



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$

По условию задачи A — это четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр.

Пусть $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$, при этом $1 \leq a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$.

Заметим, что 11 и 101 — простые числа и $a \not\div 11$, $a \not\div 101$, т.к. $a \leq 9$.

Заметим, что $A \cdot B \cdot C$ — это точный квадрат натурального числа, значит все простые числа входят в $A \cdot B \cdot C$ в четных степенях, значит т.к. $A \div 101$, $A \div 11$ и $A \not\div 101^2$ и $A \not\div 11^2$, то

$$\begin{bmatrix} B \div 101 \\ C \div 101 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} B \div 11 \\ C \div 11 \end{bmatrix}$$

Заметим, что B — двухзначное число, значит $C < 100$, следовательно $C \not\div 101$, т.к. 101 — простое число, которое больше 100 . Значит $B \div 101$.

Следовательно, т.к. B — трехзначное число, которое делится на 101 : $B = \overline{b_0 b_1 b_2}$, где $1 \leq b_0 \leq 9$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$. Так в числе B есть хотя бы одна цифра 0 , то $b = 6$.

$B = 606$, заметим, что $B \not\div 11$, значит $C \div 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Следовательно, т.к. C — двузначное число, которое делится на 11: $C = \overline{cc}$, где $1 \leq c \leq 9$ и $c \in \mathbb{N}$, т.к. в числе C есть хотя бы одна цифра 3, то $c = 3$.
 $C = 33$.

$a \cdot 1111 \cdot 606 \cdot 33 = n^2$, т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат некоторого натурального числа, где $n \in \mathbb{N}$.

$$a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 3 = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$2 \cdot a = m^2, \text{ где } m \in \mathbb{N}.$$

Знаем, что $1 \leq a \leq 9$ и $a \in \mathbb{N}$, перепробуем всевозможные значения a :

$$a = 1: 2 \cdot 1 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a = 2: 2 \cdot 2 = 2^2 \oplus$$

$$a = 3: 2 \cdot 3 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a = 4: 2 \cdot 4 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a = 5: 2 \cdot 5 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a = 6: 2 \cdot 6 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a = 7: 2 \cdot 7 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a = 8: 2 \cdot 8 = 4^2$$

$$a = 9: 2 \cdot 9 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит подходят числа $A=2222$ и $A=8888$.

Ответ: $(2222; 606; 33)$

$(8888; 606; 33)$

Проверим данные тройки натуральных чисел (A, B, C) :

условия про цифры они удовлетворяют

$$2222 \cdot 606 \cdot 33 = 2 \cdot 1111 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = \\ = (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

$$8888 \cdot 606 \cdot 33 = 8 \cdot 1111 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = \\ = (4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $M=8$.

$x, y > 0$:

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

Значение выражения K не изменяется, если x увеличить на 2, а y увеличить на 2:

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{(x+2)+(y+2)+5}{(x+2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy+2x+2y+4}$$

По условию $x, y > 0$: $x+y+5 > 0$

$$xy+2x+2y+4 = xy$$

$$2x+2y+4 = 0$$

$$x+y+2 = 0$$

Давайте найдем всевозможные значения выражения M при таких условиях:

Известная формула: $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ - проверяется раскрытием скобок.

$$x^3+(-y)^3+(-2)^3-3x(-y)(-2) = (x-y-2)(x^2+y^2+4-xy-2x+2y)$$

$$x^3-y^3-8-6xy = (x-y-2)(x^2+y^2+4-xy-2x+2y)$$

Мы получили, что $x-y-2=0$, значит:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 6xy - 8 = 0$$

$\Downarrow$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = 8$$

$$\text{Ответ: } M = 8.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Problem: a)
$$\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

д) 32

$$a) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi y) \sin(\pi x) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x) = \sin(\pi y) \sin(\pi x) + \cos(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(2\pi x) = \sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi(x-y))$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x-y) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -2\pi x = \pi(x-y) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x-y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -2x = x-y + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x-y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -2x = x-y + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x-y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -2x = x-y + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Problem:
$$\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b) (x, y): x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi$$

По области определения функции $\arcsin(x)$:

$$\frac{x}{6} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-6; 6]$$

$$\frac{y}{2} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-2; 2]$$

Заметим, что $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, тогда заметим, что

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \leq \pi$$

$\wedge \frac{\pi}{2} \quad \wedge \frac{\pi}{2}$

Равенство достигается только при $\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$
т.е. при $x=6, y=2$.

Значит, нам подходит все пары $x \in [-6; 6], y \in [-2; 2], x, y \in \mathbb{Z}$,
кроме пары $(6; 2)$ под данное неравенство.

