



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

I

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$

По условию задачи A - это четырехзначное число, составленное из одинаковых цифр.

Пусть $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$, при этом $1 \leq a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$.

Заметим, что 11 и 101 - простые числа и $a \nmid 11$, $a \nmid 101$, т.к. $a \leq 9$.

Заметим, что A·B·C - это четвёртый квадрат натурального числа, значит все простые числа входят в A·B·C в чётных степенях, значит т.к. $A \nmid 101$, $A \nmid 11$ и $A \nmid 101^2 \wedge A \nmid 11^2$, то

$$\begin{cases} B \nmid 101 \\ C \nmid 101 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} B \nmid 11 \\ C \nmid 11 \end{cases}$$

Заметим, что B (двухзначное число, значит $C < 100$, следовательно $C \nmid 101$, т.к. 101 - простое число, квадрат делится на 100). Значит $B \nmid 101$.

Следовательно, т.к. B - трехзначное число, квадрат делится на 100: $B = 100b$, где $1 \leq b \leq 9$ и $b \in \mathbb{N}$. Так в числе B есть хотя бы одна цифра 6, то $b = 6$.

$B = 606$, заметим, что $B \nmid 11$, значит $C \nmid 11$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Следовательно, т.к. C - двухзначное число, которое делится на 11: $C = \overline{cc}$, где $1 \leq c \leq 9$ и $c \in \mathbb{N}$, т.к. в числе C есть хотя бы одна цифра 3, то $c = 3$.
 $C = 33$.

$a \cdot 1111 \cdot 606 \cdot 33 = n^2$, т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат некоторого натурального числа, где $n \in \mathbb{N}$.

$$a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 3 = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$2 \cdot a = m^2, m \in \mathbb{N}$$

Значим, что $1 \leq a \leq 9$ натуральное, неотрицательное значение a :

$$a=1: 2 \cdot 1 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a=2: 2 \cdot 2 = 2^2 \oplus$$

$$a=3: 2 \cdot 3 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a=4: 2 \cdot 4 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a=5: 2 \cdot 5 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a=6: 2 \cdot 6 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a=7: 2 \cdot 7 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

$$a=8: 2 \cdot 8 = 4^2$$

$$a=9: 2 \cdot 9 \neq m^2, m \in \mathbb{N}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит подходит число $A = 2222$ и $A = 8888$.

Решение: $(2222; 606; 33)$

$(8888; 606; 33)$

Проверим деление тройки натуральных чисел (A, B, C) :

Условием при котором они удовлетворяют

$$2222 \cdot 606 \cdot 33 = 2 \cdot 1111 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = \\ = (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

$$8888 \cdot 606 \cdot 33 = 8 \cdot 1111 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = \\ = (4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $M = 8$.

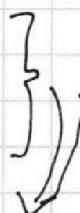
$x, y > 0$:

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

Значение выражения K не изменяется, если x уменьшить на 2, а y увеличить на 2:

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{(x-2)+(y+2)+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy+2x-2y-4}$$



По условию $x, y > 0 : x+y+5 > 0$

$$xy+2x-2y-4 = xy$$

$$2x-2y-4 = 0$$

$$x-y-2 = 0$$

Давайте найдём все возможные значения выражения M при таких условиях:

Известная формула: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ — проверяется раскрытием скобок.

$$x^3 + (-y)^3 + (-z)^3 - 3x(-y)(-z) = (x-y-z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$x^3 - y^3 - z^3 - 6xyz = (x-y-z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

Мы получили, что $x-y-z=0$, значит:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отмейте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 6xy - 8 = 0$$

↓

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = 8$$

Ответ: M = 8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: а) $\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

↓ 32

$$\alpha) (\sin(\pi x) + \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin^2(\pi x) + \sin(\pi y) \sin(\pi x) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x) = \sin(\pi y) \sin(\pi x) + \cos(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(x-y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi(x-y))$$

↓

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x-y) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -2\pi x = \pi(x-y) + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x-y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -2x = x-y + 2h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Решение: $\begin{cases} x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x+y=2h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) (x, y): x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi$$

По определению арккосинуса $\arcsin(x)$:

$$\frac{x}{6} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-6; 6]$$

$$\frac{y}{2} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-2; 2]$$

Заметим, что $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда заметим, что

$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

Равенство достигается только при $\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

т.е. при $x=6, y=2$.

Значит, нам подходит все пары $x \in [-6; 6], y \in [-2; 2]; x, y \in \mathbb{Z}$, кроме пары $(6; 2)$ под данное неравенство.

Рассмотрим произвольную пару (x_1, y_1) , которая удовлетворяет неравенству $(x_1, y_1 \in \mathbb{Z})$:

Заметим, что эта пара ~~удовлетворяет~~ удовлетворяет уравнению, т.е.:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 2 \\ -3x_1 - y_1 = 2 \end{cases} \text{ тогда } \text{доказем } \text{что } \begin{cases} x_1 + y_1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x_1 - y_1 = 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ т.к. } x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$$

~~Предположим~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте рассмотрим, когда пара (x_1, y_1) будет удовлетворять уравнению:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -3x_1 + y_1 = 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 : 2 \\ -3x_1 + y_1 : 2 \end{cases}$$

Заметим, что x_1, y_1 - должны быть одинаковой четности, т.к.

