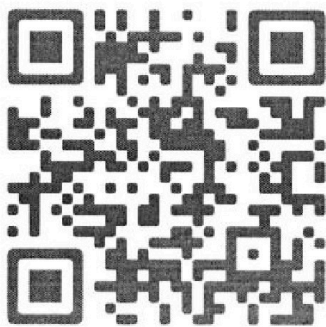




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1
А состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow$ его можно
разложить как $111 \cdot a$, где a какая-то цифра.

$1111 = 101 \cdot 11$ b и c - какие-то цифры

Заметим, что $P: 101$, иначе $A \cdot B \cdot C \neq n^2, n \in \mathbb{N}$
т.к. $C < 100 \Rightarrow B = 101 \cdot b$, т.к. B содержит
 b , то $b = 6 \Rightarrow B = 606$. b это цифра $\Rightarrow b < 11$
 $\Rightarrow C: 11$ иначе $A \cdot B \cdot C \neq n^2 \Rightarrow C = 11 \cdot c$.

C содержит 3 $\Rightarrow C = 33$

$$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$$

$a: 2$ иначе $A \cdot B \cdot C \neq n^2$

$\Rightarrow a = 2$ или $a = 8 \Rightarrow A = 2222$ или $A = 8888$

Ответ: $A = 2222$

$A = 8888$

$B = 606$ или $B = 606$

$C = 33$

$C = 33$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по укл.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} \stackrel{\sim 2}{=} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$K = \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-2)(y+2) = xy - 2y + 2x - 4$$

$$x = 2 + y \quad (x-2 \text{ тогда } > 0)$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = \\ &= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8 \end{aligned}$$

Ответ: $M = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\pi(x+y) = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = k, k \in \mathbb{Z}$$

~~sin~~

$$\cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x \neq \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x = 0$$

$$\begin{cases} \tan \pi x = -\tan \frac{\pi(x-y)}{2} \\ \cos \pi x \neq 0 \\ \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\pi x = -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x = 2k + y$$

$$x = \frac{y}{2} + \frac{k}{2}$$

$$y = k - \frac{y}{2} - \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k - \frac{y}{2}$$

~~sin~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\left| \frac{x}{6} \right| \leq 1 \quad \left| \frac{y}{2} \right| \leq 1$$

$$|x| \leq 6$$

$$|y| \leq 2$$

~~y max 1/4~~

x min max 1/4

$$\Rightarrow \frac{0}{1/4} = 24$$

положительная

24 - отриц.

и 1 кол

где y min max 1/4

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1/4} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1/4} = 8$$

где полож

в где отриц.

и кол

$$\text{всего пар } (2 \cdot 24 + 1) \cdot (2 \cdot 8 + 1) - 1$$

$$\text{м.к. } < \pi, \text{ т.е. } \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} \text{ будет}$$

Ил момент

$$49 \cdot 17 - 1 = 832$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 17 \\ \hline 343 \\ 49 \\ \hline 833 \end{array}$$

Ответ: 832

$$a) \quad x = \frac{\ell}{2} + \frac{k}{4}; y = \frac{3}{4}k - \frac{\ell}{2}, k, \ell \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Будем всегда выбирать Кеню,
Васю и ещё оставшихся и делим
на все возможные способы выбора.

Это и будет шанс попасть на конкурс
тогда по ум. K - кол-во билетов в конкурсе
 n - кол-во единиц в месяце

$$6 \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{K-2}}{C_n^K}$$

$$6 \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-2-K+2)! \cdot (K-2)!}}{\frac{n!}{(n-K)! \cdot K!}}$$

$$6 \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot n! \cdot 2!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-K)! \cdot K!}{(K-2)! \cdot (K-2)! \cdot n!}$$

$$\frac{6 \cdot 4!}{2!} = \frac{K!}{(K-2)!}$$

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = K(K-1)$$

$$K^2 - K - 72 = 0$$

$$(K-9)(K+8) = 0$$

$$K=9$$

$$K=-8 \text{ не подходит, так как } K > 0$$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5

$AB = AP + BP = 25 + 5 = 30$

Пусть $\angle CAB = \alpha$
 тогда $\angle COB = 2\alpha$
 т.к. одна дуга и
 он центральный.
 $\angle CPB = \angle COB = 2\alpha$
 т.к. одна дуга

$\Rightarrow \angle CPA = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle CPA = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \triangle CPA$ - равнобедр. $\Rightarrow CP = PA = 25$

