



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

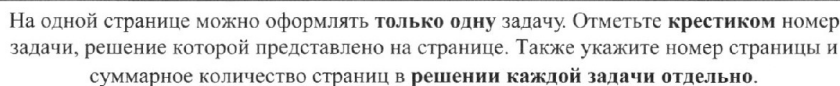
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$$

Поскольку число C -фундаментное, то оно не может делиться на 101 = ~~на~~ число B делится на 101.

Поскольку число B — трехзначное, делится нацело на 101 и содержит хотя бы 4 единицы, то $B = 101$ (т.к. нет других чисел, делящихся на 101, удовлетворяющих этим условиям).

Поскольку 101 не делится нацело на 11, то число B не делится нацело на 11, а число C должно делиться нацело на 11, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было полным квадратом.

Поскольку число C - двузначное, делимое нацело на 11 и содержит хотя бы одну цифру 5, то $C = 55$ (т.е. нет других чисел, делящихся на 11 и удовлетворяющих этим условиям).

квадратом x должен быть равен 5. $\Rightarrow A=5555$. Тогда $A=5555$, $B=101$, $C=55$

Other: $(5555, 101, 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}, k_2 = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}; x > 0, y > 0$$

Т.к. $k_1 = k_2$, то:

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{(x+y+1)}{x+y+1=0} \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0$$

Т.к. $x > 0, y > 0$, то $x+y+1 > 0$

$$\frac{xy - 3y + 3x - 9 - xy}{xy(x-3)(y+3)} = 0 \quad \begin{cases} x-y=3 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq 3, y \neq -3 \end{cases} \Rightarrow x = y+3$$

Т.к. $y > 0$, то $x > 3 \Rightarrow$ все условия выполняются

* $x-y=3$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 9xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-3)$$

Подставим $x-y=3$: $(3)^3 + 3xy(3-3) = 27$ — это единственное значение M

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$
 $2 \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \pi x$
 $\cos \frac{\pi}{2}(x+y) (\cos \frac{\pi}{2}(-x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(-x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(3x-y)) = 0$
 $\cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0$
 $\frac{\pi}{2}(x+y) \in \mathbb{Z}$
 $|x+y| \equiv 1$
 $\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$
 $x+y = 1+2h, h \in \mathbb{Z}$
 $y = 1+2h-x$
 $y = 1+2h - \frac{h+k+1}{2} = \frac{1+3h-k}{2}$
 $\cos \frac{\pi}{2}(3x-y) = 0$
 $\frac{\pi}{2}(3x-y) \in \mathbb{Z}$
 $|3x-y| \equiv 1$
 $\frac{\pi}{2}(3x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $3x-y = 1+2k, k \in \mathbb{Z}$
 $3x - 1 - 2h + x = 1+2k$
 $4x = 2(h+k+1)$
 $x = \frac{h+k+1}{2}$

Ответ: $(\frac{h+k+1}{2}, \frac{1+3h-k}{2}), h \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$. Это неравенство неверно. Тогда и только
~~Тогда, когда $\frac{x}{4} = 7+2\pi \cdot m, m \in \mathbb{Z}$, и $\frac{y}{9} = 7+2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$~~
 Тогда, когда $\frac{x}{4} = -1$ и $\frac{y}{9} = -1$, т.е. $x = -4$ и $y = -9$
 $\begin{cases} \frac{h+k+1}{2} = -4 \\ \frac{3h-k+1}{2} = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h+k+1 = -8 \\ 3h-k+1 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -9-h \\ 3h+9+h+1 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -9-h \\ 4h = -28 \end{cases}$
 $\begin{cases} k = -9-h \\ h = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ h = -7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-7-2+1}{2} = -4, y = -9$
 Ответ: все, кроме одной $(-4, -9)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выразим вероятность происхождения события через сочетания. Пусть x - кол-во одноклассников, y - кол-во дополнительно выделенных билетов. Тогда:

$$\frac{C_4^y}{C_x^y} \cdot 35 = \frac{C_{4+y}^y}{C_x^y} \Rightarrow \frac{4! \cdot (x-y)! \cdot 4!}{2! \cdot 2! \cdot x!} \cdot \frac{7}{2} = \frac{(4+y)! \cdot (x-y)! \cdot (4+y)!}{2! \cdot (2+y)! \cdot x!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)! \cdot 4! \cdot 7}{(x-y)!} = \frac{(y+3)(y+4) \cdot (x-y)! \cdot (4+y)!}{(y+3)(y+4)(4+y)!} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-y)!}{(x-y)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 24}{6 \cdot 7 \cdot 24}$$