$-3x_1 + y_1 \equiv x_1 + y_1$, т.е. предполагается, что $x_1 + y_1 : 2$ - такое выполнение только для x_1, y_1 одинаковой четности.

Подсчитаем число вариантов x -чет, y -чет:

$$x = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\} - 7 \text{ вариантов}$$

$$y = \{-2, 0, 2\} - 3 \text{ варианта}$$

Всесообщество вариантов: $7 \cdot 3 - 1 = 20$, т.к. пара $(6; 2)$ - не подх.

Подсчитаем число вариантов x -неч, y -неч:

$$x = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\} - 6 \text{ вариантов}$$

$$y = \{-1, 1\} - 2 \text{ варианта}$$

Всесообщество вариантов: $6 \cdot 2 = 12$

Итого общее число вариантов: $20 + 12 = 32$

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: в конце месяца было выделено 4 билетов на концерт.

Пусть количество единнадцатилетников равно $n \in \mathbb{N}$. В начале месяца было выделено 4 билета на продолжительный концерт, найдём вероятность Тиме и Васе вместе попасть на концерт.

Всего вариантов распределить 4 билета на n человек: C_n^4

Вариант распределить 4 билета на n человек, чтобы и Тиме, и Васе досталось один: C_{n-2}^2 , т.к. два билета из четырех нужно сразу отдать Тиме и Васе, и остается распределить 2 билета на $n-2$ человек.

$$P_{\text{кон.}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Пусть в конце месяца оказалось, что будет выделено m билетов на концерт, где $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$.

Найдём вероятность Тиме и Васе вместе пойти на концерт.

Всего вариантов распределить m билетов на n человек: C_n^m

Вариант распределить m билетов на n человек, чтобы и Тиме, и Васе досталось один: C_{n-2}^{m-2} , т.к. два билета из m нужно сразу отдать Тиме и Васе, и остаётся распределить $m-2$ билетов на $n-2$ человек.

$$P_{\text{кон.}} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-m)!(m-2)!}}{\frac{n!}{(n-m)!m!}} = \frac{(n-2)!m!}{n!(m-2)!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию задачи вероятность или вместе попасть на компьютер в начале месяца дома в 6 раз меньше, чем в конце месяца:

$$6 P_{\text{нач}} = P_{\text{кон}}$$

$$\frac{12 \cdot 6}{n(n-1)} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \quad | n \geq 2, \text{т.к. } P_{\text{нач}} \text{ и } P_{\text{кон}} \text{ - доли натуральных чисел.}$$

$$72 = m(m-1)$$

$$m^2 - m - 72 = 0$$

$$(m-9)(m+8) = 0$$

↓

$$\begin{cases} m=9 \\ m=-8 \text{ - не подх., т.к. количество минут натуральное число.} \end{cases}$$

Ответ: в конце месяца было выделено 9 минут на компьютер.



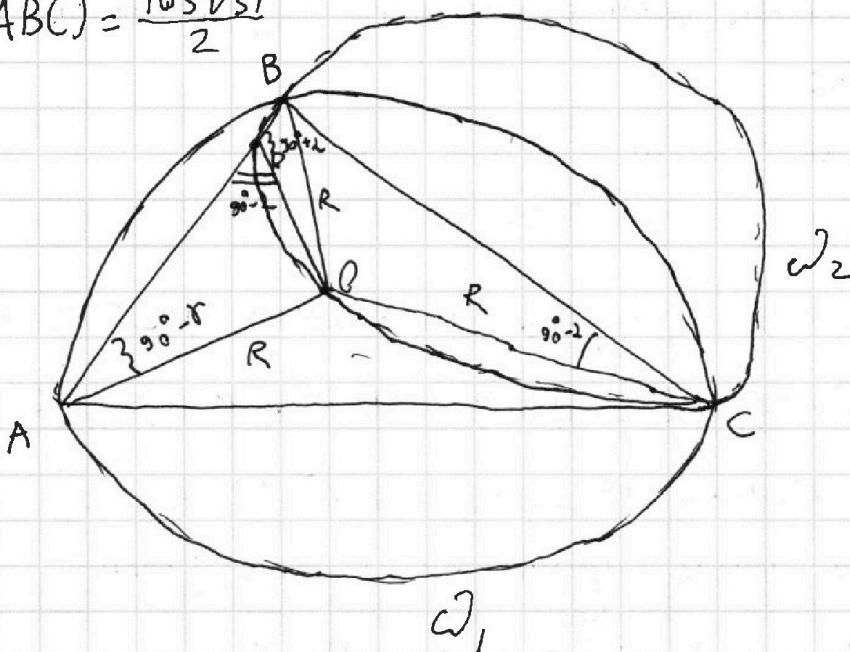
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Ответ: } S(\triangle ABC) = \frac{10S\sqrt{51}}{2}$$



По условию: $AP = 2S$, $BP = S$, $PC = 3S$.

