



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1: пусть $A = 1111 \cdot a$, где $a \in [1; 9]$, а это, тогда:

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2 \text{, тогда:}$$

$$k^2 : 1111, \text{ т.к. } 1111^2 > 11 \cdot 101, \text{ то } k: 1111$$

$$k^2 : 1111^2, \text{ т.к. } 1111 \cdot a \cdot B \cdot C : 1111^2 > a \cdot B \cdot C : 1111,$$

$$\text{т.д. } \left\{ \begin{array}{l} a \cdot B \cdot C : 11 \\ a \cdot B \cdot C : 101 \end{array} \right.$$

$a \cdot B \cdot C : 101$, т.к. $C \leq 99$, то C может делиться только на 11 или на 101, но не делится на 1111. Так как $a \leq 9$, тогда наша задача имеет единственный вариант, когда $B : 101$, $C : 11$, т.к. $C = 11 \cdot b$ ($b \in \mathbb{Z}$, $b \in [1; 9]$), и среди цифр C хотя бы одна единица, то $C = 11$.
Т.к. $B = 101 \cdot f$ ($f \in \mathbb{Z}$, $f \in [1; 9]$), и среди цифр B есть две единицы, семёрка, то $B = 707$, тогда:

$$1111 \cdot a \cdot 707 \cdot 11 = k^2 \quad \Rightarrow a = \left(\frac{k}{1111} \right)^2, \text{ т.д. } za - \text{квадрат, значит } a = 7, \quad A = 7777$$

Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N2: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{1}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3)((x-4)(y+4)-xy)=0$$

① $x+y+3=0$ т.к. $x>0, y>0$ (по условию), то
 $x+y>0, x+y+3>3$, т.е. $x+y+3>0$, $x+y+3\neq 0$, ~~противоречие~~

$$② (x-4)(y+4) - xy = 0 \quad 4xy - 16 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= y+4 \\ x^3 - y^3 - 12xy &= (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - \\ - 12y^3 - 48y^2 - y^3 &= 64, \end{aligned}$$

$$x^3 - y^3 - 12xy = 64$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{N} 3 : \text{a}) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y \\ 2 \cdot \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi y = 2 \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} (\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi y) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} (\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y + \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi y) = 0$$

$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos (\pi y - \frac{\pi x - \pi y}{2}) = 0$$

$$\left[\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \right]$$

$$\left[\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[\cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \right]$$

$$\left[\frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[x+y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[y = 1-x+2n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$3y - x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{x+1+2k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: a) $(a; 1-a+2n) \rightarrow (b; \frac{b+1+2k}{3})$, где

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\arccos x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$; $\arcsin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тогда

$$\arccos \frac{x}{2} > \arcsin \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}, \text{ при } \left| \frac{x}{2} \right| \leq 1, x \in [-2; 2].$$

$$1. x = -1 : -\pi > \arcsin \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \left| \frac{-1}{2} \right| \leq 1$$

$$2. x = -2 : \arccos \frac{-2}{2} > \arcsin \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{-2}{2} > \arcsin \frac{1-2+2}{2} - \frac{\pi}{2}$$

нельзя на доске Ученик

Ответ: б) 31.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4: пусть изначально было a -человек, тогда вероятность попадания вместе на концерт было равна

$$\frac{4}{a} \cdot \frac{3}{(a-1)} = \frac{12}{a(a-1)}$$

пусть билетов стало $b+4$, тогда вероятность стала $\frac{(b+4)}{a} \cdot \frac{(b+3)}{(a-1)} = \frac{(b+4)(b+3)}{a(a-1)}$, тогда:

$$11. \frac{12}{a(a-1)} = \frac{(b+4)(b+3)}{a(a-1)}, 132 = b^2 + 7b + 12$$

$$b^2 + 7b - 120 = 0$$

$$(b+15)(b-8) = 0$$

$b = -15$, не удовлетворяет условию

$b = 8$, т.е. 12 билетов было выдано на концерт

Ответ: 12 билетов

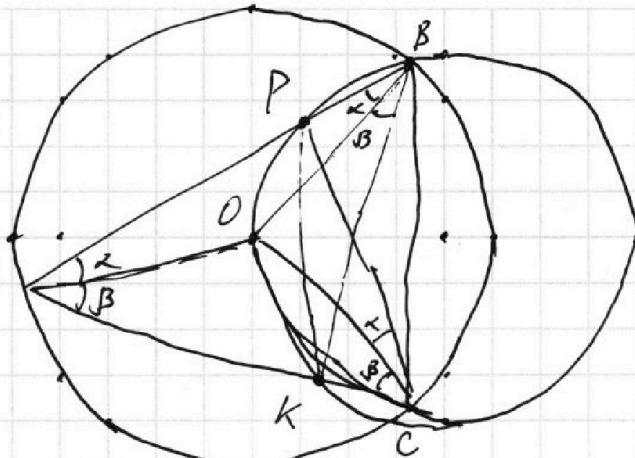
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \sqrt{5}: & 1. \omega_2 \cap AC = k \\ & 2. \angle OAB = \angle OBA = \angle (AO=OB=R) \\ & \angle OAC = \angle OCA = \beta (AO=OC=R) \\ & R - \text{радиус } \omega_1 \\ & 3. \angle OBR = \angle OCK = \beta = \frac{1}{2} \angle OK \\ & \angle PBO = \angle PCO = \alpha = \frac{1}{2} \angle OP \\ & \quad (\text{внешние}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4. & \angle BAC = \angle ABK = \alpha + \beta, AK = BK (\triangle AKB-\text{рд}) \\ 5. & \angle BAC = \angle PCA = \alpha + \beta, AP = PC = 16 (\triangle APC-\text{рд}) \\ 6. & AP \cdot AB = AK \cdot AC (\text{т-о секущая}), AK = \frac{16 \cdot 22}{22} = \frac{192}{11} \end{aligned}$$

$$7. KI = 22 - \frac{192}{11} = \frac{50}{11} \quad AK = BK = \frac{192}{11}$$

$$8. \angle ABC = 180^\circ - \angle PKI (\text{PKCK-внешний}), \angle AKP =$$

$$= 180^\circ - \angle PKI, \angle AKP = \angle ABC$$

9. 1) $\angle BAC$ общий | $\triangle APK \sim \triangle ACB : \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PK}, PK = \frac{8}{11} BC$
2) $\angle AKP = \angle ABC$

$$10. \text{Т. Келемя } PKCB : PK \cdot BC + PB \cdot KC = PC \cdot KB$$

$$\frac{8}{11} BC^2 + \frac{8}{11} \cdot \frac{50}{11} = 16 \cdot \frac{192}{11} \quad BC^2 = 384 - 50 = 334$$

$$11. \text{Т. косинусов } \triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$

$$334 = 576 + 484 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos(2\alpha + \beta) \quad \cos(2\alpha + \beta) = \frac{726}{2 \cdot 22 \cdot 24} = \frac{33}{48}$$

$$12. \sin(2\alpha + \beta) \approx \sqrt{1 - \frac{33^2}{48^2}} = \frac{\sqrt{15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$13. S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(2\alpha + \beta)}{2} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 22 \cdot 3\sqrt{15}}{2 \cdot 16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