Т.к. кос для $\triangle ABC$ и $\triangle CPB$:

$$\begin{cases} BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha \\ BC^2 = CP^2 + BP^2 - 2CP \cdot BP \cdot \cos 2\alpha \end{cases}$$

приравняем и подставим:

$$30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cos \alpha = 25^2 + 5^2 - 2 \cdot 25 \cdot 5 \cos 2\alpha$$

$$36 + 49 - 84 \cos \alpha = 25 + 1 - 10 \cos 2\alpha$$

$$59 - 84 \cos \alpha = -10(2\cos^2 \alpha - 1)$$

$$59 - 84 \cos \alpha + 20 \cos^2 \alpha - 10 = 0$$

$$20 \cos^2 \alpha - 84 \cos \alpha + 49 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{84 \pm \sqrt{84^2 - 4 \cdot 20 \cdot 49}}{40}$$

$$\cos \alpha = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5 \cdot 49}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \alpha = \frac{21 \pm \sqrt{196}}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{21 \pm 14}{10}$$

$|\cos \alpha| \leq 1 \Rightarrow$ принимаем только с минусом

$$\cos \alpha = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ: $\frac{105\sqrt{51}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

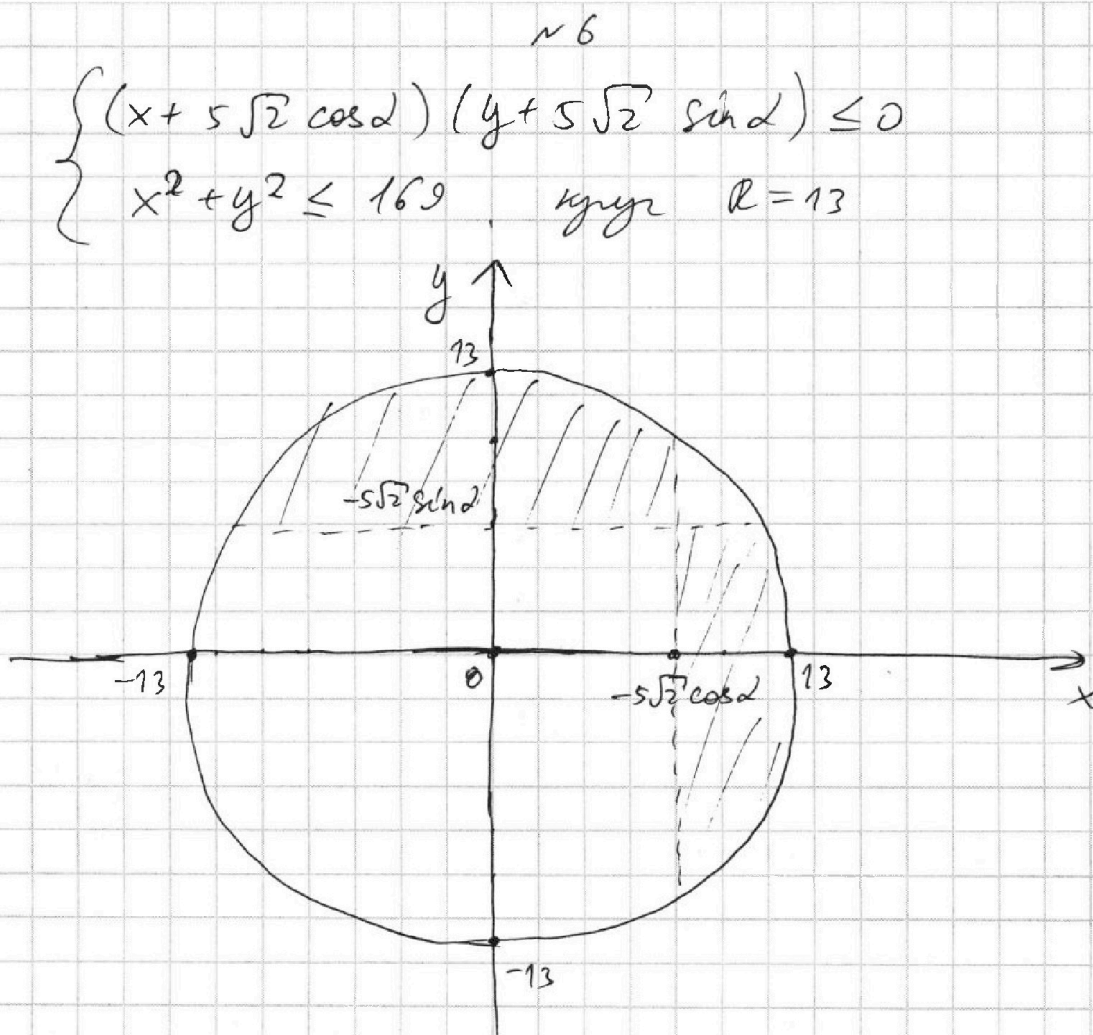
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