Несчитаем степень т. А относительно окружности ω_2 :

~~$$\deg_{\omega_2}(A) = AP \cdot AB = 2S \cdot 3S = 7S^2$$~~

~~$$AB = AP + BP = 2S + S = 3S$$~~

По определению степени точки:

~~$$\deg_{\omega_2}(A) = AO^2$$~~

~~$$\text{Выводим } AB = AP + BP = 2S + S = 3S.$$~~

Пусть радиус описанной окружности $\triangle ABC$ равен R , тогда $AO = BO = CO = R$.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle OCB = 90^\circ - \angle BAC (= 90^\circ - \alpha)$$

По условию: ВРОС - внс, значит $\angle BPO + \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow \angle BPO = 90^\circ + \gamma$.

$$\angle OPB + \angle APO = 180^\circ \text{ (стременные углы)} \quad \boxed{\boxed{\quad}}$$

$$\angle APO = 90^\circ - \beta$$

$$\angle BAO = 90^\circ - \angle BCA = 90^\circ - \gamma \Rightarrow \angle PAO = 90^\circ - \gamma$$

$$\angle AOP + \angle OPA + \angle PAO = 180^\circ \text{ (сумма углов } \triangle APO)$$

$$90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma + \angle AOP = 180^\circ$$

$$\angle AOP = \beta + \gamma \quad \stackrel{!!}{\boxed{\boxed{\quad}}}$$

Т. Синусов $\triangle APO$:

$$\frac{AO}{\sin \angle APO} = \frac{AP}{\sin \angle POA}$$

$$\frac{R}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{2S}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Т. Синусов $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$$

$$\frac{2S}{\sin \beta} = 2R$$

I-

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (сумма углов } \triangle ABC)$$

||

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

||

$$\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma)$$

$$\frac{3S}{\sin(\alpha + \gamma)} = 2R$$

$$\left(\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{2S}{\sin(\alpha + \gamma)} \right)$$

$$\frac{3S}{2S} = 2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{10}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{49}{100} = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10} \quad \text{triangle } ABC \text{ - остроугольный} \quad \alpha < 90^\circ$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{30 \cdot 3S \cdot \frac{\sqrt{51}}{10}}{2} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S(ABC) = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

I



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $13\pi + 48 = M_{\max}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\vartheta)(y + 5\sqrt{2}\sin\vartheta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 \end{cases} .$$

$x^2 + y^2 \leq 13^2$ - уравнение круга радиуса 13 и с центром в т. $(0,0)$.

Заметим, что условие $(x + 5\sqrt{2}\cos\vartheta)(y + 5\sqrt{2}\sin\vartheta) \leq 0$ задаёт две части плоскости из четырёх, на которых лежат прямые $x + 5\sqrt{2}\cos\vartheta = 0$, $y + 5\sqrt{2}\sin\vartheta = 0$.

Построим. Заметим, что $\sin\vartheta, \cos\vartheta \in [-1; 1]$, значит каждая из этих двух прямых имеет no где точки пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = 13^2$, т.к. $[-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}] \subset [-13; 13]$ и точка их пересечения $(-5\sqrt{2}\cos\vartheta, -5\sqrt{2}\sin\vartheta)$ лежит внутри окружности, т.к. $5\cos^2\vartheta + 5\sin^2\vartheta = 5 < 16$.

Построим картинку в координатной плоскости XOY :

Пусть $5\sqrt{2}\cos\vartheta = a$, $5\sqrt{2}\sin\vartheta = b$.