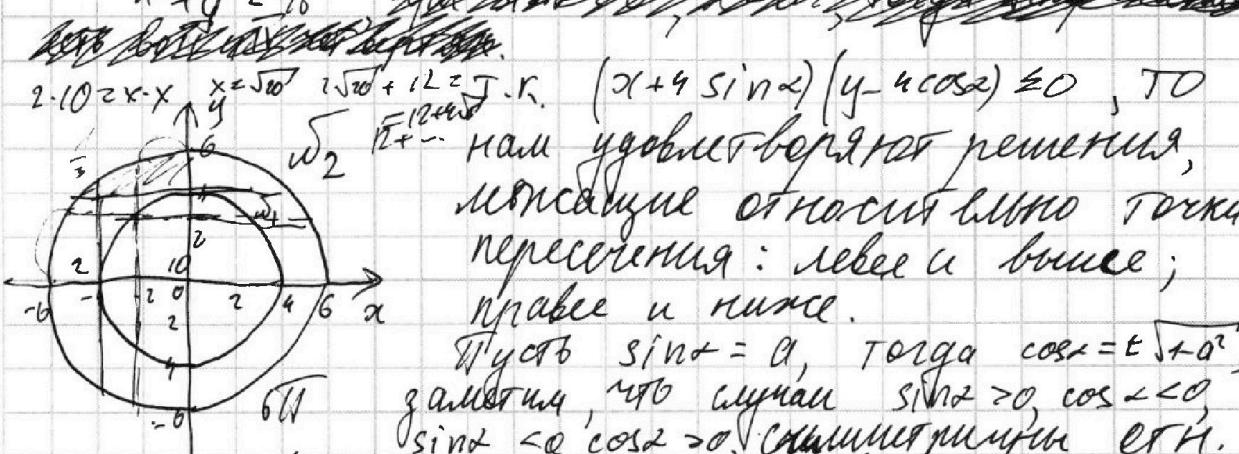
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6: $\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$ $x^2+y^2 \leq 36$ - область ограниченная окружностью с центром в точке $(0;0)$, радиусом 6.

Заметим, что $x = -4\sin\alpha$ (прямая) и $y = 4\cos\alpha$ пересекаются на ~~окружности~~ окружности радиуса 4, с центром в точке $(0;0)$. Т.к.:

$$\begin{cases} x = -4\sin\alpha \\ y = 4\cos\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 16\sin^2\alpha \\ y^2 = 16\cos^2\alpha \end{cases} \quad (\text{обе части}) > 0$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



$$2 \cdot 10 = x - x \quad x = 5\sqrt{5} \quad 12 = 12 \quad \text{T.к. } (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0, \text{ то}$$

нам удобнее вести решение, исключающее отрицательные точки пересечения: левее и выше; правее и ниже.

Пусть $\sin\alpha = a$, тогда $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-a^2}$, заметим, что случаи $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$ одинаковы.

Т.к. $(0,0)$, т.е. $\varphi(\alpha)$ имеет равные периметры (+ аналогично $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0$). Нам достаточно рассмотреть $\sin\alpha \geq 0$, т.е. $a \geq 0$.

какой $\varphi(\alpha)$ тогда φ -периметре $(x+4\sin\alpha)$?

Вз: заметим что при $\cos\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$, при $a \geq 0$ периметры одинаковы. Нам достаточно рассмотреть случай $\cos\alpha < 0$. Тогда нетрудно заметить, что найденный периметр составляет когда находящие зоны между прямыми $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ ограниченных окружностью, т.к. они всегда высекают окружность 6π , это значит, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, не π , тогда

$$M = 12 + 4\sqrt{5} + 6\pi$$

$$\text{Ответ: } 12 + 4\sqrt{5} + 6\pi; \frac{\pi}{2}, \pi.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

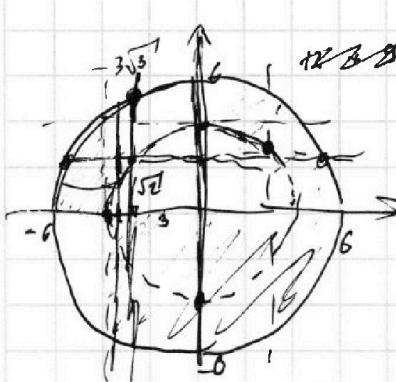
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

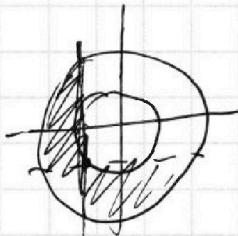


$$y \neq x^u \in S$$

$$\begin{array}{ll} x \geq -4 & 0 \leq y \\ y \leq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -4 \sin \alpha \\ y = 4 \cos \alpha = 4 \sin^2 \alpha \\ z = 16 \sin^2 \alpha \\ y^2 = 16 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 16$$