для первого ур-ия

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$ подходят под $P(\alpha)$ заштрихованные части



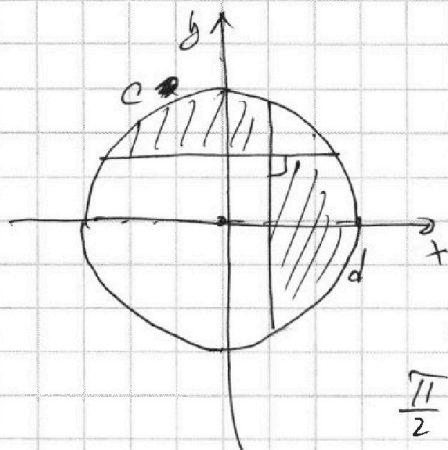
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

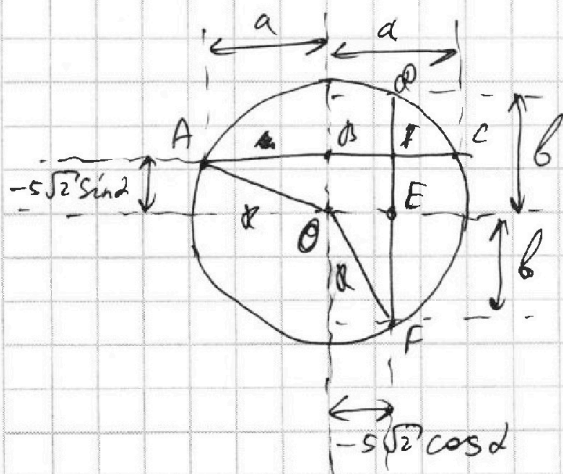


Пусть длина дуги сектора
это $c+d$, тогда
дуга угла внутри
равного $\frac{\pi}{2}$ сектора

следующее

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\frac{c}{R} + \frac{d}{R}}{2}$$

$\Rightarrow c+d = \pi R = \text{const} \Rightarrow$ на значение макс
и влияют только внутри части



Конечно, что из симметрии
отрезки AB и BC
равны и равны a ,
и BE равны DE и EF=b.

по Th Пифагора в $\triangle AOB$ и $\triangle OEF$:

$$a = \sqrt{R^2 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$b = \sqrt{R^2 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$M = 2a + 2b + \pi R$, $\pi R = \text{const}$, поэтому
найдем максимум для $2a + 2b$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a+2b = 2\sqrt{R^2 - 50\sin^2 2} + 2\sqrt{R^2 - 50\cos^2 2}$$

a и b неотрицательны, а $R^2 > 50\sin^2 2$ и $R^2 > 50\cos^2 2$, т.к.

$$R^2 = 160, \text{ а } |\sin 2| \leq 1 \text{ и } |\cos 2| \leq 1$$

$\Rightarrow$ возведем в квадрат

$$8\sqrt{R^4 - 50R^2\sin^2 2 - 50R^2\cos^2 2 + 2500\sin^2 2\cos^2 2} +$$

$$+ 4R^4 - 200\sin^2 2 + 4R^2 - 200\cos^2 2$$

$$\sin^2 2 + \cos^2 2 = 1$$

$$8 \cdot R^4 - 200 + 8\sqrt{R^4 - 50R^2 + 2500\sin^2 2\cos^2 2}$$

$$8R^4 - 200 + 8\sqrt{R^4 - 50R^2 + 625\sin^2 2}$$

максимальна при максимальном $\sin^2 2$

$$\sin^2 2 \leq 1 \Rightarrow \text{при } \sin^2 2 = 1$$

$$\sin 2 = \pm 1$$

$$2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \left(\left| \pi - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{максимум} \right)$$

$$2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

$$M = 2a + 2b + \pi R$$

$$M = 2 \left(\sqrt{R^2 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - 50 \sin^2 \alpha} \right) + \pi R$$