Рассмотрим произвольную пару (x_1, y_1) , которая удовлетво-
ряет неравенству $(x_1, y_1 \in \mathbb{Z})$:

Заметим, что эта пара удовлетворяет, что эта пара
будет удовлетворять уравнению, т.е.:

~~Предположим~~

~~$\begin{cases} x_1 + y_1 = 2 \\ -3x_1 - y_1 = 2 \end{cases}$~~ тогда будет верно что $\begin{cases} x_1 + y_1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x_1 - y_1 = 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ т.к. $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте рассмотрим, когда пара (x, y) будет удовлетворять уравнению:

$$\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y, :2 \\ -3x+y, :2 \end{cases}$$

Заметим, что x, y - должны быть одной четности, т.к.

$-3x+y \equiv x+y \pmod{2}$, т.е. требуется чтобы $x+y, :2$ - также выполнялось только для x, y одной четности.

Посчитаем число вариантов x - чет, y - чет:

$$x = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\} - 7 \text{ вариантов}$$

$$y = \{-2, 0, 2\} - 3 \text{ варианта}$$

Всего вариантов: $7 \cdot 3 - 1 = 20$, т.к. пара $(6; 2)$ - не подх.

Посчитаем число вариантов x - неч, y - неч:

$$x = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} - 6 \text{ вариантов}$$

$$y = \{-1, 1\} - 2 \text{ варианта}$$

Всего вариантов: $6 \cdot 2 = 12$

Итого все число вариантов: $20 + 12 = 32$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: в конце месяца было выделено 9 билетов на концерт.

Пусть количество одиннадцатиклассников равно $n \in \mathbb{N}$. В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, найдём вероятность Пете и Вase вместе пойти на концерт.

Всего вариантов распределить 4 билета на n человек: C_n^4

Вариантов распределить 4 билета на n человек, чтобы и Пете, и Вase достался билет: C_{n-2}^2 , т.к. два билета из четырёх нужно сразу отдать Пете и Вase, и остаётся распределить 2 билета на $n-2$ человек.

$$P_{\text{кал}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Пусть в конце месяца оказалось, что будет выделено m билетов на концерт, где $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$.

Найдём вероятность Пете и Вase вместе пойти на концерт.

Всего вариантов распределить m билетов на n человек: C_n^m

Вариантов распределить m билетов на n человек, чтобы и Пете, и Вase достался билет: C_{n-2}^{m-2} , т.к. два билета нужно отдать Пете и Вase, и остаётся распределить $m-2$ билета на $n-2$ человек.

$$P_{\text{кал}} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-m)!(m-2)!}}{\frac{n!}{(n-m)!m!}} = \frac{(n-2)!m!}{n!(m-2)!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию задачи вероятность или вместе пойти на концерт в начале месяца Юля в 6 раз меньше, чем в конце месяца:

$$6p_{\text{нач}} = p_{\text{кон.}}$$

$$\frac{12 \cdot 6}{n(n-1)} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \quad | n \geq 2, \text{ т.к. в классе Тетя и Вера одноклассники.}$$

$$72 = m(m-1)$$

$$m^2 - m - 72 = 0$$

$$(m-9)(m+8) = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} m=9 \\ m=-8 \end{cases}$$

$m=-8$ не подх., т.к. количество билетов натуральное число.

Ответ: в конце месяца Юля выделила 9 билетов на концерт.



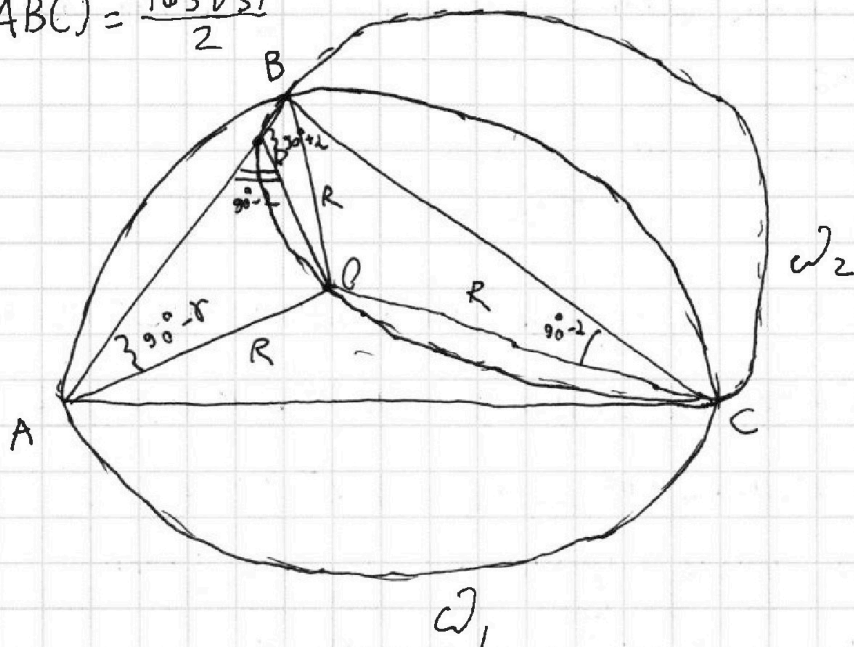
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $S(ABC) = \frac{105\sqrt{51}}{2}$



По условию: $AP = 2S, BP = S, AC = 3S$.