$$c + 4\sin \alpha \geq 0 \geq y - 4\cos \alpha$$

$$1 - 4\cos \beta \leq 0 \quad y \leq 4\cos \beta$$

$$+ m \quad x + 4 \sin x$$

$\Rightarrow y = 4 \cos x + 4$

$$y \leq 7x + 4\sin x + 4\cos x$$

$$x \geq -48.72$$

$$y \leq q \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

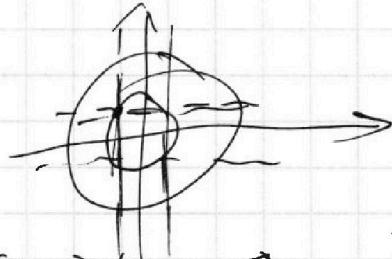
$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$(x+2)(y-2\sqrt{5}) \leq 0$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{55}{2}$$

$$x = \frac{55}{2}$$

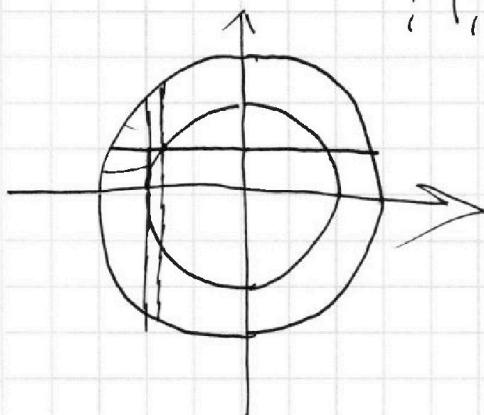


$$(x-2)(y+2\sqrt{3})$$

$$(a; \pm)$$



$$\Sigma + \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8BC^2 + 8 \cdot 50 = 16 \cdot 192 \\ BC^2 = 2 \cdot 192 - 50 = 384 - 50 = 334$$

$$334 =$$

$$\begin{array}{r} 726 \\ 66 \end{array} \overline{)122} \quad \begin{array}{r} 22 \\ 44 \\ 44 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 82 \\ 44 \\ 44 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ 29 \\ 96 \\ 48 \\ 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ 334 \\ \hline 150 \end{array} \quad \begin{array}{r} 576 \\ 1484 \\ 1060 \\ 334 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(48+33)(48-33) = \\ = \sqrt{\frac{81 \cdot 15}{48^2}} = \frac{9\sqrt{15}}{48} = \frac{150}{726}$$

$$x \cdot \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cdot \sin \pi y = \frac{3\sqrt{15}}{2} \\ = 2x \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \pi y \quad (\cos \frac{\pi x + \pi y}{2}) \\ \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi y \right) = 0 \\ \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi y - \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \sin \pi y = 0 \\ \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \quad \cos = 0 \quad \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

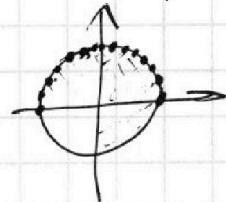
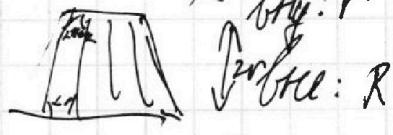
$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n$$

$$x+y = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + n$$

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arcsin \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}} > -\frac{\pi}{2}$$



$$[-\pi; 0] \cup [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$[-\pi; 0] - [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

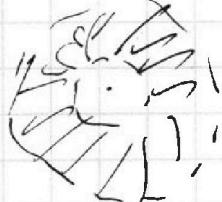
$$\arcsin \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} >$$