Последовательно прямые $x + a = 0$, $y + b = 0$

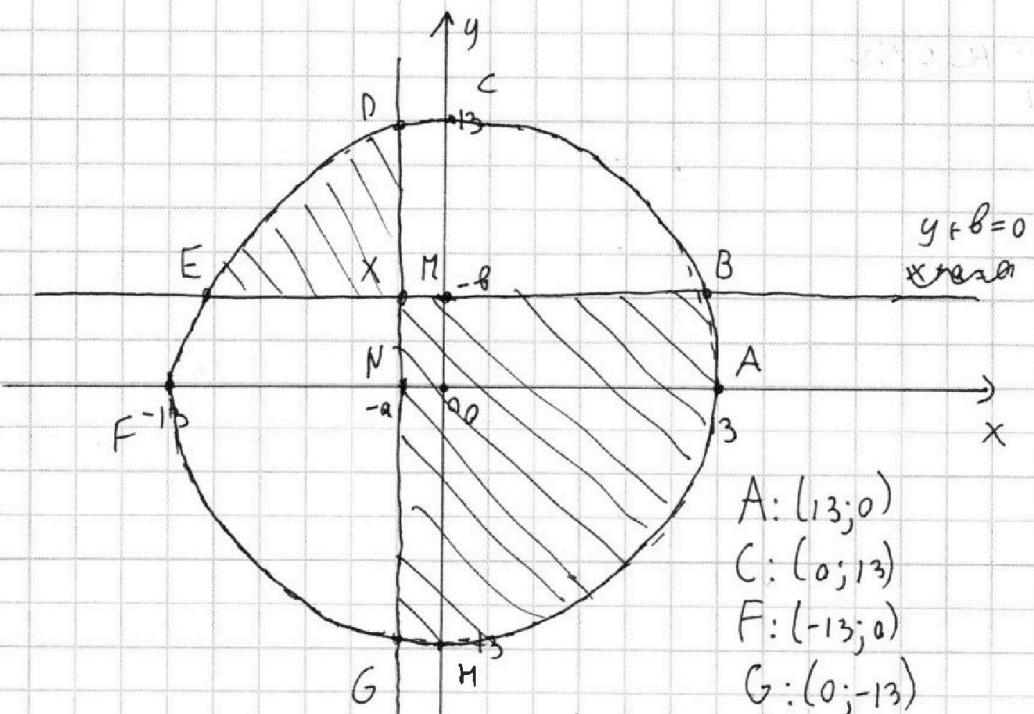


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



T.E, T.B - пересечение $y+b$ с окружностью

T.D, T.G - пересечение $x+a$ с окружностью

Рассмотрим фигуру $\Phi(d)$ при данных a и b и заштрихуем её.

Рассмотрим часть периметра $\Phi(d)$, которая равна сумме дуг $EB + DG + \widehat{ED} + \widehat{GB}$, а мы рассмотрим, только сумму длии дуг \widehat{ED} и \widehat{GB} .

Прямая $x+a=0$ параллельна прямой $x=0$, значит длины дуг \widehat{CD} и \widehat{GH} равны.

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Причина $y+b=a$ параллельна прямой $y=0$, значит длины дуг \widehat{EF} и \widehat{AB} равны.

Заметим, что O -центр окружности и $\angle AOC = \angle COF = \angle FOM = \angle MOA = 90^\circ$, значит длины дуг

$$\widehat{AC} = \widehat{CF} = \widehat{FH} = \widehat{MA} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi \cdot 13}{4} = \pi \cdot \frac{13}{2} \text{ равны.}$$

$$\begin{aligned} \widehat{ED} + \widehat{GB} &= \widehat{CF} - \widehat{FE} - \widehat{CD} + \widehat{AM} + \widehat{HG} + \widehat{AB} = \widehat{CF} + \widehat{AH} - \\ &= \pi \cdot \frac{13}{2} \cdot 2 = 13\pi. \end{aligned}$$

Значит часть периметра $\Phi(d)$ равна сумме длини дуг с центром M для $d \in [R]$ и равна 13π . Для

меньшего радиуса найти максимальное значение M можно максимизировать сумму $EB + DG$.

Заметим, что точки M и N -пересечение прямых $y+b=a$ и $x+a=0$ с осью координат.

$AF \perp CH$ и $AFL \perp CH$

$EM = MB$ по симметрии, т.к. CH -диаметр и $EB \parallel AF$

$ND = GN$ по симметрии, т.к. AF, CH -диаметры и $CH \parallel DG$.

$$EB + DG = 2(MB + NG)$$

По Т. Пифагора $\triangle OMB$: $MB^2 + OM^2 = OB^2$

$$MB^2 = 13^2 - 8^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ Т. Гибернера о $\triangle NGN$: $GN^2 + GN^2 = OG^2$

$$GN^2 = 13^2 - a^2$$

$E\beta + DG = 2(\sqrt{13^2 - a^2} + \sqrt{13^2 - b^2})$ - нужно максимизировать.

Заметим, что $a^2 + b^2 = 50 \sin^2 L + 50 \cos^2 L = 50$

Докажем, что

$$\sqrt{13^2 - a^2} + \sqrt{13^2 - b^2} \leq \sqrt{13^2 - s^2} + \sqrt{13^2 - s^2}$$

$$\sqrt{13^2 - a^2} + \sqrt{13^2 - b^2} + \sqrt{13^2 - a^2} \sqrt{13^2 - b^2} \leq 13^2 - s^2 + 13^2 - s^2 +$$

$$+ 2\sqrt{13^2 - s^2} \sqrt{13^2 - s^2}$$

$$\sqrt{13^2 - a^2} \sqrt{13^2 - b^2} \leq \sqrt{13^2 - s^2} \sqrt{13^2 - s^2}$$

$$(13^2 - a^2)(13^2 - b^2) \leq (13^2 - s^2)(13^2 - s^2)$$

$$13^4 - 13^2(a^2 + b^2) + a^2b^2 \leq 13^4 - 13^2 \cdot 50 + s^4$$

$$ab \leq s^2$$

№ Т. неравенству о средних:

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 5 \Rightarrow ab \leq 25$$

Равенство доказывается только при $|a|=|b|=s$ (из неравенства о средних).