Рассчитаем степень т. А отн. окружности ω_2 :

$$\deg_{\omega_2}(A) = \angle APB = 2S \cdot 30 = 750$$

$$AB = AP + BP = 2S + S = 3S$$

По определению степени точки:

$$\deg_{\omega_2}(A) = \angle AOP$$

$$\text{Вычисляем } AB = AP + BP = 2S + S = 3S.$$

Пусть радиус описанной окружности $\triangle ABC$ равен R , тогда $AO = BO = CO = R$.

Пусть $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (сумма углов в } \triangle ABC \text{)}$$

$\Downarrow$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$\Downarrow$

$$\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma)$$

$$\begin{cases} \frac{3S}{\sin(\alpha + \gamma)} = 2R \\ \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{2S}{\sin(\alpha + \gamma)} \end{cases}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{2S}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\frac{3S}{2S} = 2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{10}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{49}{100} = 1$$

$\Downarrow$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10} \text{ в } \triangle ABC \text{ — острый, а } \alpha < 90^\circ$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10}}{2} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S(ABC) = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $13\pi + 48 = M_{\max}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (x + s\sqrt{2}\cos\alpha)(y + s\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 13^2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 13^2$ — уравнение круга радиуса 13 и с центром в т. $(0,0)$.

Заметим, что условие $(x + s\sqrt{2}\cos\alpha)(y + s\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$ задаёт две части плоскости из четырёх, на которые делит плоскость прямые $x + s\sqrt{2}\cos\alpha = 0$, $y + s\sqrt{2}\sin\alpha = 0$.

Построим. Заметим, что $\sin\alpha, \cos\alpha \in [-1; 1]$, значит каждая из этих двух прямых имеет по две точки пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = 13^2$, т.к. $[-s\sqrt{2}; s\sqrt{2}] \subset [-13; 13]$ и точка их пересечения $(-s\sqrt{2}\cos\alpha, -s\sqrt{2}\sin\alpha)$ лежит внутри окружности, т.к. $50\cos^2\alpha + 50\sin^2\alpha = 50 < 169$.

Построим картинку в координатной плоскости XOY :

Пусть $s\sqrt{2}\cos\alpha = a$, $s\sqrt{2}\sin\alpha = b$.

Рассмотрим прямые $x + a = 0$, $y + b = 0$

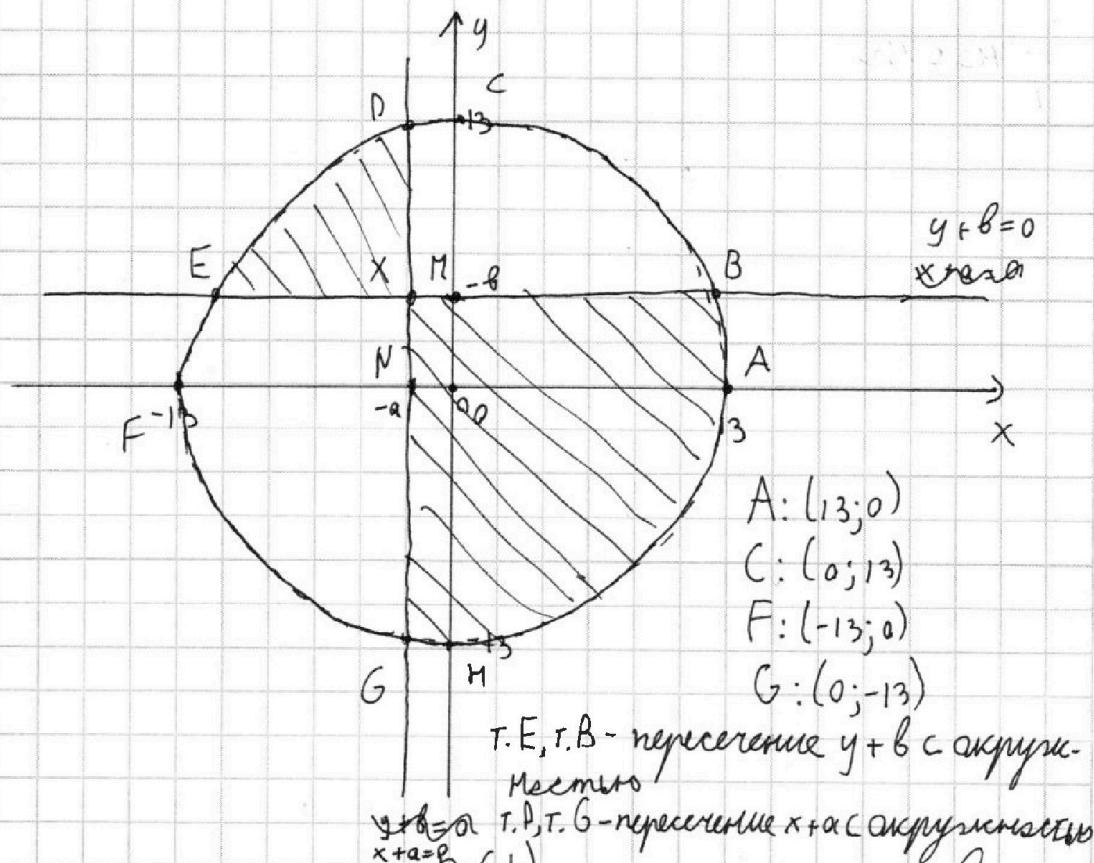


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



A: (13;0)