$$\frac{1-x^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}$$

$$15^\circ$$

$$0^\circ$$

$$14^\circ$$



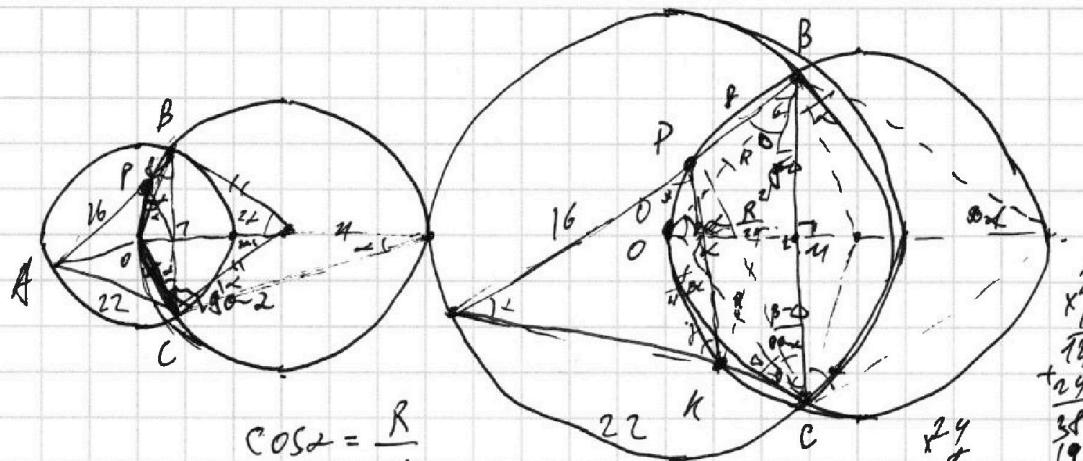
база: r
поверхность: R

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \angle = \frac{R}{2r}$$

123 - №?

$$\sin(\alpha - \angle) = \frac{OM}{R} = \frac{R}{2r} \quad OM = \frac{R^2}{2r}$$

$$\frac{12}{23} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2}{2r} \cdot \left(2r - \frac{R^2}{2r}\right) = x^2 \quad x^2 = \frac{R^2(4r^2 - R^2)}{4r^2} \quad x = \sqrt{\frac{R}{2r} \sqrt{4r^2 - R^2}}$$

$$PK = \frac{16}{\sin 11^\circ} \cdot BC$$

$$\frac{22 \cdot 24 \cdot BC}{4R} = \frac{22 \cdot 6BC}{R}$$

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle}$$

$$11 \sin \angle =$$

отсюда

$$BC = 2R \cdot \sin \angle$$

$$BC = 2r \sin \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \angle} = 2R \quad OB^2 = (2r-R)(2r+R) = 4r^2 - R^2$$

$$2r = \frac{BC}{\sin \angle} = \frac{\sqrt{4r^2 - R^2}}{\sin \angle}$$

$$BC = 2r \cdot \sin \angle = 2R \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha r = R \sin \alpha$$

$$R = 2r \cos \alpha$$

№?

$$\frac{16}{2} = 8$$

$$BC = \sqrt{22^2 + 24^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cdot \cos \angle}$$

$$374 = 29^2 + 22^2 - 2 \cdot 29 \cdot 22 \cdot \cos \angle$$

$$\frac{16}{22} = \frac{8}{11} \quad \frac{24 \cdot 8}{11} = \frac{192}{11}$$

$$8 \cdot \frac{50}{11} + BC \cdot \frac{8}{11} BC = 64 \cdot \frac{192}{11}$$

$$BC^2 = 384 - 50^2 = 339 = 2 \cdot 167$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) (a \cdot 1111) \cdot (b \cdot 10^7 + c \cdot 10^4 + d) (10e + f) = k^2$$

$$k^2 : 1111 = 11 \cdot 101 \quad k^2 : 1111^2$$

$$100b + 10c + d = b \cdot 101 \quad 10e + f = 11 \cdot e'$$

$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$

$$2) \frac{1^y}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-y)(y+4)} \quad x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-y)(y+4)} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad x+y=-3 \\ \textcircled{2} \quad xy=x'y'-4y+4x=16 \end{array} \quad \frac{1}{y+4} + \frac{1}{y} + \frac{3}{y(y+4)} =$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy \quad (x-y)((x+y)^2 - xy) - 12xy =$$

$$= (x-y)(x+y)^2 - xy(x-y+12) = 4(x+y)^2 - 12xy$$

$$(y+4)^3 - y^3 - 12xy(y+4) = y^6 + 12y^4 + 3 \cdot 16y^2 + 64 - y^6 - 12y^5 - 48y^3 =$$