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, максимальный периметр равен*: *

$$2(\sqrt{13^2 - 5^2} + \sqrt{13^2 - 5^2}) + 13\pi = 48 + 13\pi = M_{\max}$$

Достигается при $a^2 = b^2 = 25 \Rightarrow \sin^2 d = \cos^2 d = \frac{1}{2}$

Значит, $\sin d = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ и $\cos d = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Следовательно, $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{т.к. } \sin d = \cos d$

$$\sin d = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos d = \frac{\sqrt{2}}{2} : d = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin d = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos d = -\frac{\sqrt{2}}{2} : d = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin d = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos d = -\frac{\sqrt{2}}{2} : d = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin d = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos d = \frac{\sqrt{2}}{2} : d = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ d &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $M_{\max} = 48 + 13\pi$

$$d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

* При максимизации 1-й переменной, что сумма длин двух дуг из которых состоит фигура $\Phi(d)$ фиксируется и равна 13π , а при максимизации другой части периметра эта часть максимум: $2 \cdot (12 + 12) = 48$. Значит, $M_{\max} = 48 + 13\pi$.

Максимизация другой, отличной от дуг, части периметра достигается при $a^2 = b^2 = s^2$, т.е. $\sin^2 d = \cos^2 d$, т.к. $(5\sqrt{2} \sin d)^2 = (5\sqrt{2} \cos d)^2 = 25s^2 \Rightarrow \sin^2 d = \cos^2 d = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

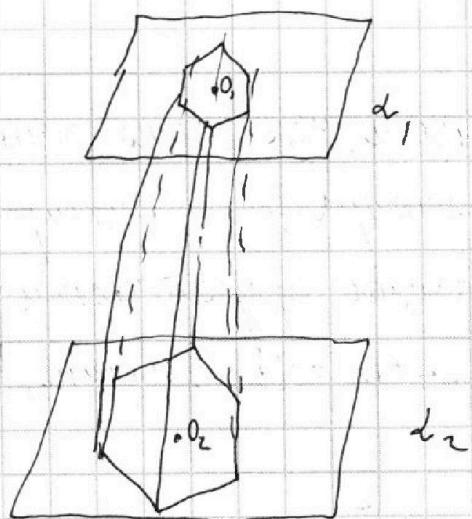
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что для правильной усеченной пирамиды существует одна плоскость сечения, которая касается всех ребер, а другой всех граний.

Значит, плоскость, которой усечена пирамида, параллельна плоскости основания. Следовательно, в этой плоскости сечения образуются правильный n -угольник, если в основании был правильный n -угольник.

Рассмотрим центр правильных n -угольников в плоскостях сечений. Заметим, что центры двух шаров Ω_1 и Ω_2 лежат на прямой, сединяющей эти центры.



Докажем эти центры O_1 и O_2 , в плоскости пирамиды d_1 и d_2 .

$$L \parallel d_2.$$

$$\Omega_1, \Omega_2 \perp L, \Omega_1 \Omega_2 \parallel L.$$

Пусть X - центр Ω . При этом ребро в плоскости L , равно a , а ребро между сечениями в L_2 равно b .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



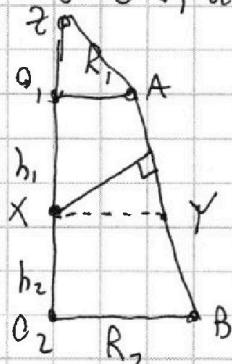
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\exists O_1 X = h_1, O_2 X = h_2.$$

Рассмотрим сечение через две вершины, сединенные радиусами O_1 и O_2 :



$$T.A \in d_1, T.B \in d_2$$

$$\exists R_2 > R_1$$

R_1 - радиус отсеченной окр. в масштабе d_1 , а R_2 - радиус. отсек. окр. в масштабе d_2 .

$\text{dist}(X, AB) = \sqrt{h_1^2 + r_1^2} = \sqrt{h_2^2 + r_2^2}$, где r_1 и r_2 - радиусы вписан. окр. в масштабах масштабов d_1 и d_2 .

$$O_1 A \parallel O_2 B, O_1 O_2 \perp O_2 B, O_1 A.$$

$$XY \parallel O_1 A, O_2 B$$

~~$$XX(A) \exists (O_1 O_2) \cap (AB) = T.Z.$$~~

$$O_1 A \parallel O_2 B \Rightarrow \underset{\parallel}{\angle O_1 A} \approx \underset{\parallel}{\angle O_2 B}$$

$$\frac{\angle O_1}{\angle O_2} = \frac{\angle A}{\angle B} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\angle O_1 = \frac{R_1}{R_2} (h_1 + h_2) + \frac{R_1}{R_2} \angle O_1 \Rightarrow \angle O_1 \Leftrightarrow \frac{R_2 - R_1}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} (h_1 + h_2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$Z_0 = \frac{R_1}{R_2 - R_1} (h_1 + h_2)$$

$$ZX = Z_0 + 0, X = \frac{R_1}{R_2 - R_1} h_1 + h_1 + \frac{R_1}{R_2 - R_1} h_2 =$$

$$= \frac{R_2}{R_2 - R_1} h_1 + \frac{R_1}{R_2 - R_1} h_2 = \frac{R_2 h_1 + R_1 h_2}{R_2 - R_1}$$