C: (0;13)

F: (-13;0)

G: (0;-13)

Т.Е, т.В - пересечение $y+b$ с окружностью

Т.Д, т.Г - пересечение $x+a$ с окружностью

Рассмотрим фигуру $\Phi(d)$ при данных a и b и заштрихуем её.

Рассмотрим часть периметра $\Phi(d)$, которая равна сумме двух дуг окружности. (Весь периметр $\Phi(d)$ равен $\widehat{EB} + \widehat{DG} + \widehat{ED} + \widehat{GB}$, а мы рассмотрим только сумму длин дуг $\widehat{ED}$ и $\widehat{GB}$).

Прямая $x+a=0$ параллельна прямой $x=0$, значит длины дуг $\widehat{CD}$ и $\widehat{GH}$ равны.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Прямая $y + v = a$ параллельна прямой $y = 0$, значит длины дуг $\widehat{EF}$ и $\widehat{AB}$ равны.

Заметим, что $O(0;0)$ - центр окружности и $\angle AOC = \angle COF = \angle FOM = \angle MOA = 90^\circ$, значит длины дуг $\widehat{AC} = \widehat{CF} = \widehat{FM} = \widehat{MA} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi \cdot 13}{4} = \pi \cdot \frac{13}{2}$ равны.

$$\widehat{ED} + \widehat{GB} = \widehat{CF} - \widehat{FE} - (\widehat{CD} + \widehat{AM} + \widehat{MG} + \widehat{AB}) = \widehat{CF} + \widehat{AN} = \pi \cdot \frac{13}{2} \cdot 2 = 13\pi.$$

Значит часть периметра $\Phi(d)$ равная сумме длин двух дуг фиксирования $\forall d \in [R]$ и равна 13π . Для того, чтобы найти максимальное значение M нужно максимизировать сумму $EB + DG$.

Отметим точки M и N - пересечения прямой $y + v = a$ с осью координат.

$EM = MB$ по симметрии, т.к. $AF \perp CH$ и $AF \perp CH$ - диаметры $EB \parallel AF$

$ND = GN$ по симметрии, т.к. $AF \perp CH$ - диаметры и $CH \parallel DG$.

$$EB + DG = 2(MB + NG)$$

По т. Пифагора $\triangle OMB$: $MB^2 + OM^2 = OB^2$

$$MB^2 = 13^2 - 8^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По Т. Пифагора в $\triangle NG$: $GN^2 + GN^2 = OG^2$

$$GN^2 = 13^2 - a^2$$

$$EB + DG = 2(\sqrt{13^2 - a^2} + \sqrt{13^2 - b^2}) - \text{нужно максимизировать.}$$

$$\text{Заметим, что } a^2 + b^2 = 5a \sin^2 \angle + 5a \cos^2 \angle = 5a$$

Давайте докажем, что

$$? \sqrt{13^2 - a^2} + \sqrt{13^2 - b^2} \leq \sqrt{13^2 - 5^2} + \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$? 2 \cdot 13^2 - a^2 + 13^2 - b^2 + 2\sqrt{13^2 - a^2} \sqrt{13^2 - b^2} \leq 13^2 - 5^2 + 13^2 - 5^2 + 2\sqrt{13^2 - 5^2} \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$? \sqrt{13^2 - a^2} \sqrt{13^2 - b^2} \leq \sqrt{13^2 - 5^2} \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$? (13^2 - a^2)(13^2 - b^2) \leq (13^2 - 5^2)(13^2 - 5^2)$$

$$? 13^4 - 13^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2 \leq 13^4 - 13^2 \cdot 5a + 5^4$$

$$? a b \leq 5^2$$

По неравенству о средних:

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 5 \Rightarrow ab \leq 25$$

Равенство достигается только при $a = b = 5$ (из неравенства о средних).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, максимальный периметр равен:

$$2(\sqrt{13^2 - 5^2} + \sqrt{13^2 - 5^2}) + 13\pi = 48 + 13\pi = M_{\max}$$

Достигается при $a^2 = b^2 = 25 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$

Значит, $\sin \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ и $\cos \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$, т.к. $\begin{cases} \sin \alpha = \pm \cos \alpha \\ \sin \alpha + \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}: \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}: \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}: \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}: \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $M_{\max} = 48 + 13\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

* При максимизации мы поняли, что сумма длин двух дуг из которых состоит фигура $F(\alpha)$ фиксирована и равна 13π , а при максимизации другой части периметра мы нашли максимум: $2 \cdot (12 + 12) = 48$. Значит, $M_{\max} = 48 + 13\pi$.