$$= 64$$

$$\textcircled{1} \quad x = -y - 3, \text{ при } x, y \geq 0.$$

$$3) \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \quad \alpha + \beta = x \quad \alpha - \beta = y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \quad \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = +2 \sin \beta \cos \alpha \quad \alpha + \beta = x \quad \alpha - \beta = y$$

$$\textcircled{1} \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0 = 0 = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} - \sin \frac{\pi}{2} y = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\textcircled{1} \quad \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\pi = 0,$$

$$\cancel{\textcircled{2}} \quad \tan \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} \cdot \tan \pi y = 1 \quad \tan \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} = \cot \pi y \quad \sin \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} \cdot \sin \pi y$$

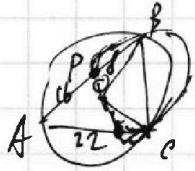
$$\textcircled{2} \quad \sin \frac{\pi}{2} \frac{x-y}{2} = \cos \pi y \quad \sin \pi \frac{x-y}{2} - \cos \pi y = 0$$



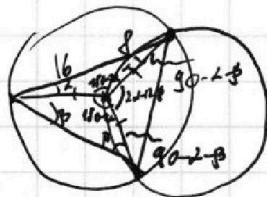
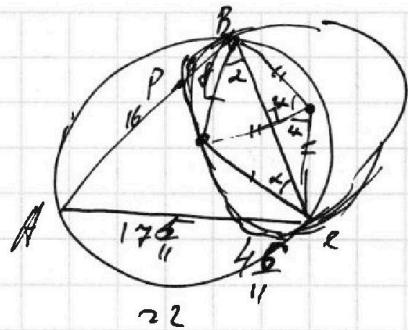
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 16 \cdot 24 &= (22-x) \cdot 22 \\ 16 \cdot 24 &= (22-x) \cdot 11 \\ 192 &= 242 - 11x \\ 11x &= 50 \quad x = \frac{50}{11} = 4 \frac{6}{11} \\ 17 \cdot \frac{6}{11} \cdot 22 &= 16 \cdot 24 \\ 187 + 8 &= \frac{192}{11} \cdot 22 = 16 \cdot 24 \quad 192 = 8 \cdot 24 = 192 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin(2+\beta)} = \frac{24}{\sin(90-\alpha)} = \frac{22}{\sin(90-\beta)} \\ 2r &= \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{R}{\cos(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha \cdot 11 = \cos \beta \cdot 12 \quad \cos \beta = \frac{11}{12} \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{array}{lll} \text{ч.ч.} & \text{б.ч.} & \text{Вер.} \\ \frac{a}{a} & \frac{4}{4} & \frac{4}{a} \cdot \frac{3}{(a-1)} \cdot 2 \\ \text{перим} & a & 4+b \end{array}$$

$$\frac{(4+b)(3+b)}{a \cdot (a-1)} \cdot 11 = \frac{(b+4)(b+3)}{a(a-1)} \cdot 12 \\ 132 = b^2 + 7b + 12$$

$$b^2 + 2b - 120 = 0 \\ (b+15)(b-8) = 0 \quad b = 8$$

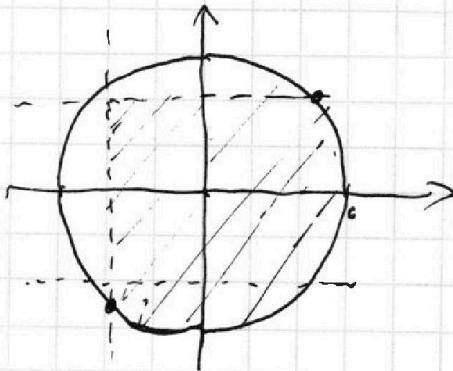
(12)

$$\begin{cases} (x+4 \sin \alpha)(y-4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \sin \alpha \geq 0 \\ y-4 \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \sin \alpha \leq 0 \\ y-4 \cos \alpha \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \end{cases}$$

(123)



$$\begin{aligned} 12345 & \quad 1234 \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} & = \frac{3}{10} \quad \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \\ & = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

123
12
123
1234
12345
123456
1234567
12345678
123456789
1234567890

1-