

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку число A - четырехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, то его можно представить в виде  $A = x \cdot 1111$ , где x - натуральное число, принадлежащее промежутку  $[1; 9]$ .

$$A = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$$

Чтобы число A·B·C было полным квадратом, оно должно точно состоять из множителей  $x^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$ .  $\Rightarrow$  должны быть еще числа, делящиеся на x, на 11 и на 101.

Поскольку число C - двухзначное, то оно не может делиться на 101 (такое число нацело делится на 101).

Поскольку число B - трехзначное, делится нацело на 101 и содержит хотя бы две единицы, то  $B = 101$  (т.к. нет других чисел, делящихся на 101) удовлетворяющих этим условиям.

Поскольку 101 не делится нацело на 11, то число B не делится нацело на 11  $\Rightarrow$  число C должно делиться нацело на 11, чтобы A·B·C было полным квадратом.

Поскольку число C - двухзначное, делится нацело на 11 и содержит хотя бы одну единицу 5, то  $C = 55$  (т.к. нет других чисел, делящихся на 11 и удовлетворяющих этим условиям).

Тогда  $A \cdot B \cdot C = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55 = x \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5$ . Число A·B·C было полным квадратом  $x$  должно быть равно 5.  $\Rightarrow A = 5555$ . Тогда  $A = 5555$ ,  $B = 101$ ,  $C = 55$

Ответ:  $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}; k_2 = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} - \frac{1}{(x-3)(y+3)}; x > 0, y > 0$$

$$\text{т.к. } k_1 = k_2, \text{ т.о. : } \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{(x+y+1)}{x+y+1} \left( \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0$$

$$\text{т.к. } x > 0, y > 0, \text{ т.о. } x+y+1 > 0 \quad \frac{xy - 3y + 3x - 9 - xy}{xy(x-3)(y+3)} = 0 \quad \begin{cases} x-y=3 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq 3, y \neq -3 \end{cases} \Rightarrow x=y+3$$

т.к.  $y > 0$ , т.о.  $x > 3 \Rightarrow$  все условия соблюдаются

$$\begin{aligned} *x-y &= 3 \\ M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy = \\ &= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 9xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-3) \\ \text{Получаем } x-y &= 3: (3)^3 + 3xy(3-3) = 27 - \text{Это единственное значение } M \end{aligned}$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 a) & (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 & 2 \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \pi x \\
 & \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \left( \cos \frac{\pi}{2}(-x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) \right) = 0 \\
 & \cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (x+y) \in \mathbb{Z} \\ |x+y| \equiv 1 \end{array} \right. \\
 & \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\
 & x+y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\
 & y = 1 + 2n - \frac{h+k+1}{2} = \frac{1+3h-k}{2} \\
 & \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) = 0 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (3x-y) \in \mathbb{Z} \\ |3x-y| \equiv 1 \end{array} \right. \\
 & \frac{\pi}{2}(3x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\
 & 3x-y = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \\
 & 3x-1-2m+k = 1+2k \\
 & 4x = 2(h+k) \\
 & x = \frac{h+k+1}{2} \\
 & \text{Ответ: } \left( \frac{h+k+1}{2}, \frac{1+3h-k}{2} \right), h \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) & \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi. \text{ Это неравенство неверно. Тогда } x=0 \text{ и } y=0 \\
 & \text{Тогда } \arccos \frac{x}{4} = \pi + 2\pi \cdot m, m \in \mathbb{Z}, \text{ и } \frac{y}{3} = \pi + 2\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\
 & \text{Тогда } \arccos \frac{x}{4} = -\pi \text{ и } \frac{y}{3} = -\pi, т.е. x=-4 \text{ и } y=-9 \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{h+k+1}{2} = -4 \\ \frac{1+3h-k}{2} = -9 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h+k+1 = -8 \\ 3h-k+1 = -18 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k = -5-h \\ 3h+g+h+1 = -18 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k = -9-h \\ 4h = -28 \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} k = -2 \\ h = -7 \end{array} \right. \Rightarrow x = \frac{-7-2+1}{2} = -4, y = -9 \\
 & \text{Ответ: все, кроме одной } (-4, -9)
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Всегда ли вероятность происхождения события через состязание, если  $x$ - кол-во одноклассников,  $y$ - кол-во дополнительных выделенных билетов. Тогда:

$$\frac{\binom{4}{y}}{\binom{4}{x}} \cdot 3^5 = \frac{\binom{4+y}{x}}{\binom{4+y}{4+y}} = \frac{4! \cdot (x-4)! \cdot 4!}{2! \cdot 2! \cdot x!} \cdot \frac{7}{2} = \frac{(4+y)! \cdot (x-4-y)! \cdot (4+y)!}{2! \cdot (2+y)! \cdot x!} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(x-4)! \cdot 4! \cdot 7 \cdot 5}{(x-4-y)!} = \frac{(y+3)(y+4) \cdot (x-4-y)! \cdot (4+y)!}{(y+3)(y+4)(4+y)!}$$

Поэтому слева получается натуральное число, которое состоит из  $y$  множителями второго языка и

последовательных натуральных чисел. То справа тоже должно получиться натуральное число, множителями которого будут последовательные натуральные числа

1) Если  $y$  будет  $< 3$ , то в знаменателе правой части не будет числа, множителем которого будет  $7 \Rightarrow$  правая часть не будет натуральным числом  $\Rightarrow$  равенство не достигнет

2) Если  $y \geq 3$  то в знаменателе правой части будут как минимум 2 множителя  $y+4$ , из-за чего правая часть не будет натуральным числом, множителями которого будут последовательные натуральные числа; равенство не достигнет

3) Если  $y=3$ :  $\frac{(x-4)!}{(x-7)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 7!}{6 \cdot 7 \cdot 4!}$

$$(x-5)(x-6)(x-4) = 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$x=11$  - натуральное число кол-во одноклассиков, при котором

достигается равенство  
Тогда в копилке можно было выделено  $4+3=7$  билетов

Ответ: 7

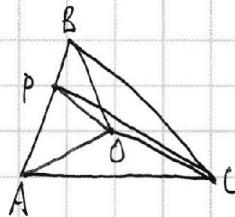


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\Omega_1$ -окр. окнс. около  $\triangle ABC$ ;  $O$ -центр  $\Omega_1$ ;  $\Omega_2$ -окр., окнс. около  $\triangle ABC$ ;  $\Omega_2 \cap AB = \{P\}$ ;  $AP = \frac{16}{5}$ ;  $BP = 2$ ;  $AC = 4$   
Найти:  $S_{\triangle ABC}$

Т.к.  $O$ -центр  $\Omega_1$ , то  $AO = OB$  как радиусы  $\Rightarrow \angle AOB = \angle BOD \Rightarrow \angle BAD = \angle ABO$   
В  $\Omega_2$ :  $\angle PBO = \angle PCO$  как вписанные углы, опирающиеся на общую дугу  $\Rightarrow \angle ABO = \angle PCO$ ;  $\angle PCO = \angle BAO = \angle PAO$   
 $\angle ABO = \angle BAO$

Т.к.  $O$ -центр  $\Omega_1$ , то  $AO = OC$  как радиусы  $\Rightarrow \angle AOC = \angle PCD \Rightarrow \angle OAC = \angle OCA$   
 $\angle PAC = \angle PAO + \angle OAC$   
 $\angle PCA = \angle PCO + \angle OCA$   
 $\angle PCO = \angle PAO$ ,  $\angle OAC = \angle OCA$

$$\text{По формуле Герона: } S_{\triangle APC} = \sqrt{\frac{\frac{16}{5} + \frac{16}{5} + 4}{2} \cdot \frac{\frac{16}{5} + 4}{2} \cdot \frac{\frac{16}{5} - 4}{2} \cdot \frac{\frac{16}{5} + \frac{16}{5} - 4}{2}} = \sqrt{\frac{26}{5} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{6}{5}} =$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{26 \cdot 6} = \frac{4}{5} \sqrt{39}$$

Проведем высоту  $CH$  в  $\triangle APC$ .  $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} CH \cdot AP = \frac{1}{2} CH \cdot \frac{16}{5} = \frac{4}{5} CH$