$$M = 2 \left(\sqrt{169 - 25} + \sqrt{169 - 25} \right) + \pi \cdot 13$$

$$M = 48 + 13\pi$$

Ответ: $M = 48 + 13\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

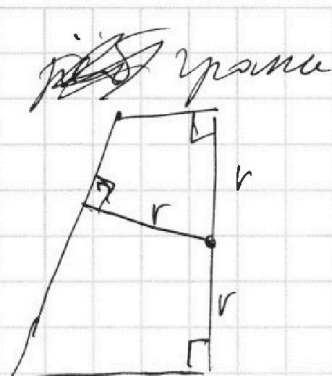


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

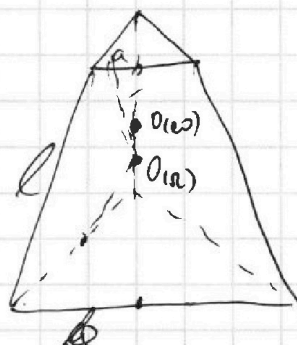
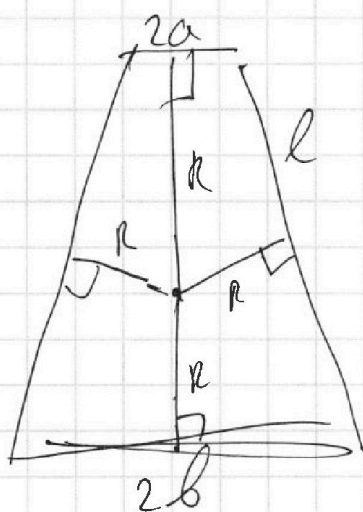
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

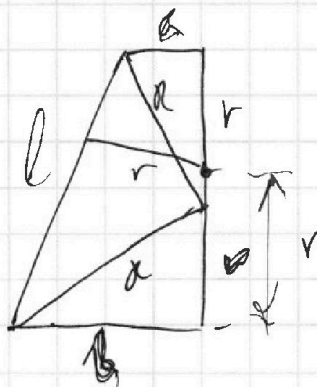
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ω, r Ω, R



центр Ω лежит на перпенд. продолжении
через центр ω вне окружности каждой грани
центр ω лежит на перпенд. продолжении
через центр ω вне окружности вершины и кит. ω .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть P - кол-во вариантов выигрыша Петры и Васи
из всех
тогда

$$\frac{P}{\text{все}} = 1 - \frac{\text{все} - P}{\text{все}}$$

все - это кол-во вариантов случайных из всех
убедимся, что формула верна:

$$P = \text{все} - \text{все} + P$$

$$0 = 0$$

K - кол-во билетов в конце месяца

n - кол-во одинаковых билетов

из них

n - начало мес.

n - конец мес.

$$\frac{P_n}{\text{все}_n} = \frac{P_n}{\text{все}_n}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} M &= 2a + 2b = 2\sqrt{R^2 - 50\sin^2\alpha} + 2\sqrt{R^2 - 50\cos^2\alpha} \\ M^2 &= 4R^2 - 200\sin^2\alpha + 4R^2 - 200\cos^2\alpha + \\ &+ 8\sqrt{R^4 - 50R^2\sin^2\alpha - 50R^2\cos^2\alpha + 2500\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ M^2 &= 8R^2 - 200 + 8\sqrt{R^4 - 50R^2 + 2500\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ M^2 &= 8R^2 - 200 + 8\sqrt{R^4 - 50R^2 + 625\sin^2 2\alpha} \\ &\leq 1 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} k \\ M^2 &= 8 \cdot 169 - 200 + 8(169 - 25) \\ M^2 &= 18 \cdot 169 = 43^2 \\ M^2 &= 16 \cdot 169 - 400 = 16(169 - 25) = 16 \cdot 144 \\ M &= 4 \cdot 12 = 48 \quad + 8R \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