Максимизация другой, отличной от дуг, части периметра достигается при $a^2 = b^2 = 25$, т.е. $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, т.к. $(5\sqrt{2} \sin \alpha)^2 = (5\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 25 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

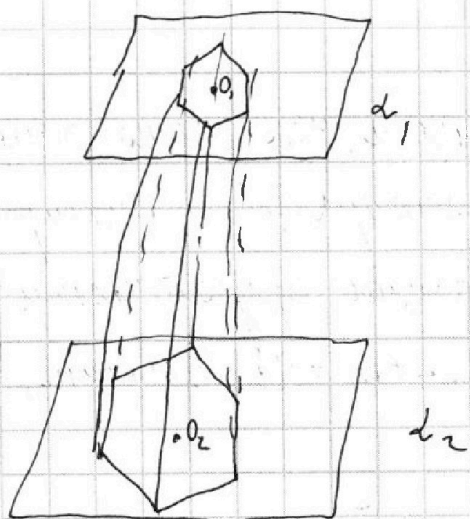
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что для правильной усеченной пирамиды существуют две плоскости, одна касается всех ребер, а другая всех углов.

Значит, плоскость, которой усечена пирамида, параллельна плоскости описывания. Следовательно, в этой плоскости сечение образует правильный n -угольник, если в описывании дан правильный n -угольник.

Рассмотрим центры правильного n -угольников в плоскостях сечений. Заметим, что центры для шаров ω_1 и ω_2 лежат на прямой, соединяющей эти центры.



Обозначим эти центры O_1 и O_2 , а плоскости пирамиды L_1 и L_2 .

$L_1 \parallel L_2$.

$O_1, O_2 \perp L_1, O_1, O_2 \perp L_2$.

Пусть X — центр ω . При этом ребро в плоскости L_1 равно a , а ребро многоугольника в L_2 равно b .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

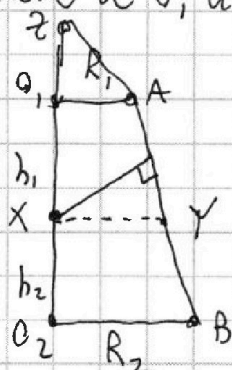
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} O_1 X = h_1, \\ O_2 X = h_2. \end{cases}$$

Рассмотрим сечение через две вершины, соединенные ребром и O_1 и O_2 :



$$T. A \in L_1, T. B \in L_2$$

$$\begin{cases} R_2 > R_1 \end{cases}$$

R_1 - радиус описанной окр. в тетраэдр. в плоскости L_1 , а R_2 - радиус. опис. окр. в тетраэдр. в плоскости L_2 .

$$\text{dist}(X, AB) = \sqrt{h_1^2 + r_1^2} = \sqrt{h_2^2 + r_2^2}, \text{ где } r_1 \text{ и } r_2 - \text{радиусы впис. окр. в тетраэдр. в плоскостях } L_1 \text{ и } L_2.$$

$$O_1 A \parallel O_2 B, O_1 O_2 \perp O_2 B, O_1 A.$$

$$XY \parallel O_1 A, O_2 B$$

$$XXA \cap (O_1 O_2) \cap (AB) = T. Z.$$

$$O_1 A \parallel O_2 B \Rightarrow \triangle ZO_1 A \sim \triangle ZO_2 B$$

$$\frac{ZO_1}{ZO_2} = \frac{ZA}{ZB} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$ZO_1 = \frac{R_1}{R_2} (h_1 + h_2) + \frac{R_1}{R_2} ZO_2 \Rightarrow ZO_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} (h_1 + h_2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ZO_1 = \frac{R_1}{R_2 - R_1} (h_1 + h_2)$$

$$ZX = ZO_1 + O_1X = \frac{R_1}{R_2 - R_1} h_1 + h_1 + \frac{R_1}{R_2 - R_1} h_2 =$$

$$= \frac{R_2}{R_2 - R_1} h_1 + \frac{R_1}{R_2 - R_1} h_2 = \frac{R_2 h_1 + R_1 h_2}{R_2 - R_1}$$

$$XY \parallel O_1A \Rightarrow ZO_1A \sim ZX Y \Rightarrow \frac{O_1A}{XY} = \frac{ZO_1}{ZX}$$

$$\frac{R_1 (h_1 + h_2)}{R_2 h_1 + R_1 h_2} = \frac{R_1}{XY} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XY = \frac{R_2 h_1 + R_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