$$XY || 0, A \Rightarrow Z_0, A \approx ZX \Rightarrow \frac{0, A}{XY} = \frac{Z_0}{ZX}$$

$$\frac{R_1 (h_1 + h_2)}{R_2 h_1 + R_1 h_2} = \frac{R_1}{XY} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XY = \frac{R_2 h_1 + R_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

$$dist(X, AB) = \frac{XY \cdot ZX}{\sqrt{XY^2 + ZX^2}} = \frac{\frac{c^2}{(h_1 + h_2)(R_2 + R_1)}}{c \sqrt{\frac{1}{(h_1 + h_2)^2} + \frac{1}{(R_2 - R_1)^2}}} = \frac{c}{\sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (h_1 + h_2)^2}} =$$

$$\Rightarrow R_2 h_1 + R_1 h_2 = c$$

$$= \frac{c}{AB} = \frac{R_2 h_1 + R_1 h_2}{AB} \Rightarrow \text{если } \cancel{c} = 2(S_1 + S_2)$$

$$h_1^2 + r_1^2 = h_2^2 + r_2^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow R_2 h_1 = R_1 h_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

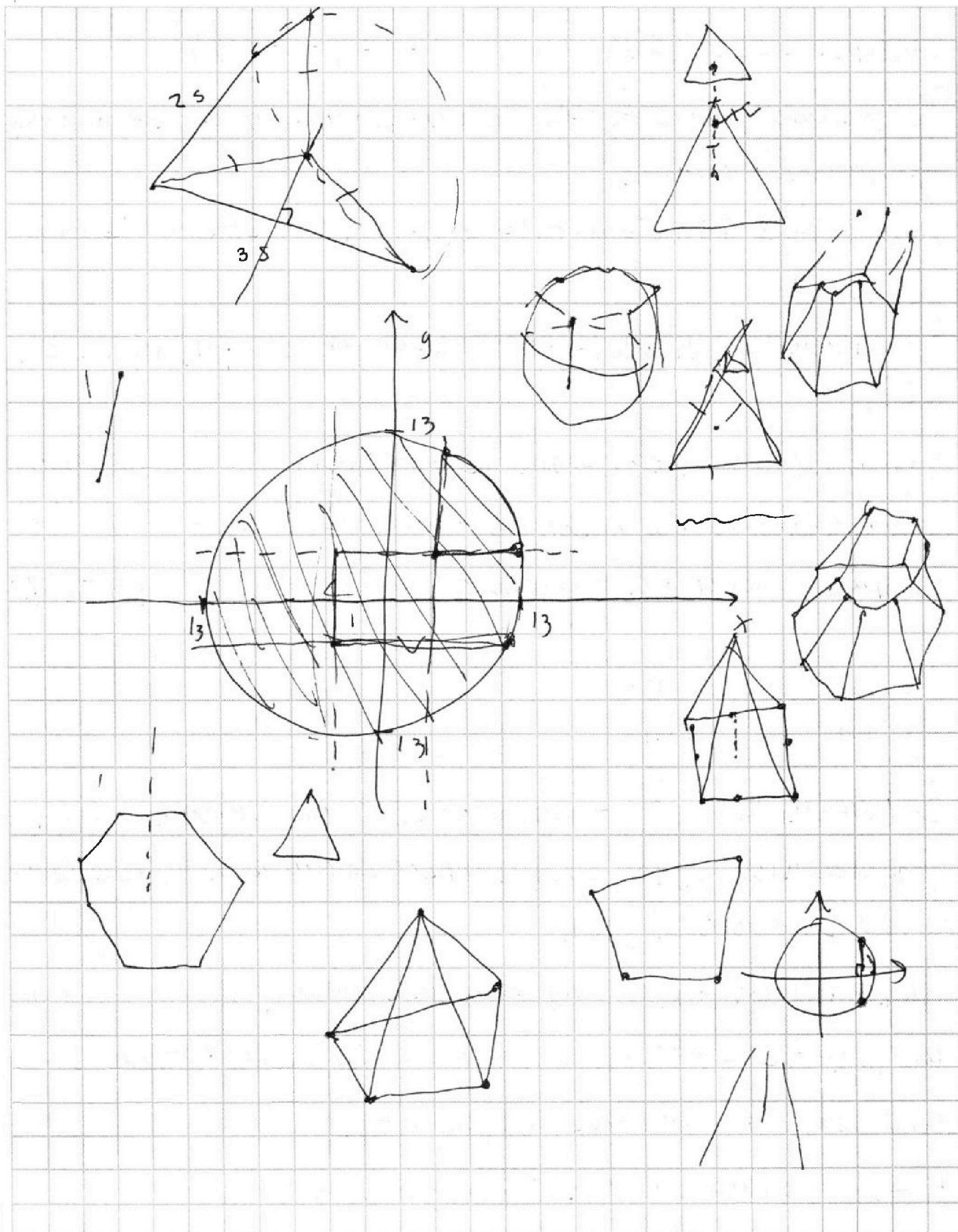
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