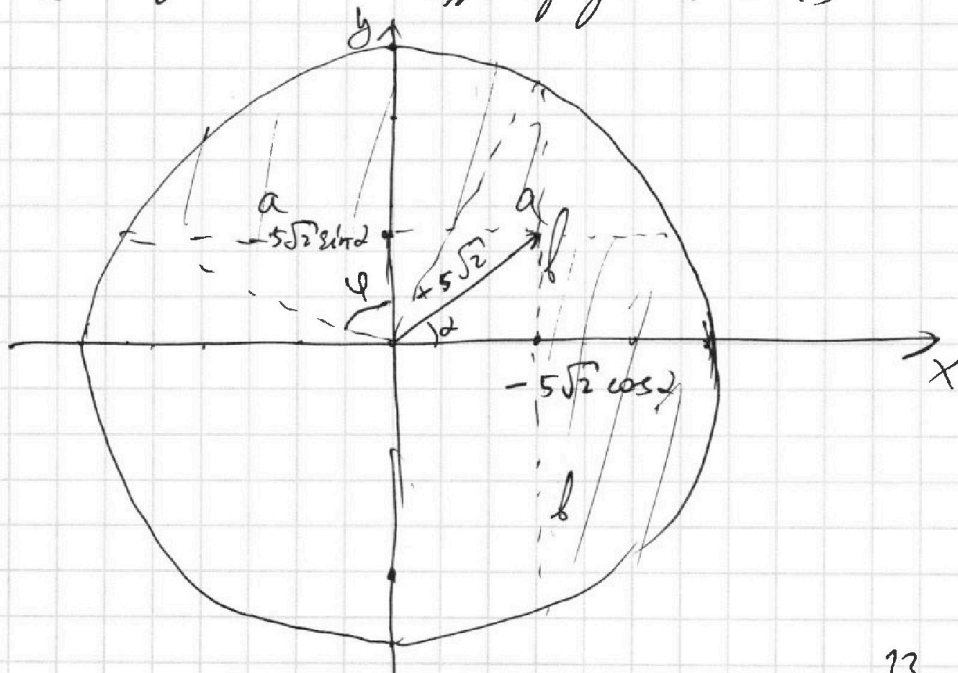
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases} \quad \text{круг } R = 13$$



$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 & x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 & y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \\ x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 & x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 & y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

Глина для const и равна πR (симметрия)

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{R^2 - 50 \sin^2 \alpha} \\ b &= \sqrt{R^2 - 50 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для $\triangle APC$ и $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = CP^2 + BP^2 - 2CP \cdot BP \cdot \cos 2\alpha$$

$$30^2 + 35^2 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = 25^2 + 5^2 - 2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha$$

$$36 + 49 - 84 \cos \alpha = 25 + 1 - 10 \cos 2\alpha$$

$$59 = 84 \cos \alpha - 10(2 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$59 - 84 \cos \alpha + 20 \cos^2 \alpha - 10 = 0$$

$$20 \cos^2 \alpha - 84 \cos \alpha + 49 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{84 \pm \sqrt{84^2 - 4 \cdot 20 \cdot 49}}{40}$$

$$\cos \alpha = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 5 \cdot 49}}{10} \in \mathbb{R}$$

$$\cos \alpha = \frac{21 \pm 14}{10} \quad \text{с учетом, т.к. } \cos \alpha \leq 1$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 5 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 60 \\ 5 \\ \hline 345 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -441 \\ 345 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -441 \\ 245 \\ \hline 106 \end{array}$$

$$106$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 49 \\ \hline 51 \end{array}$$

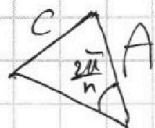


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

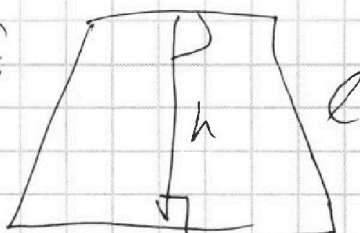
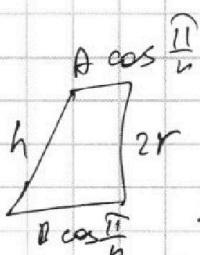
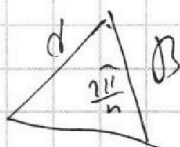
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$C = 2A \sin \frac{\pi}{n}$$

$$d = 2B \sin \frac{\pi}{n}$$



$$h^2 = (2r)^2 - 2r(B \cos \frac{\pi}{n} - A \cos \frac{\pi}{n})^2$$

$$S_{\text{бок}} = h \cdot \frac{C+d}{2} \cdot h = h(A \sin \frac{\pi}{n} + B \sin \frac{\pi}{n}).$$

$$\cdot \sqrt{4r^2 - \dots}$$

$$S_{\text{верх}} = \frac{1}{2} C \cdot A \cos \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} A^2 \sin \frac{2\pi}{n} = A^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

$$2(\sin \frac{\pi}{n} x + \sin \frac{\pi}{n} y) \sin \frac{\pi}{n} x = (2 \cos \frac{\pi}{n} x - \cos \frac{\pi}{n} y) \cos \frac{\pi}{n} x$$

$$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \frac{\pi}{n} x = -2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi}{n} x$$