Поскольку слева получается натуральное число, которое состоит из y последовательных натуральных чисел, то справа тоже должно получиться натуральное число, множителями которого будут последовательные натуральные числа

1) Если y будет < 3 , то в числителе правой части не будет числа, множителем которого будет 7 $\Rightarrow$ правая часть не будет натуральным числом $\Rightarrow$ равенство не достигается

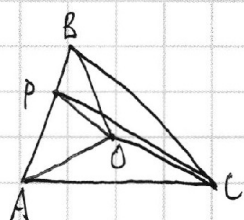
2) Если y будет > 3 , то в числителе правой части будут как минимум 2 множителя $y+4$, $y+3$ и $y+2$ и $y+1$ и y и $y-1$ и $y-2$ и $y-3$ и $y-4$ и $y-5$ и $y-6$ и $y-7$ и $y-8$ и $y-9$ и $y-10$ и $y-11$ и $y-12$ и $y-13$ и $y-14$ и $y-15$ и $y-16$ и $y-17$ и $y-18$ и $y-19$ и $y-20$ и $y-21$ и $y-22$ и $y-23$ и $y-24$ и $y-25$ и $y-26$ и $y-27$ и $y-28$ и $y-29$ и $y-30$ и $y-31$ и $y-32$ и $y-33$ и $y-34$ и $y-35$ и $y-36$ и $y-37$ и $y-38$ и $y-39$ и $y-40$ и $y-41$ и $y-42$ и $y-43$ и $y-44$ и $y-45$ и $y-46$ и $y-47$ и $y-48$ и $y-49$ и $y-50$ и $y-51$ и $y-52$ и $y-53$ и $y-54$ и $y-55$ и $y-56$ и $y-57$ и $y-58$ и $y-59$ и $y-60$ и $y-61$ и $y-62$ и $y-63$ и $y-64$ и $y-65$ и $y-66$ и $y-67$ и $y-68$ и $y-69$ и $y-70$ и $y-71$ и $y-72$ и $y-73$ и $y-74$ и $y-75$ и $y-76$ и $y-77$ и $y-78$ и $y-79$ и $y-80$ и $y-81$ и $y-82$ и $y-83$ и $y-84$ и $y-85$ и $y-86$ и $y-87$ и $y-88$ и $y-89$ и $y-90$ и $y-91$ и $y-92$ и $y-93$ и $y-94$ и $y-95$ и $y-96$ и $y-97$ и $y-98$ и $y-99$ и $y-100$ и $y-101$ и $y-102$ и $y-103$ и $y-104$ и $y-105$ и $y-106$ и $y-107$ и $y-108$ и $y-109$ и $y-110$ и $y-111$ и $y-112$ и $y-113$ и $y-114$ и $y-115$ и $y-116$ и $y-117$ и $y-118$ и $y-119$ и $y-120$ и $y-121$ и $y-122$ и $y-123$ и $y-124$ и $y-125$ и $y-126$ и $y-127$ и $y-128$ и $y-129$ и $y-130$ и $y-131$ и $y-132$ и $y-133$ и $y-134$ и $y-135$ и $y-136$ и $y-137$ и $y-138$ и $y-139$ и $y-140$ и $y-141$ и $y-142$ и $y-143$ и $y-144$ и $y-145$ и $y-146$ и $y-147$ и $y-148$ и $y-149$ и $y-150$ и $y-151$ и $y-152$ и $y-153$ и $y-154$ и $y-155$ и $y-156$ и $y-157$ и $y-158$ и $y-159$ и $y-160$ и $y-161$ и $y-162$ и $y-163$ и $y-164$ и $y-165$ и $y-166$ и $y-167$ и $y-168$ и $y-169$ и $y-170$ и $y-171$ и $y-172$ и $y-173$ и $y-174$ и $y-175$ и $y-176$ и $y-177$ и $y-178$ и $y-179$ и $y-180$ и $y-181$ и $y-182$ и $y-183$ и $y-184$ и $y-185$ и $y-186$ и $y-187$ и $y-188$ и $y-189$ и $y-190$ и $y-191$ и $y-192$ и $y-193$ и $y-194$ и $y-195$ и $y-196$ и $y-197$ и $y-198$ и $y-199$ и $y-200$ и $y-201$ и $y-202$ и $y-203$ и $y-204$ и $y-205$ и $y-206$ и $y-207$ и $y-208$ и $y-209$ и $y-210$ и $y-211$ и $y-212$ и $y-213$ и $y-214$ и $y-215$ и $y-216$ и $y-217$ и $y-218$ и $y-219$ и $y-220$ и $y-221$ и $y-222$ и $y-223$ и $y-224$ и $y-225$ и $y-226$ и $y-227$ и $y-228$ и $y-229$ и $y-230$ и $y-231$ и $y-232$ и $y-233$ и $y-234$ и $y-235$ и $y-236$ и $y-237$ и $y-238$ и $y-239$ и $y-240$ и $y-241$ и $y-242$ и $y-243$ и $y-244$ и $y-245$ и $y-246$ и $y-247$ и $y-248$ и $y-249$ и $y-250$ и $y-251$ и $y-252$ и $y-253$ и $y-254$ и $y-255$ и $y-256$ и $y-257$ и $y-258$ и $y-259$ и $y-260$ и $y-261$ и $y-262$ и $y-263$ и $y-264$ и $y-265$ и $y-266$ и $y-267$ и $y-268$ и $y-269$ и $y-270$ и $y-271$ и $y-272$ и $y-273$ и $y-274$ и $y-275$ и $y-276$ и $y-277$ и $y-278$ и $y-279$ и $y-280$ и $y-281$ и $y-282$ и $y-283$ и $y-284$ и $y-285$ и $y-286$ и $y-287$ и $y-288$ и $y-289$ и $y-290$ и $y-291$ и $y-292$ и $y-293$ и $y-294$ и $y-295$ и $y-296$ и $y-297$ и $y-298$ и $y-299$ и $y-300$ и $y-301$ и $y-302$ и $y-303$ и $y-304$ и $y-305$ и $y-306$ и $y-307$ и $y-308$ и $y-309$ и $y-310$ и $y-311$ и $y-312$ и $y-313$ и $y-314$ и $y-315$ и $y-316$ и $y-317$ и $y-318$ и $y-319$ и $y-320$ и $y-321$ и $y-322$ и $y-323$ и $y-324$ и $y-325$ и $y-326$ и $y-327$ и $y-328$ и $y-329$ и $y-330$ и $y-331$ и $y-332$ и $y-333$ и $y-334$ и $y-335$ и $y-336$ и $y-337$ и $y-338$ и $y-339$ и $y-340$ и $y-341$ и $y-342$ и $y-343$ и $y-344$ и $y-345$ и $y-346$ и $y-347$ и $y-348$ и $y-349$ и $y-350$ и $y-351$ и $y-352$ и $y-353$ и $y-354$ и $y-355$ и $y-356$ и $y-357$ и $y-358$ и $y-359$ и $y-360$ и $y-361$ и $y-362$ и $y-363$ и $y-364$ и $y-365$ и $y-366$ и $y-367$ и $y-368$ и $y-369$ и $y-370$ и $y-371$ и $y-372$ и $y-373$ и $y-374$ и $y-375$ и $y-376$ и $y-377$ и $y-378$ и $y-379$ и $y-380$ и $y-381$ и $y-382$ и $y-383$ и $y-384$ и $y-385$ и $y-386$ и $y-387$ и $y-388$ и $y-389$ и $y-390$ и $y-391$ и $y-392$ и $y-393$ и $y-394$ и $y-395$ и $y-396$ и $y-397$ и $y-398$ и $y-399$ и $y-400$ и $y-401$ и $y-402$ и $y-403$ и $y-404$ и $y-405$ и $y-406$ и $y-407$ и $y-408$ и $y-409$ и $y-410$ и $y-411$ и $y-412$ и $y-413$ и $y-414$ и $y-415$ и $y-416$ и $y-417$ и $y-418$ и $y-419$ и $y-420$ и $y-421$ и $y-422$ и $y-423$ и $y-424$ и $y-425$ и $y-426$ и $y-427$ и $y-428$ и $y-429$ и $y-430$ и $y-431$ и $y-432$ и $y-433$ и $y-434$ и $y-435$ и $y-436$ и $y-437$ и $y-438$ и $y-439$ и $y-440$ и $y-441$ и $y-442$ и $y-443$ и $y-444$ и $y-445$ и $y-446$ и $y-447$ и $y-448$ и $y-449$ и $y-450$ и $y-451$ и $y-452$ и $y-453$ и $y-454$ и $y-455$ и $y-456$ и $y-457$ и $y-458$ и $y-459$ и $y-460$ и $y-461$ и $y-462$ и $y-463$ и $y-464$ и $y-465$ и $y-466$ и $y-467$ и $y-468$ и $y-469$ и $y-470$ и $y-471$ и $y-472$ и $y-473$ и $y-474$ и $y-475$ и $y-476$ и $y-477$ и $y-478$ и $y-479$ и $y-480$ и $y-481$ и $y-482$ и $y-483$ и $y-484$ и $y-485$ и $y-486$ и $y-487$ и $y-488$ и $y-489$ и $y-490$ и $y-491$ и $y-492$ и $y-493$ и $y-494$ и $y-495$ и $y-496$ и $y-497$ и $y-498$ и $y-499$ и $y-500$ и $y-501$ и $y-502$ и $y-503$ и $y-504$ и $y-505$ и $y-506$ и $y-507$ и $y-508$ и $y-509$ и $y-510$ и $y-511$ и $y-512$ и $y-513$ и $y-514$ и $y-515$ и $y-516$ и $y-517$ и $y-518$ и $y-519$ и $y-520$ и $y-521$ и $y-522$ и $y-523$ и $y-524$ и $y-525$ и $y-526$ и $y-527$ и $y-528$ и $y-529$ и $y-530$ и $y-531$ и $y-532$ и $y-533$ и $y-534$ и $y-535$ и $y-536$ и $y-537$ и $y-538$ и $y-539$ и $y-540$ и $y-541$ и $y-542$ и $y-543$ и $y-544$ и $y-545$ и $y-546$ и $y-547$ и $y-548$ и $y-549$ и $y-550$ и $y-551$ и $y-552$ и $y-553$ и $y-554$ и $y-555$ и $y-556$ и $y-557$ и $y-558$ и $y-559$ и $y-560$ и $y-561$ и $y-562$ и $y-563$ и $y-564$ и $y-565$ и $y-566$ и $y-567$ и $y-568$ и $y-569$ и $y-570$ и $y-571$ и $y-572$ и $y-573$ и $y-574$ и $y-575$ и $y-576$ и $y-577$ и $y-578$ и $y-579$ и $y-580$ и $y-581$ и $y-582$ и $y-583$ и $y-584$ и $y-585$ и $y-586$ и $y-587$ и $y-588$ и $y-589$ и $y-590$ и $y-591$ и $y-592$ и $y-593$ и $y-594$ и $y-595$ и $y-596$ и $y-597$ и $y-598$ и $y-599$ и $y-600$ и $y-601$ и $y-602$ и $y-603$ и $y-604$ и $y-605$ и $y-606$ и $y-607$ и $y-608$ и $y-609$ и $y-610$ и $y-611$ и $y-612$ и $y-613$ и $y-614$ и $y-615$ и $y-616$ и $y-617$ и $y-618$ и $y-619$ и $y-620$ и $y-621$ и $y-622$ и $y-623$ и $y-624$ и $y-625$ и $y-626$ и $y-627$ и $y-628$ и $y-629$ и $y-630$ и $y-631$ и $y-632$ и $y-633$ и $y-634$ и $y-635$ и $y-636$ и $y-637$ и $y-638$ и $y-639$ и $y-640$ и $y-641$ и $y-642$ и $y-643$ и $y-644$ и $y-645$ и $y-646$ и $y-647$ и $y-648$ и $y-649$ и $y-650$ и $y-651$ и $y-652$ и $y-653$ и $y-654$ и $y-655$ и $y-656$ и $y-657$ и $y-658$ и $y-659$ и $y-660$ и $y-661$ и $y-662$ и $y-663$ и $y-664$ и $y-665$ и $y-666$ и $y-667$ и $y-668$ и $y-669$ и $y-670$ и $y-671$ и $y-672$ и $y-673$ и $y-674$ и $y-675$ и $y-676$ и $y-677$ и $y-678$ и $y-679$ и $y-680$ и $y-681$ и $y-682$ и $y-683$ и $y-684$ и $y-685$ и $y-686$ и $y-687$ и $y-688$ и $y-689$ и $y-690$ и $y-691$ и $y-692$ и $y-693$ и $y-694$ и $y-695$ и $y-696$ и $y-697$ и $y-698$ и $y-699$ и $y-700$ и $y-701$ и $y-702$ и $y-703$ и $y-704$ и $y-705$ и $y-706$ и $y-707$ и $y-708$ и $y-709$ и $y-710$ и $y-711$ и $y-712$ и $y-713$ и $y-714$ и $y-715$ и $y-716$ и $y-717$ и $y-718$ и $y-719$ и $y-720$ и $y-721$ и $y-722$ и $y-723$ и $y-724$ и $y-725$ и $y-726$ и $y-727$ и $y-728$ и $y-729$ и $y-730$ и $y-731$ и $y-732$ и $y-733$ и $y-734$ и $y-735$ и $y-736$ и $y-737$ и $y-738$ и $y-739$ и $y-740$ и $y-741$ и $y-742$ и $y-743$ и $y-744$ и $y-745$ и $y-746$ и $y-747$ и $y-748$ и $y-749$ и $y-750$ и $y-751$ и $y-752$ и $y-753$ и $y-754$ и $y-755$ и $y-756$ и $y-757$ и $y-758$ и $y-759$ и $y-760$ и $y-761$ и $y-762$ и $y-763$ и $y-764$ и $y-765$ и $y-766$ и $y-767$ и $y-768$ и $y-769$ и $y-770$ и $y-771$ и $y-772$ и $y-773$ и $y-774$ и $y-775$ и $y-776$ и $y-777$ и $y-778$ и $y-779$ и $y-780$ и $y-781$ и $y-782$ и $y-783$ и $y-784$ и $y-785$ и $y-786$ и $y-787$ и $y-788$ и $y-789$ и $y-790$ и $y-791$ и $y-792$ и $y-793$ и $y-794$ и $y-795$ и $y-796$ и $y-797$ и $y-798$ и $y-799$ и $y-800$ и $y-801$ и $y-802$ и $y-803$ и $y-804$ и $y-805$ и $y-806$ и $y-807$ и $y-808$ и $y-809$ и $y-810$ и $y-811$ и $y-812$ и $y-813$ и $y-814$ и $y-815$ и $y-816$ и $y-817$ и $y-818$ и $y-819$ и $y-820$ и $y-821$ и $y-822$ и $y-823$ и $y-824$ и $y-825$ и $y-826$ и $y-827$ и $y-828$ и $y-829$ и $y-830$ и $y-831$ и $y-832$ и $y-833$ и $y-834$ и $y-835$ и $y-836$ и $y-837$ и $y-838$ и $y-839$ и $y-840$ и $y-841$ и $y-842$ и $y-843$ и $y-844$ и $y-845$ и $y-846$ и $y-847$ и $y-848$ и $y-849$ и $y-850$ и $y-851$ и $y-852$ и $y-853$ и $y-854$ и $y-855$ и $y-856$ и $y-857$ и $y-858$ и $y-859$ и $y-860$ и $y-861$ и $y-862$ и $y-863$ и $y-864$ и $y-865$ и $y-866$ и $y-867$ и $y-868$ и $y-869$ и $y-870$ и $y-871$ и $y-872$ и $y-873$ и $y-874$ и $y-875$ и $y-876$ и $y-877$ и $y-878$ и $y-879$ и $y-880$ и $y-881$ и $y-882$ и $y-883$ и $y-884$ и $y-885$ и $y-886$ и $y-887$ и $y-888$ и $y-889$ и $y-890$ и $y-891$ и $y-892$ и $y-893$ и $y-894$ и $y-895$ и $y-896$ и $y-897$ и $y-898$ и $y-899$ и $y-900$ и $y-901$ и $y-902$ и $y-903$ и $y-904$ и $y-905$ и $y-906$ и $y-907$ и $y-908$ и $y-909$ и $y-910$ и $y-911$ и $y-912$ и $y-913$ и $y-914$ и $y-915$ и $y-916$ и $y-917$ и $y-918$ и $y-919$ и $y-920$ и $y-921$ и $y-922$ и $y-923$ и $y-924$ и $y-925$ и $y-926$ и $y-927$ и $y-928$ и $y-929$ и $y-930$ и $y-931$ и $y-932$ и $y-933$ и $y-934$ и $y-935$ и $y-936$ и $y-937$ и $y-938$ и $y-939$ и $y-940$ и $y-941$ и $y-942$ и $y-943$ и $y-944$ и $y-945$ и $y-946$ и $y-947$ и $y-948$ и $y-949$ и $y-950$ и $y-951$ и $y-952$ и $y-953$ и $y-954$ и $y-955$ и $y-956$ и $y-957$ и $y-958$ и $y-959$ и $y-960$ и $y-961$ и $y-962$ и $y-963$ и $y-964$ и $y-965$ и $y-966$ и $y-967$ и $y-968$ и $y-969$ и $y-970$ и $y-971$ и $y-972$ и $y-973$ и $y-974$ и $y-975$ и $y-976$ и $y-977$ и $y-978$ и $y-979$ и $y-980$ и $y-981$ и $y-982$ и $y-983$ и $y-984$ и $y-985$ и $y-986$ и $y-987$ и $y-988$ и $y-989$ и $y-990$ и $y-991$ и $y-992$ и $y-993$ и $y-994$ и $y-995$ и $y-996$ и $y-997$ и $y-998$ и $y-999$ и $y-1000$ и $y-1001$ и $y-1002$ и $y-1003$ и $y-1004$ и $y-1005$ и $y-1006$ и $y-1007$ и $y-1008$ и $y-1009$ и $y-1010$ и $y-1011$ и $y-1012$ и $y-1013$ и $y-1014$ и $y-1015$ и $y-1016$ и $y-1017$ и $y-1018$ и $y-1019$ и $y-1020$ и $y-1021$ и $y-1022$ и $y-1023$ и $y-1024$ и $y-1025$ и $y-1026$ и $y-1027$ и $y-1028$ и $y-1029$ и $y-1030$ и $y-1031$ и $y-1032$ и $y-1033$ и $y-1034$ и $y-1035$ и $y-10$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: ω_1 - окр. опис. около $\triangle ABC$; O - центр ω_1 ; ω_2 - окр. опис. около $\triangle BOC$; $\omega_2 \cap AB = P$; $AP = \frac{16}{5}$; $BP = 2$; $AC = 4$
Найти: $S_{\triangle APC}$

