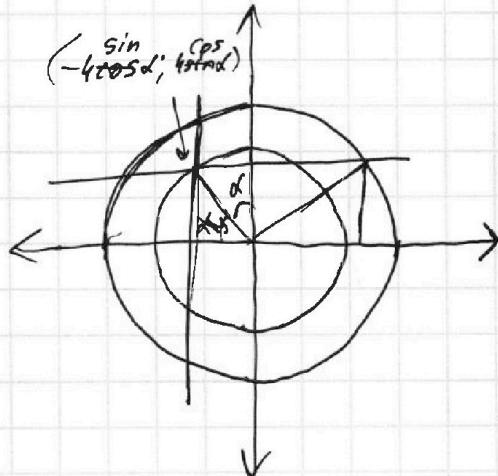
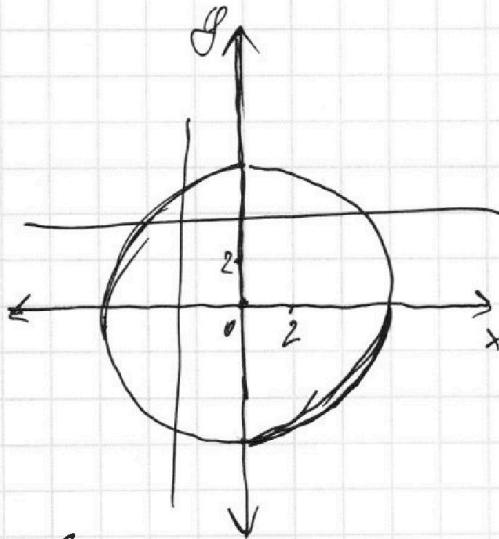
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{16}$$

$$= \frac{1}{16} \sqrt{5 \cdot 24} = \frac{3}{16} \sqrt{15}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 28 \cdot \frac{3}{16} \sqrt{15} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

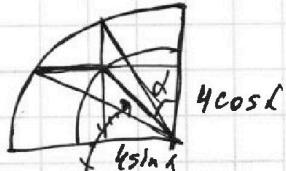
$$\frac{22}{2} \cdot (24) \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \frac{33}{2} \sqrt{16^2 - 11^2} = \frac{33}{2} \sqrt{5 \cdot 24} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

6)



$$\angle = \cancel{6\pi} + 2 \cdot \sqrt{6^2 - (4 \cos \alpha)^2} + 2 \cdot \sqrt{6^2 - (4 \sin \alpha)^2} =$$

$$+ 2 \sqrt{36 - \cancel{16}} = 6\pi + 2$$



$$\varphi = \arcsin \frac{4 \cos \alpha}{6} + \arcsin \frac{4 \sin \alpha}{6}$$

$\theta_1 =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$L^* = 6\pi + 2 \left(\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} + \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} \right)$$

$$\cancel{L^*} = 6\pi + \frac{1}{2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} \cdot -32$$

$$L = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16t^2}$$

$$36 - 16\cos^2\alpha = t \quad t = 16\cos^2\alpha$$

$$36 - 16\sin^2\alpha = t \quad t = 16\cos^2\alpha$$

$$16\sin^2\alpha = 16 - t$$

$$L = 6\pi + 2\sqrt{36 - t^2} + 2\sqrt{20 + t^2}$$

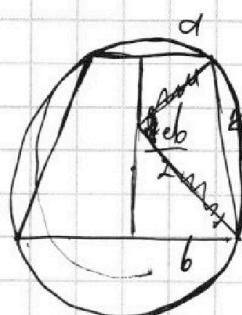
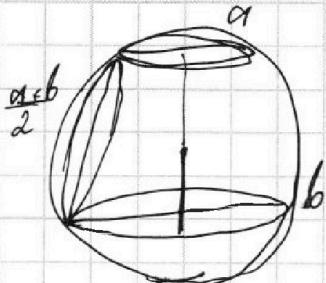
$$L' = \frac{-1}{\sqrt{36 - t^2}} + \frac{1}{\sqrt{20 + t^2}} = 0$$

$$36 - t^2 = 20 + t^2 \Rightarrow t^2 = 8$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

7)



$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!