$$-2 \left(\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} + \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} - \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2} \right) =$$

$$= -2 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos^2 \frac{\pi y}{2} - \sin^2 \frac{\pi y}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \right) =$$

$$= -2 \left((1 - \cos^2 \frac{a}{2}) \cos^2 \frac{b}{2} - (1 - \cos^2 \frac{b}{2}) \cos^2 \frac{a}{2} \right)$$

$$-2 \cos^2 \frac{b}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} =$$

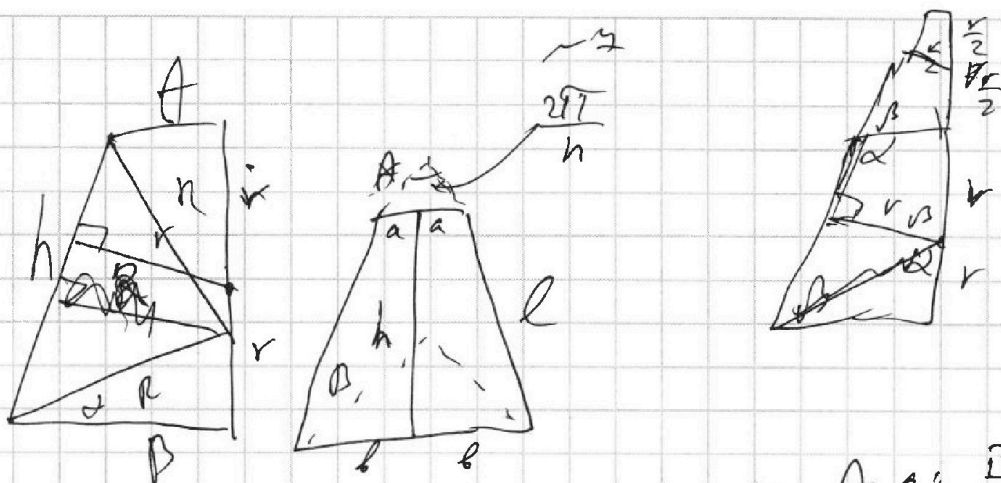


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

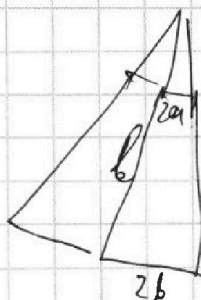


$$a = A \sin \frac{\pi}{n}$$

$$b = B \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{n \frac{1}{2} A^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{n \frac{a+b}{2} \cdot h} = \frac{A^2 \sin \frac{2\pi}{n}}{(A \sin \frac{\pi}{n} + B \sin \frac{\pi}{n}) h}$$

$$h = \sqrt{B^2 - A^2} + \sqrt{B^2 + A^2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \\ & 2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \pi x \\ & \operatorname{tg} \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \operatorname{tg} \pi x = -1 \quad ; \quad \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \right) \operatorname{tg} \pi x + 1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - y = 1 + 2k \end{array} \right.$$

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \right) \neq 0$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2}} + 1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \right) + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} - \\ & \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi y}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = 0 \\ & \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} + 1 + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a = 10111 \cdot a$$

$$B = 101 \cdot b$$

$$C = 11$$

$1111 = 11 \cdot 101$
($B:101$)
получим сумму 101 для
того $B = 606$ иначе не делится

$$a < 11 \Rightarrow C:11 \quad \text{при } C=3 \Rightarrow C=33$$

$$\Rightarrow a=2$$

$$A = 2222 \quad B = 606 \quad C = 33$$

$$ABC = 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$k = \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$0 = -2y + 2x - 4$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y =$$

$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

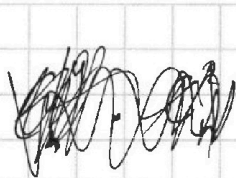
$$M = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{10+13}{100} = \frac{100}{100} - \frac{100}{100}$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

$$12 \ C_3^2$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$12 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$$

$$C_5^3$$

$$\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{n!} \cdot 6 = \frac{(n-2)!}{(n-2-k+2)! \cdot (k-2)!} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$6 \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot n! \cdot 2!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-k)! \cdot k!}{(n-k)! \cdot (k-2)! \cdot n!}$$