Т.к. O - центр ω_1 , то $AO = OB$ как радиусы $\Rightarrow \triangle AOB$ - р/д $\Rightarrow \angle BAO = \angle ABO$
В ω_2 : $\angle PBO = \angle PCO$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow \angle ABO = \angle PCO \Rightarrow \angle PCO = \angle BAO = \angle PAO$
 $\angle ABO = \angle BAO$

Т.к. O - центр ω_1 , то $AO = OC$ как радиусы $\Rightarrow \triangle AOC$ - р/д $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$
 $\angle PAC = \angle PAO + \angle OAC$
 $\angle PCA = \angle PCO + \angle OCA$
 $\angle PCO = \angle PAO, \angle OAC = \angle OCA$
 $\Rightarrow \angle PAC = \angle PCA \Rightarrow \triangle APC$ - р/д $\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$

По формуле Герона: $S_{\triangle APC} = \sqrt{\frac{\frac{16}{5} + \frac{16}{5} + 4}{2} \cdot \frac{\frac{16}{5} - 4}{2} \cdot \frac{\frac{16}{5} - 4}{2} \cdot \frac{\frac{16}{5} + \frac{16}{5} - 4}{2}} = \sqrt{\frac{26}{5} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{6}{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{26 \cdot 6} = \frac{4}{5} \sqrt{39}$