$$\text{dist}(X, AB) = \frac{XY \cdot ZX}{\sqrt{XY^2 + ZX^2}} = \frac{\frac{C^2}{(h_1 + h_2)(R_2 + R_1)}}{C \sqrt{\frac{1}{(h_1 + h_2)^2} + \frac{1}{(R_2 - R_1)^2}}} = \frac{C}{\sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (h_1 + h_2)^2}} =$$

$$\left[R_2 h_1 + R_1 h_2 = C \right.$$

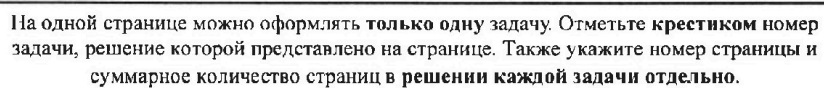
$$= \frac{C}{AB} = \frac{R_2 h_1 + R_1 h_2}{AB} \Rightarrow \text{don} = 2(S_1 + S_2)$$

$$h_1^2 + r_1^2 = h_2^2 + r_2^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b}$$

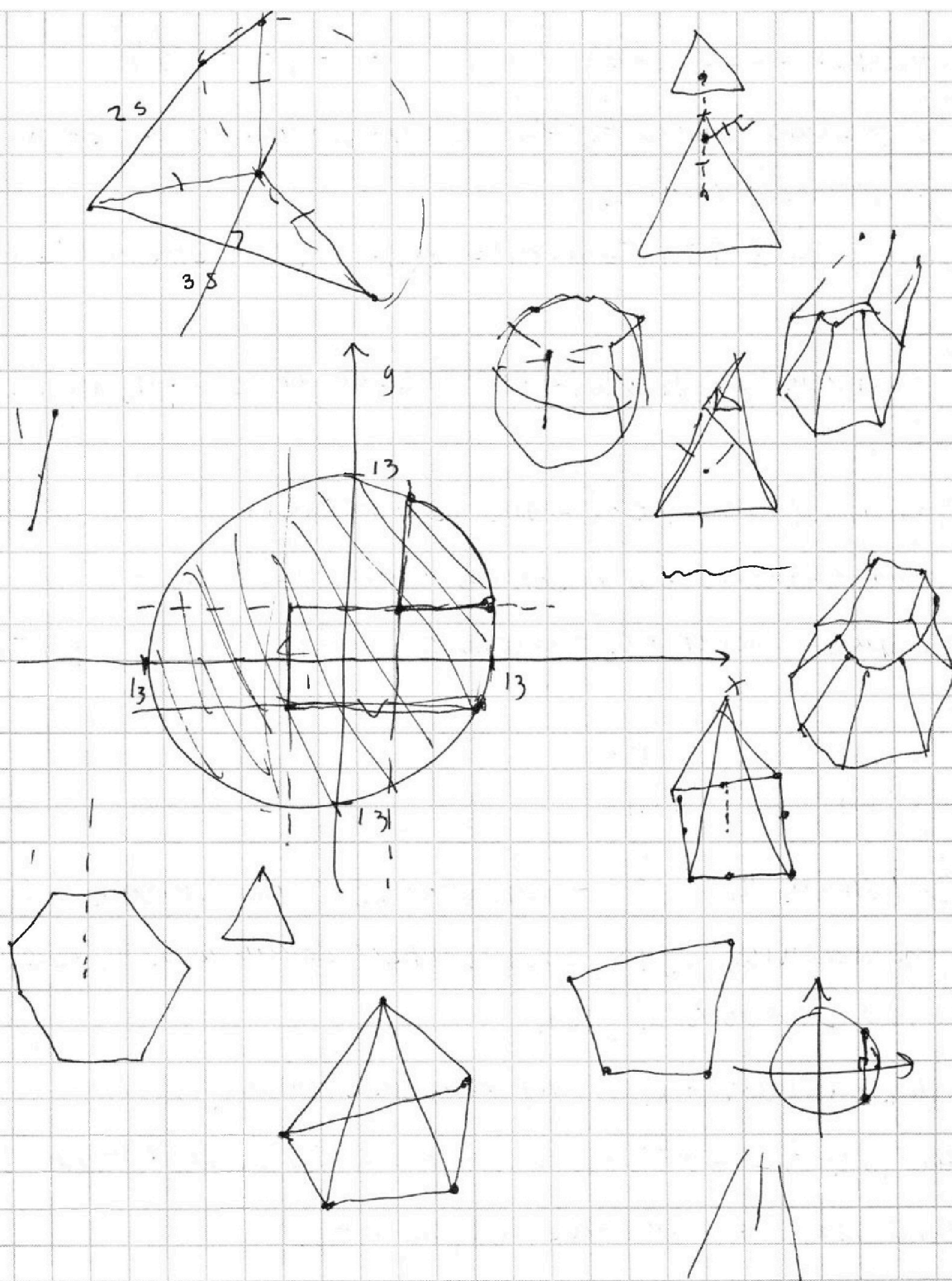
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow R_2 h_1 = R_1 h_2$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