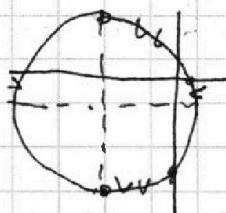
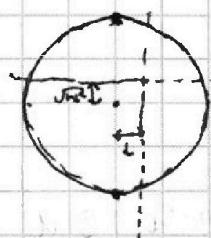


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

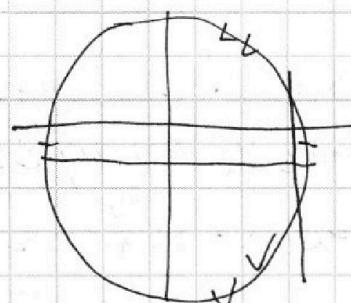
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



① две прямые переск.
внутри круга
② плавких баров
такж.



$$\sqrt{R^2 - l^2} + \sqrt{R^2 + l^2}$$

$$\sqrt{R^2 - \frac{l}{2}^2} + \sqrt{R^2 - \frac{l}{2}^2}$$

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}$$

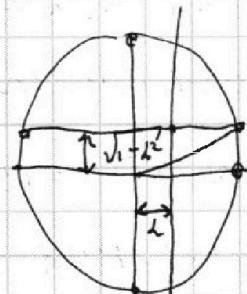
||
 $2\sqrt{x}$

$$73\pi +$$

$$13^2 - 5^2$$

144

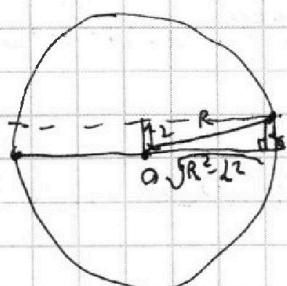
$$12$$



$$2\sqrt{R^2 - l^2} + 2\sqrt{R^2 + l^2}$$

$$2\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x+2x^2}$$

$$2^2$$



$$O \sqrt{R^2 - l^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

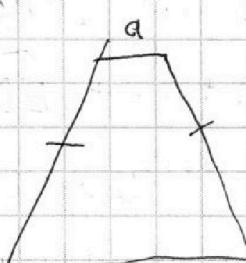
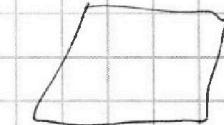
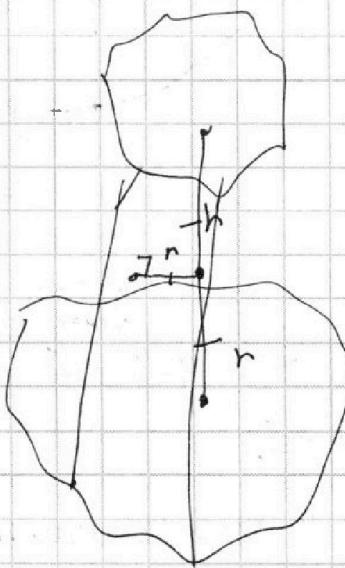
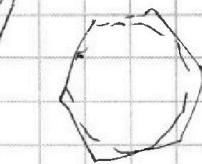
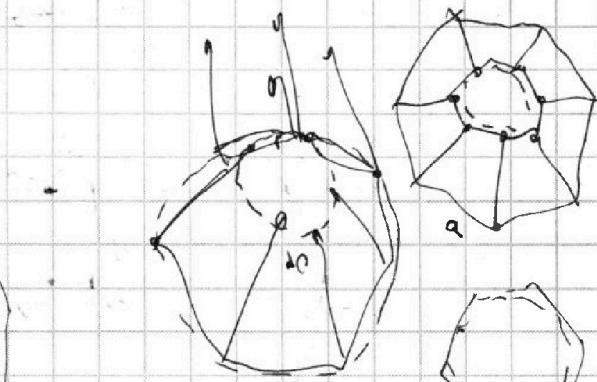
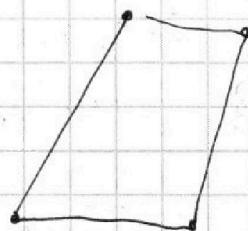
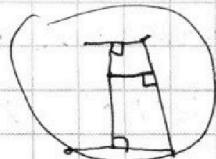
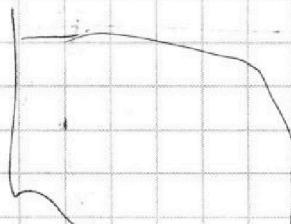
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

—ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чернівці



1

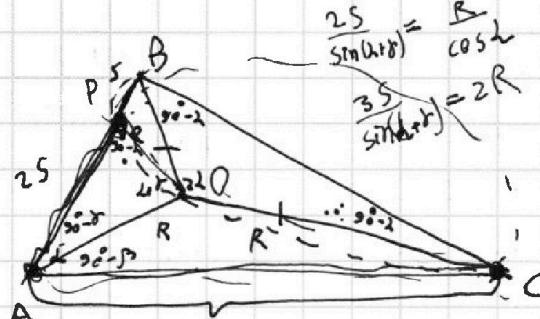


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2S}{\sin(\lambda+\gamma)} = \frac{BC}{\cos\lambda}$$