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ и } \triangle APC \text{ имеют общую высоту } CH \text{ из вершин } C \Rightarrow S_{\triangle ABC} : S_{\triangle APC} = \frac{AB}{PA} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\frac{16}{5} + 2}{\frac{16}{5}} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{39} = \frac{26}{5} \sqrt{39} = \frac{13 \sqrt{39}}{10} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{13 \sqrt{39}}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

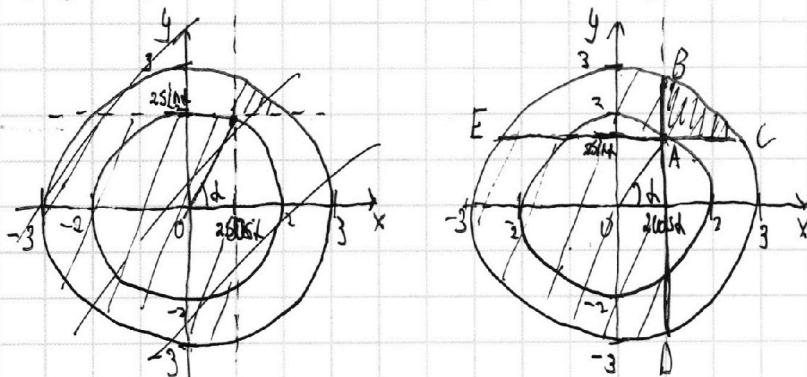
СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2 \cdot \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 4 \quad (2) \end{cases}$$

(2) В эту область входят все точки, которые находятся внутри (в том числе на линии) окружности с центром  $(0,0)$  и радиусом 2

(1)  $x = 2 \cdot \cos \alpha$  - это абсцисса точки, лежащей на окружности с центром  $(0,0)$  и радиусом 2, которая вынута под углом  $\alpha$  (отрицательно полюбительного направления оси абсцисс), а  $y = 2 \cdot \sin \alpha$  - это соответствующая ордината этой точки  
Изобразим решение этой системы, взяв произвольный угол  $\alpha$



Геометрический параметр фигуры зависит от угла (**расположения точки A на окружности**), то достаточно рассмотреть только расположение точки B её верхней пологоние (Верхней будут те же фигуры, только отраженные) наибольшее значение параметра фигуры будет достигаться при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   
Тогда координаты  $B, C, D$  и  $E$  будут  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{7}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{7}, -\sqrt{2})$  соответственно

Периметр этой фигуры будет равен:  $BD + EC + BC + ED$  ( $V$ -это длина дуги)

$$BD = 2\sqrt{7}, \quad EC = 2\sqrt{7}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + (\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}, \quad ED = \sqrt{2^2 + (\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}$$

$$\cos \angle BOC = \frac{g+g - 2(g-\sqrt{14})}{2g} = \frac{4\sqrt{14}}{2g} = \frac{2\sqrt{14}}{g} \Rightarrow \angle BOC = \arccos \frac{2\sqrt{14}}{g} \cdot 3$$

$$\cos \angle EAD = \frac{g+g - 2(\sqrt{g}+\sqrt{14})}{2 \cdot 3 \cdot 3} = -\frac{2\sqrt{14}}{9} \Rightarrow \angle BOC = \left(\pi - \arccos \frac{2\sqrt{14}}{g}\right) \cdot 3$$

(периметр) равен:  $2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 3\pi \cos \frac{2\sqrt{14}}{g} + 3\pi - 3\arccos \frac{2\sqrt{14}}{g} = 4\sqrt{7} + 3\pi$

Ответ:  $3\pi + 4\sqrt{7}; \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку ~~правильная~~ - ~~легенная~~ и правильная, то боковыми её гранями являются равнобедренные трапеции, а гранями оснований - правильные многоугольники.  $\Rightarrow$  вокруг каждой грани можно описать окружность.

Центром шара и является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к граням в центрах описанных около них окружностей.

Центром шара  $S$  является точка пересечения биссектрис трех углов ~~легенной~~ пирамиды.

Об эти точки лежат на высоте ~~легенной~~ пирамиды.

Чтобы это было возможно, боковые ребра должны быть наклонены под углом  $45^\circ$  к оси монотонии основания пирамиды.