Проведем высоту CH $\triangle APC$. $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} CH \cdot AP = \frac{1}{2} CH \cdot \frac{16}{5} = \frac{4}{5} \sqrt{39}$
($CH = \frac{\sqrt{39}}{2}$)

$\triangle ABC$ и $\triangle APC$ имеют общую высоту CH из вершины $C \Rightarrow S_{\triangle ABC} : S_{\triangle APC} = \frac{AB}{PA} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB}{PA} \cdot S_{\triangle APC} = \frac{16+2}{\frac{16}{5}} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{39} = \frac{26}{\frac{4}{5}} \sqrt{39} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$
Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

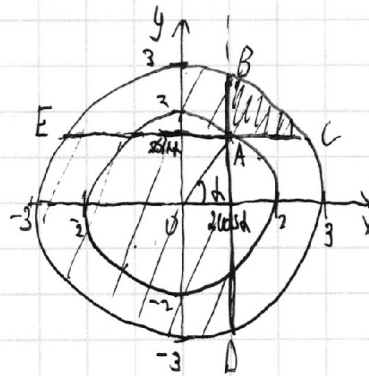
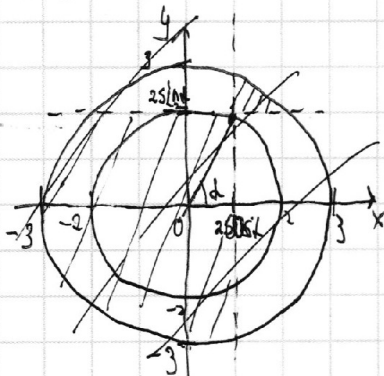
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases} \quad (1); \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

(2) В эту область входят все точки, которые находятся внутри (в том числе на линии) окружности с центром $(0;0)$ и радиусом 3

(1) $x = 2\cos\alpha$ - это абсцисса точки, лежащей на окружности с центром $(0;0)$ и радиусом 2, которая видна под углом α (относительно положительного направления оси абсцисс), а $y = 2\sin\alpha$ - это соответственно ордината этой точки. Изобразим решение этой системы, взяв произвольный угол α .



Поскольку периметр данной фигуры зависит от угла (расположения точки A на окружности), то достаточно рассмотреть только расположение точки A в верхней половине (в нижней будут те же фигуры, только отраженные).
Наибольшее значение периметра фигуры будет достигаться при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Тогда координаты B, C, D и E будут $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{7}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ соответственно.

Периметр этой фигуры будет равен: $BD + EC + 2B + ED$ (U - это длина дуги)

$$BD = 2\sqrt{7}, EC = 2\sqrt{7}$$

$$BC = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{2}), ED = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})$$

$$\cos \angle BOC = \frac{9+9-2(9-2\sqrt{14})}{2 \cdot 9} = \frac{4\sqrt{14}}{2 \cdot 9} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \Rightarrow \angle BOC = \arccos \frac{2\sqrt{14}}{9} \cdot 3$$

$$\cos \angle EAD = \frac{9+9-2(9+2\sqrt{14})}{2 \cdot 9} = -\frac{2\sqrt{14}}{9} \Rightarrow \angle EAD = (\pi - \arccos \frac{2\sqrt{14}}{9}) \cdot 3$$

$$\text{Периметр равен: } 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 3\arccos \frac{2\sqrt{14}}{9} + 3\pi - 3\arccos \frac{2\sqrt{14}}{9} = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$\text{Ответ: } 3\pi + 4\sqrt{7}; \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку пирамида - усеченная и правильная, то боковыми её гранями являются равнобедренные трапеции, а гранями оснований - правильные многоугольники. $\Rightarrow$ вокруг каждой грани можно описать окружность.

Центром шара ω является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к граням в центрах описанных около них окружностей.

Центром шара Ω является точка пересечения биссектрис трехгранных углов усеченной пирамиды.

Все эти точки лежат на высоте усеченной пирамиды.