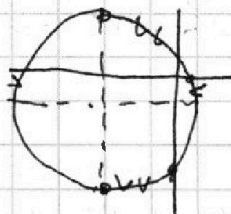
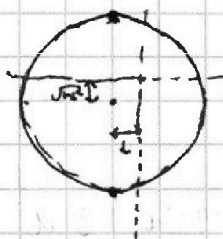


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

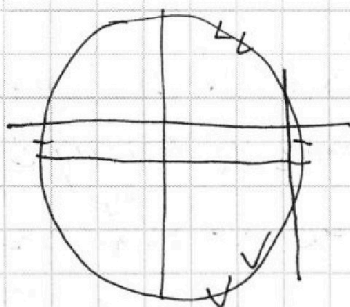
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) две прямые пересекаются
внутри круга

2) плоскости S и R
параллельны.



$$\sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{R^2 + d^2 - 1}$$

$$\sqrt{R^2 - \frac{1}{2}} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}$$

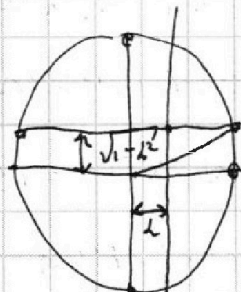
$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$$
$$\sqrt{2x}$$

$$73 \pi +$$

$$13^2 - 5^2$$

$$144$$

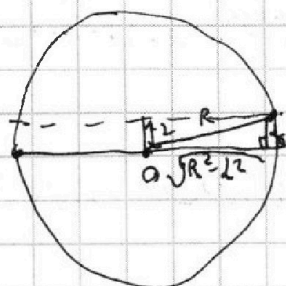
$$12$$

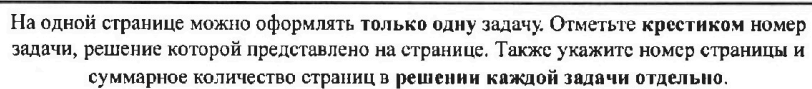


$$2\sqrt{R^2 - d^2} + 2\sqrt{R^2 + d^2 - 1}$$

$$2\sqrt{x} + 2\sqrt{x+a-b}$$

$$27$$



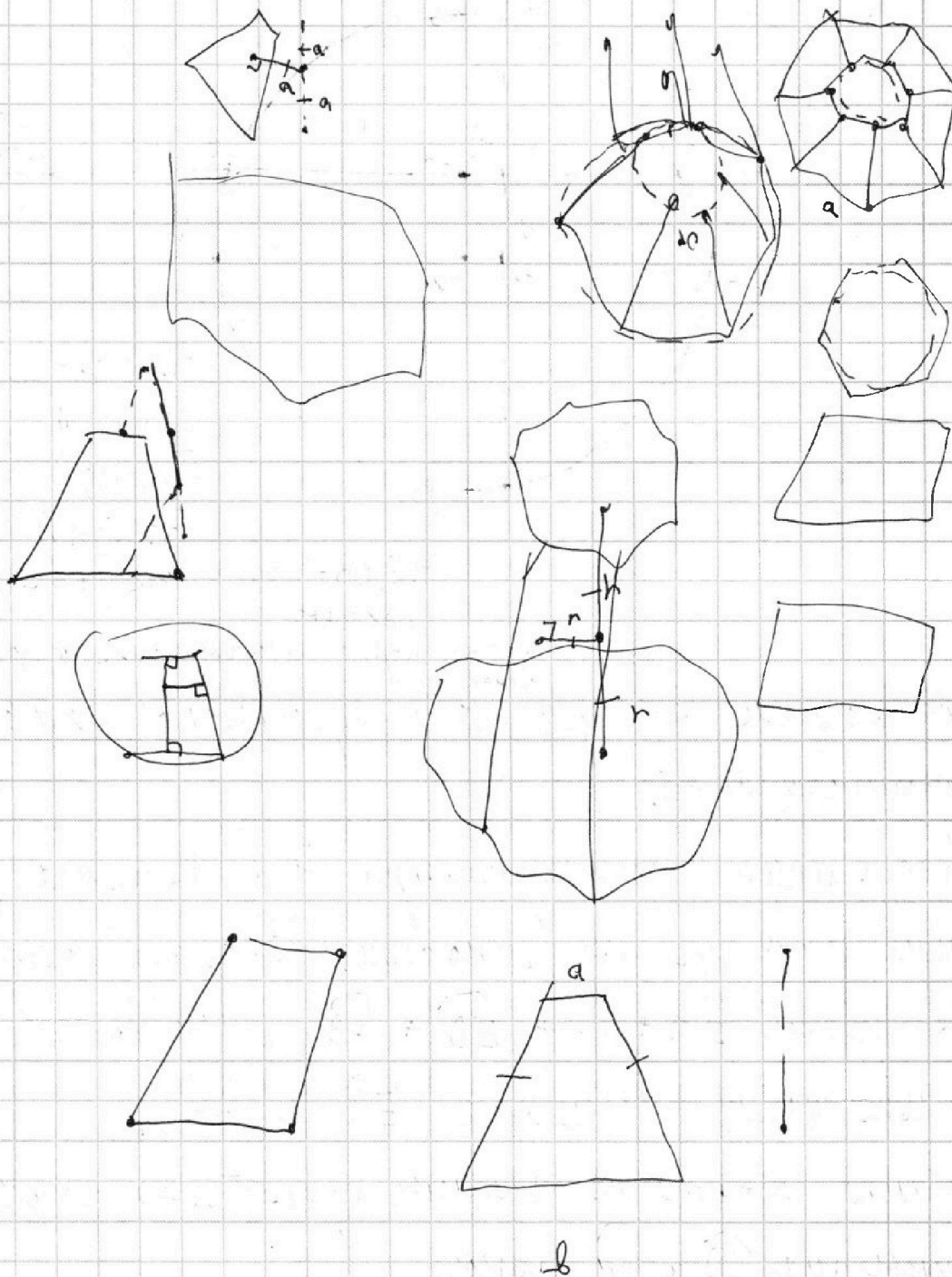


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



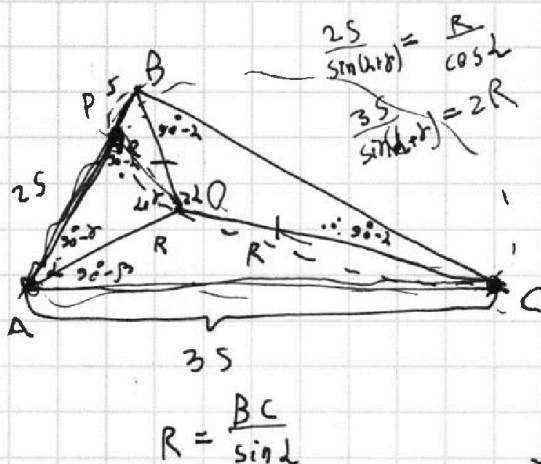


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



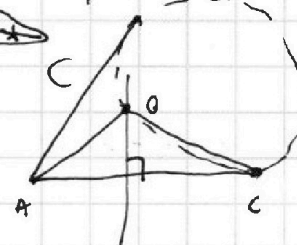
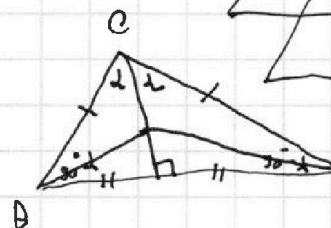
$$\frac{25}{\sin(2+\gamma)} = \frac{R}{\cos 2}$$

$$\frac{35}{\sin(2+\gamma)} = 2R$$

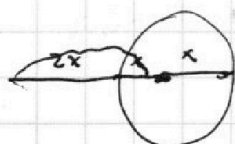
$$\frac{30}{\sin \gamma} = \frac{35}{\sin \beta}$$



$$AP \cdot AB = R^2 - r(BOC)^2$$