Ответ:  $45^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

Поскольку уравнение  $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  - симметрическое, то справедливо, что пары  $(x, y)$  и  $(y, x)$  являются его решениями  $\Rightarrow$  подставим  $y = x$  в такое уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$$

$$\frac{2x+1}{x^2} = \frac{x+3+x-3+1}{x^2-9}$$

$$\frac{2x+1}{x^2} = \frac{2x+1}{x^2-9} \Rightarrow (2x+1) \left( \frac{x^2-9-x^2}{x^2(x^2-9)} \right) = 0$$

$$-9 \frac{(2x+1)}{x^2(x-3)(x+3)} = 0 \quad \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$2x+1=0 \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

$$Tогда y = -\frac{1}{2}=x. Тогда M = x^3-y^3-9xy = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$$

$$k = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x-3 = x^2 - 2xy + y^2 = 9$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy = (x-y)^3 + (x-y)3xy - 9xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y+3) = (x-y)^3 = 27$$

$$(sin(\pi x) - sin(\pi y)) sin(\pi x) = (cos(\pi x + \cos(\pi y)) cos(\pi x)$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \left( sin \frac{\pi}{2}(x-y) \cdot sin \pi x \right) - \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \quad \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2}(x-y) - \cos \pi(x-y)) \neq \cos$$

$$x+y \in \mathbb{Z} \quad x+y = \pi k \quad \cos \frac{\pi}{2}(-x-y) = \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(x-y) - \cos \frac{\pi}{2}(3x-y) = 0$$

$$3x-y \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = \pi k$$

$$\frac{C_4^2}{C_9^2} \cdot 3^5 = \frac{C_{10}^2}{C_{14}^2} \Rightarrow \frac{4!(x-4)!4!}{2!2!x!} \cdot 3^5 = \frac{(4+y)!(x-4+y)!(4+y)!}{2!(2+y)!x!}$$

$$(x-4)!(y+4)!(4+y)!(x-4)! \cdot 12 \cdot 4! \cdot 3^5 = (y+3)(y+4) \cdot (x-4+y)!(4+y)!$$

$$(x-4+y)!(x-4)!(6 \cdot 24 \cdot 7) = (y+2)(y+3)(x-4+y)!(4+y)!$$

$$y=3: \quad 6 \cdot 24 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot (x-3) \cdot 5! \quad y=3: \quad 6 \cdot 24 \cdot 7 = 6 \cdot 7 \cdot (x-1)(x-2)(x-3) \cdot 7!$$

$$\frac{4!(x-4)!4!}{2!2!x!} \cdot 3^5 = \frac{4!(x-a)!a!}{2!y!(x-2)!} \cdot \frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{x-11} = 5 \cdot 6 \cdot 7$$

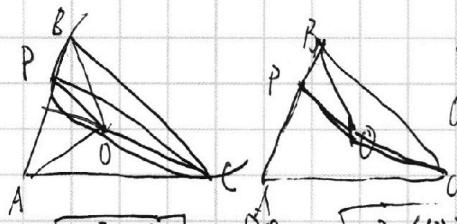


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\omega_1$  - опис. окр.  $\triangle ABC$ ;  $O$  - центр  $\omega_1$ ;  $\omega_2$  - опис. окр.  $\triangle ABC$ ;  $\omega_2 \cap AB = P$ ;  $AP = \frac{16}{5}$ ;  $BP = 2$ ;  $AC = 4$

Найти:  $S_{\triangle ABC}$

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2} = PO = \sqrt{r^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$r^2 + 4 + \cancel{2r \cos \angle} = r^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = r^2 - \frac{160}{25}$$

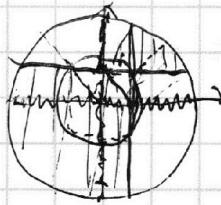
$$\frac{26}{25} = 4r \cdot \cos \angle; \cos \angle = \frac{2,6}{r}$$

$$\frac{26}{25} - 4 = \frac{136}{25} \quad \frac{16}{5}, \frac{16}{5}, 4$$

$$\frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\angle PAO = \angle PBO, \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$$

$$S_{\triangle APC} = \sqrt{\frac{36}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{16}{5}} = 2 \cdot \frac{4}{5} \sqrt{26} = \frac{8}{5} \sqrt{26} = \frac{1}{2} h \cdot \frac{16}{5}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!