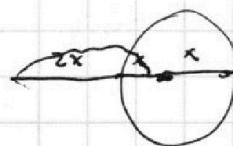
$$\frac{3S}{\sin(\lambda+\beta)} = 2R$$

$$\frac{3O}{\sin\gamma} = \frac{3S}{\sin\beta}$$

$$R = \frac{BC}{\sin\lambda}$$

$$AP \cdot AB = 2\alpha^2 R^2 - r(BOC)^2$$

$$\frac{2S}{\sin(\lambda+\gamma)} = \frac{R}{\cos\lambda}$$



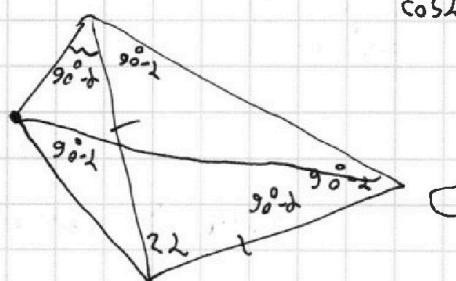
$$2R = \frac{BC}{\sin(2\lambda)}$$

$$\frac{3S}{\sin(\lambda+\beta)} = 2R$$

$$\frac{2S}{\sin(\lambda+\beta)} = \frac{2 \cdot \cos\lambda}{\cos\lambda}$$

$$\cos\lambda = \frac{3}{10}$$

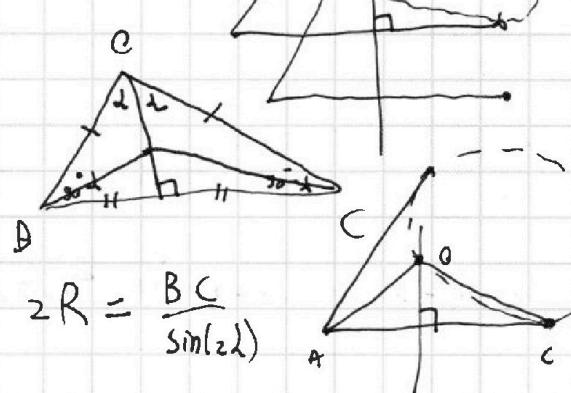
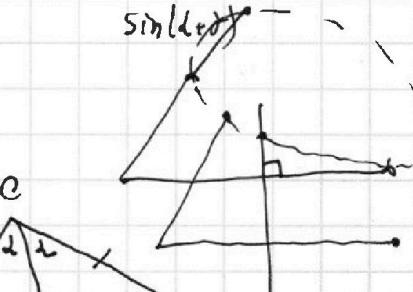
$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{51}}{10}$$



$$R = \frac{OP}{\cosh\lambda} \Rightarrow OP = R \cdot \frac{\cosh\lambda}{\cos\lambda}$$

$$R^2 \left(\frac{\cosh^2\lambda}{\cos^2\lambda} - 1 \right) = 2S \cdot S$$

$$\frac{3O}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow R = \frac{15}{\sin\gamma} \quad \sin\gamma = \frac{15}{R} \Rightarrow \cosh\lambda = \frac{R^2 - 2S}{R^2}$$



$$\boxed{R^2 = 22S \over \cos^2\lambda - R^2 = 2S \cdot S}$$

$$2R = BC \frac{BC}{\sin\lambda} = 2R$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ч 1

$$\binom{9}{n}$$

$$\frac{\binom{9}{n-2}}{\binom{9}{n}} = 6 \cdot \frac{\binom{6}{n-2}}{\binom{8}{n}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$12 \cdot 6$$

$$9 \quad 8$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

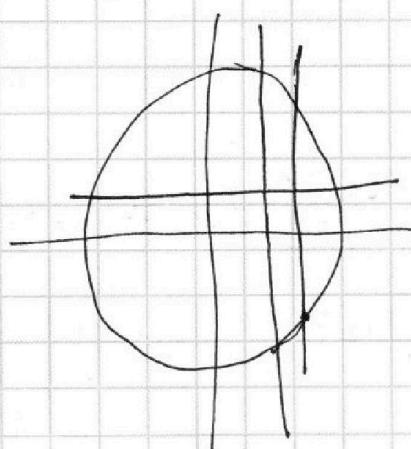
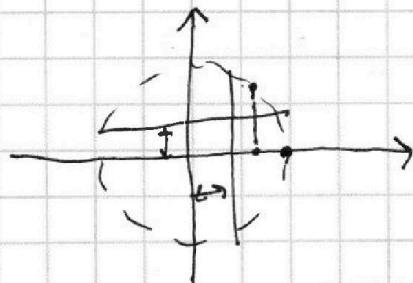
Ч 2

$$x^3 + (-y)^3 + (-z)^3 - 6xy = (x-y-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy}$$

$$\sin^2$$



$$\arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi$$

$$x+y=2$$