Чтобы это было возможно, боковые ребра должны быть наклонены под углом 45° к плоскости основания пирамиды.

Ответ: 45°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Поскольку уравнение $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ — симметричное, то справедливы его пары (x, y) и (y, x) являются его решениями $\Rightarrow$ подставим $y=x$ в наше уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$$

$$\frac{2x+1}{x^2} = \frac{x+3+x-3+1}{x^2-9}$$

$$\frac{2x+1}{x^2} = \frac{2x+1}{x^2-9} \Rightarrow (2x+1) \left(\frac{x^2-9-x^2}{x^2(x^2-9)} \right) = 0$$

$$-9(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

Тогда $y = -1/2 = x$. Тогда $M = x^3 - y^3 - 9xy = (-1/2)^3 - (-1/2)^3 - 9(-1/2)(-1/2) = -9/4 = -2,25$

Отв. $M = -2,25$

$$k = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x-y=3 \quad x^2-2xy+y^2=9$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 9xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-3) = (x-y)^3 = 27$$

$$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) (\sin \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x - \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x) = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \quad \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2}y - \cos \frac{\pi}{2}(2x-y)) \neq \cos$$

$$\begin{matrix} x+y \in \mathbb{Z} & x+y = 2n \\ 3x-y \in \mathbb{Z} & 3x-y = 2n \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cos \frac{\pi}{2}(-x-y) = \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) \\ \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) = 0 \end{matrix}$$

$$\frac{C_4^2}{C_4^4} \cdot 3,5 = \frac{C_4^2}{C_4^4} \Rightarrow \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)!}{2! \cdot (2+y)!} \cdot \frac{(4+y)!}{x!}$$

$$(x-4)! \cdot 6 \cdot 24 \cdot 7 = (y+3)(y+4) \cdot \frac{(y+4)!}{(x-4)!} \cdot \frac{(4+y)!}{x!} \cdot 3,5 = (y+3)(y+4) \cdot \frac{(x-4+y)!}{(4+y)!} \cdot \frac{(4+y)!}{x!}$$

$$y=1: 6 \cdot 24 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot (x-3) \cdot 5! \quad y=3: 6 \cdot 24 \cdot 7 = 6 \cdot 7 \cdot (x-1)(x-2)(x-3) \cdot 7!$$

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 3,5 = \frac{a!}{2! \cdot x!} \cdot \frac{a!}{(a-2)!} \quad \frac{(x-4)!}{x!} \cdot \frac{4!}{(x-6)!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \quad x=9$$

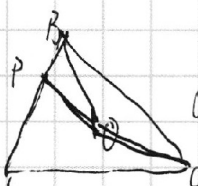
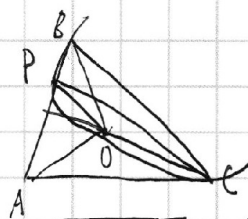


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

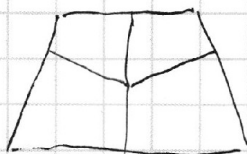
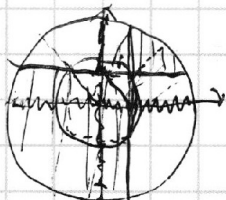


Дано: ω_1 - опис. около $\triangle ABC$; O - центр ω_1 ; ω_2 - опис. около $\triangle BOC$; $\omega_2 \cap AB = P$; $AP = \frac{16}{5}$; $BP = 2$; $AC = 4$
Найти: $S_{\triangle ABC}$

$$PO = \sqrt{r^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$r^2 + 4 + 2r \cos \alpha = r^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = r^2 - \frac{160}{25}$$
$$\frac{260}{25} = 4r \cos \alpha; \cos \alpha = \frac{2,6}{r}$$

$$\frac{256}{25} - 4 = \frac{236}{25} \quad \frac{16}{5}, \frac{16}{5}, 2$$
$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\angle PAO = \angle PCO, \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$$
$$S_{\triangle APC} = \sqrt{\frac{36}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{16}{5}} = 2 \cdot \frac{4}{5} \sqrt{26} = \frac{8}{5} \sqrt{26} = \frac{1}{2} h \cdot \frac{16}{5}$$
$$h = \sqrt{26}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