$$\frac{6 \cdot 4!}{2!} = \frac{k!}{(k-2)!}$$

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k(k-1)$$

$$k^2 - k - 12 = 0$$

$$(k-4)(k+3) = 0$$

$$k = 4 \quad k = -3 \text{ (не подходит)} \text{ так как } k > 0$$

$$\text{Ответ: } 4$$



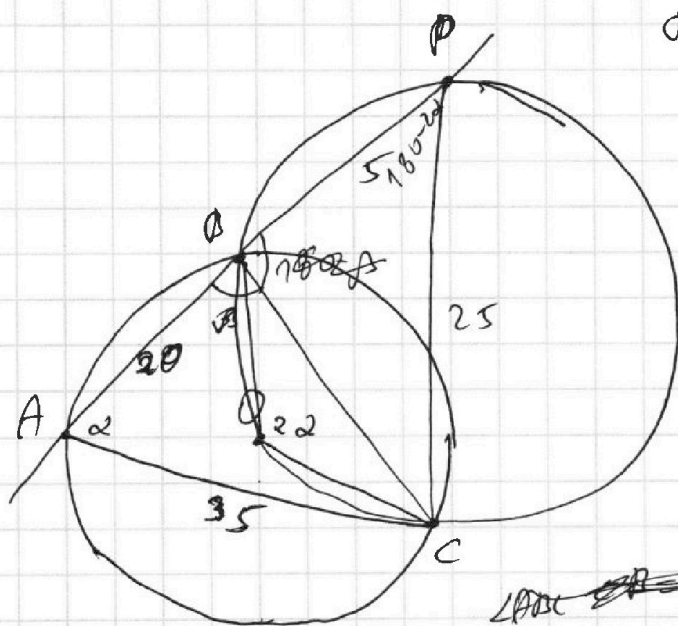
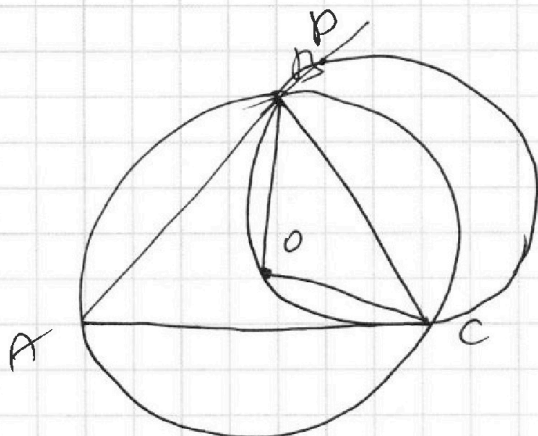
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



$\angle A = \angle C \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$
 $\angle BOC$ — центр.
 $\Rightarrow \angle BPC = 180 - 2\alpha$
 $\Rightarrow \angle APC =$
 $= 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) =$
 $= \alpha$
 $\Rightarrow \triangle APC$ равнобедренный
 $\Rightarrow AP = PC = 25$

$$\text{Тогда по теореме косинусов: } BC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos(180 - 2\alpha)$$

$$20^2 + 35^2 - 2 \cdot 20 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = 5^2 + 25^2 + 2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha$$

$$400 + 1225 - 1400 \cos \alpha = 25 + 625 + 250 \cos 2\alpha$$

$$1625 - 1400 \cos \alpha = 650 + 250 \cos 2\alpha$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 15 \\ \hline 225 \\ 21 \\ \hline 245 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4^2 \cdot 5^2 + 7^2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cos 2 = 5^2 + 5^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cos 2$$

$$16 + 49 - 48 \cos 2 = 1 + 25 + 10 \cos 2$$

$$65 - 26 = 48 \cos 2 + 10(2 \cos^2 2 - 1)$$

$$39 = 48 \cos 2 + 20 \cos^2 2 - 10$$

$$20 \cos^2 2 + 48 \cos 2 - 49 = 0$$

$$\cos 2 = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 4 \cdot 40 \cdot 20}}{40}$$

$$\cos 2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4^2 \cdot 10^2 \cdot 2/64}}{5} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 50}}{5}$$

$$|\cos t| \leq 1$$

$$\cos 2 = \frac{-6 + \sqrt{86}}{5} > 0 \quad 2 < \sqrt{86} < 10$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \cos^2 2} = \sqrt{1 - \frac{36 \pm 12\sqrt{86} + 86}{25}}$$

$$\sin 2 = \frac{\sqrt{25 - 122 + 12\sqrt{86}}}{5} = \frac{\sqrt{12\sqrt{86} - 97}}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 35 \cdot$$