$$\frac{25}{\sin(2+\gamma)} = \frac{R}{\cos 2}$$

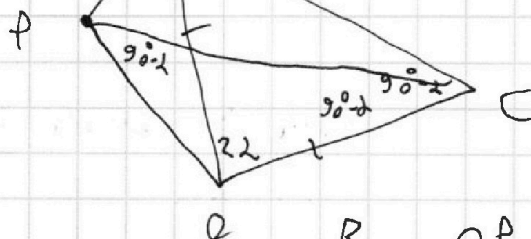


$$\frac{35}{\sin(2+\gamma)} = 2R$$

$$\frac{7}{5} = \frac{2 \cdot \cos 2}{\cos \gamma}$$

$$\cos 2 = \frac{7}{10}$$

$$\sin 2 = \frac{\sqrt{51}}{10}$$



$$2r(BOC) = \frac{R}{\cos 2}$$

$$\frac{R^2 - 225}{\cos^2 2} - R^2 = 25 \cdot 5$$

$$\frac{4R}{\sin 2} = \frac{BC}{\sin 2} = 2R$$

$$\frac{R}{\cos 2} = \frac{OP}{\cos \gamma} \Rightarrow OP = R \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos 2}$$

$$R^2 \left(\frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 2} - 1 \right) = 25 \cdot 5$$

$$\frac{30}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow R = \frac{15}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{15}{R} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{R^2 - 225}}{R}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 задача

$$\frac{\binom{4}{n-2}}{\binom{4}{n}} = 6 \cdot \frac{\binom{6}{n-2}}{\binom{8}{n}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\frac{12 \cdot 6}{9 \cdot 8}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

M-8

$$x^3 + (-y)^3 + (-z)^3 - 6xy = (x-y-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy}$$

$$\sin^2$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi$$

$$x+y=2$$