$$\tan \pi x + \tan \frac{\pi(x-y)}{2} = 0$$

$$\tan \pi x = \tan \frac{-\pi(x-y)}{2}$$

$$\pi x = -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

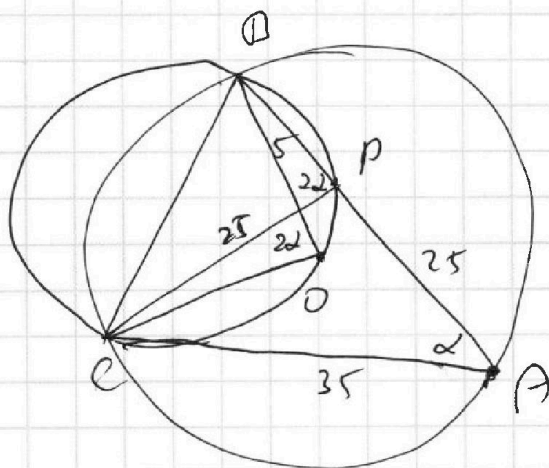
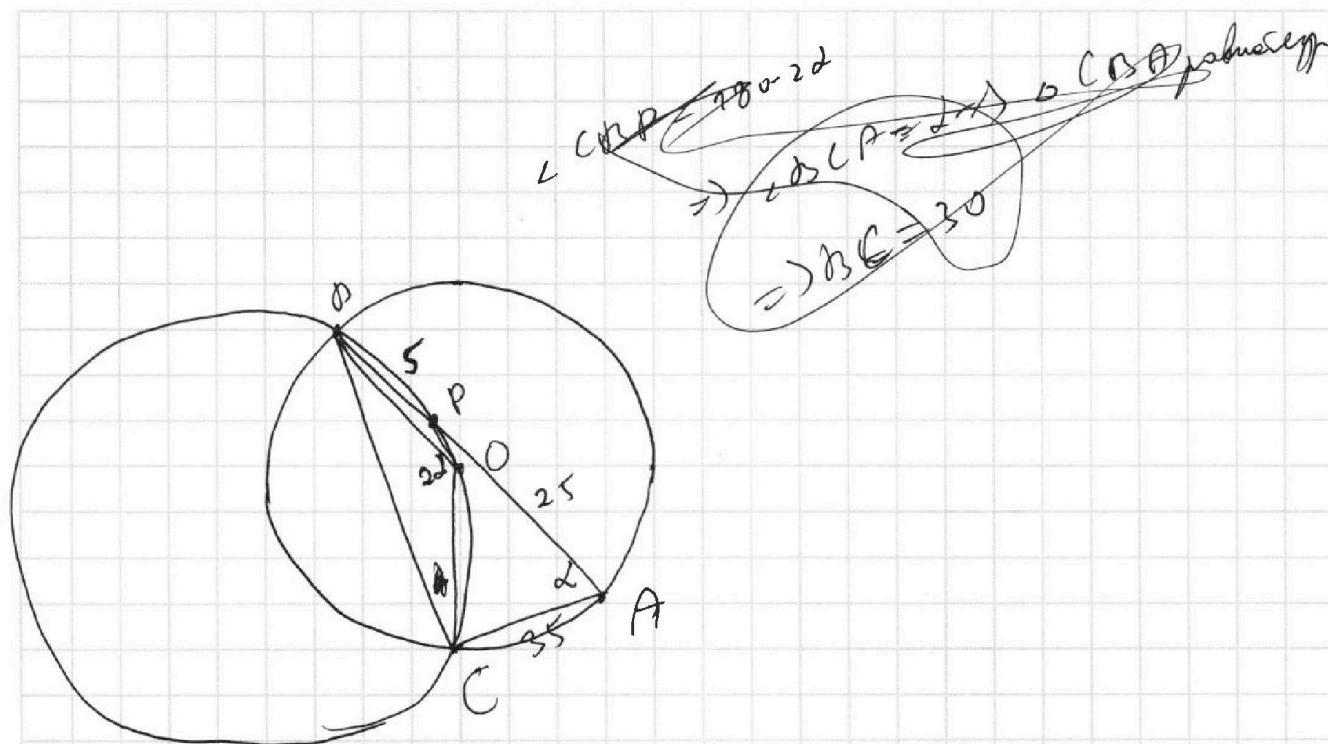


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle A = \alpha \quad \angle CDB = 2\alpha \text{ (центральный)} ; \angle CDD = 2\alpha \text{ (вписанный)}$$

$$\Rightarrow \angle CPA = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle PCA = \alpha \Rightarrow CP = CA = 25$$