



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть $A = \overline{aaaa}$ (a - цифра) ~~$0 < a < 10$, не~~

Пусть $n^2 = A \cdot B \cdot C \Leftrightarrow n^2 = \overline{aaaa} \cdot B \cdot C$
(из условия)
($n \in \mathbb{N}$)

$$\overline{aaaa} = a \cdot 1000 + a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

101 — простое 3-х-значное число. Если $n^2 : 101$, то

$n : 101$, значит, $n^2 : 101^2$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$).
(т.к. 101 — простое)

$$n^2 = \underbrace{a}_{:101} \cdot \underbrace{11}_{:101} \cdot \underbrace{101}_{:101} \cdot B \cdot C$$

$\rightarrow (a < 101, a < 10) : 101$ (т.к. C — двухзначное, $C < 101$)

Значит, $B : 101$. Числа, являющиеся 3-х-значными,

делящиеся на 101 — $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$.

Единственное из них, содержащее цифру 7 —

707 . Значит, $B = 707 = 7 \cdot 101$
простое простое

$$n^2 = \underbrace{a}_{:11} \cdot \underbrace{11}_{:11} \cdot \underbrace{101}_{:11} \cdot \underbrace{7}_{:11} \cdot \underbrace{101}_{:11} \cdot C$$

$\rightarrow (a < 11, a < 10) : 11$ (т.к. 11 — простое), тогда $n^2 : 11^2$

Значит, $C : 11$. 2-х-значное число, которое делится

на 11 — $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. Единственное

число, содержащее 1 — 11 . Значит, $C = 11$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n^2 = a \cdot \underbrace{10}_{\div 7^2}^2 \cdot \underbrace{11}_{\div 7}^2 \cdot 7$
7 — простое, тогда если $n^2 \div 7$, то $n \div 7$, значит $n^2 \div 7^2$.
Значит, $a \div 7$. Единственное число, меньше 10, которое делится на 7 — 7. Значит, $a = 7$.
Тогда $A = 7777$.

~~Ответ:~~ Ответ: $\{(7777, 707, 11)\}$.

‡



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Из условия:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = k \\ \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+x+y}{xy} = k \\ \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3+x+y}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow \frac{(x+y+3)((x-4)(y+4))}{xy} = (x+y+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3+x+y}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \quad | : (x+y+3) \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)}$$

(по усл. $x > 0, y > 0; (x+y+3) > 0$, значит, на это число можно делить)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(y+4) = xy \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 4y + 4x - 16 = xy \\ x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq 0 \\ y \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq -4 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ x \neq 4 \\ (x > 4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 + y \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 12xy \\ x = 4 + y \end{cases} \Leftrightarrow x^3 - y^3 - 12xy \stackrel{(1)}{=} (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y)y =$$

$$= y^3 + 64 + 3 \cdot 4y^2 + 3 \cdot 16y - y^3 - 12y^2 - 12 \cdot 4y = 64$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Ответ: 64~~ Значит, $M=64$ при любых $x, y (x>0, y>0)$.

Ответ: $\{64\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

a) $\exists k \in \mathbb{Z}$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \\ 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3y - x = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2k - x \\ 3y = 1 + 2k + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2k - x & (1) \\ y = \frac{1 + 2k + x}{3} & (2) \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ (x, 1 + 2k - x), \left(x, \frac{1 + 2k + x}{3}\right) \mid k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

т.к. $\arccos$
 $1 \geq \frac{x}{7} \geq -1 \Leftrightarrow 7 \geq x \geq -7$

т.к. $\arcsin$

$1 \geq \frac{y}{4} \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq -4$

$(1), (2) \begin{cases} 4 \geq 1 + 2k - x \geq -4 \\ 4 \geq \frac{1 + 2k + x}{3} \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + x \geq 2k \geq -5 + x \\ 12 - 11x \geq 2k \geq -12 - 13 - x \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$N_{\text{кл.}}$ — кол-во 11-классников. $q_{\text{билет.}}$ — сколько билетов выделено в конце месяца.

Вероятность попасть на концерт Васье и Пете

вместе $\underbrace{\text{в начале месяца}}_{p_1} = \frac{C_{N-2}}{C_N^4}$ (т.к. C_N^4 — кол-во всего способов выбрать 4-х человек, идущих на концерт. C_{N-2}^2 — кол-во способов выбрать 2-х человек, идущих на концерт, если Петья и Вася уже выбрали, точно идут на концерт).

Вероятность попасть на концерт Васье и Пете

вместе в конце месяца — $p_2 = \frac{C_{N-2}^{q-2}}{C_N^q}$

(т.к. C_N^q — кол-во всего способов выбрать q

человек, идущих на концерт. C_{N-2}^{q-2} — кол-во спо-

собов выбрать $q-2$ человек, идущих на концерт,

если Петья и Вася (2 человека из q) уже выбра-

ны, точно идут на концерт)

$$\text{По уса } p_1 = \frac{(N-4)! \cdot 4! \cdot (N-2)!}{N! \cdot 2! \cdot (N-4)!} = \frac{4 \cdot 3}{N \cdot (N-1)} \quad (1)$$

$$p_2 = \frac{(N-2)! \cdot q! \cdot (N-q)!}{(q-2)! \cdot (N-2-q+2)! \cdot N!} = \frac{q(q-1)}{N(N-1)} \quad (2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{11} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{11} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{4 \cdot 3 \cdot N(N-1)}{N(N-1) \cdot 4(4-1)} = \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 11 = 4(q-1) \Rightarrow q^2 - q - 132 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 12 \\ q = -11 \end{cases}$$

$q \neq 0$

$$\Rightarrow q = 12$$

не возможно, $q > 0$

Значит, $q = 12$. Всего было продано 12 билетов на концерт в конце месяца.

Ответ: Было продано

Ответ: было продано 12 билетов на концерт в конце месяца.



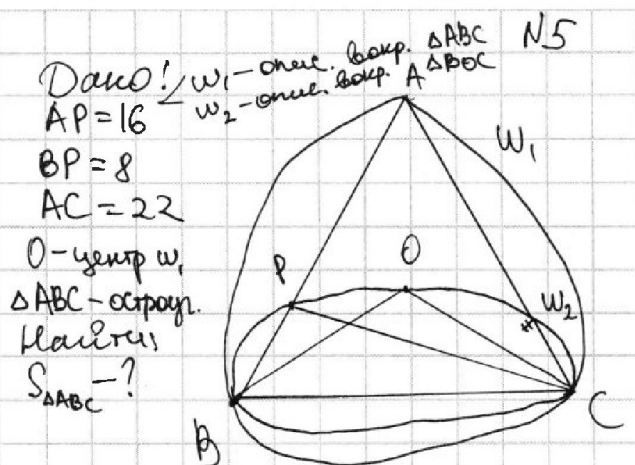
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Т.к. $\triangle ABC$ — остроуг., то O лежит внутри $\triangle ABC$.2) $\angle BAC = \alpha$. Тогда!
 $\angle BOC = 2\alpha$ (центральный $\angle$, опр. на ту же дугу BC , что и $\angle BAC$)

3) $\angle BPC = 2\alpha = \angle BOC$
 (т.к. в окол. w_2 опр. на ту же дугу BC , что и $\angle BOC$).

Тогда $\angle APC = 180^\circ - 2\alpha$ (т.к. смежн. с $\angle BPC$)

4) По сумме $\angle$ в $\triangle$: $\angle ACP = 180^\circ - \angle BAC - \angle APC =$
 $= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha$. Тогда $\angle ACP = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC$ — р/б $\triangle$
 (по призм. р/б $\triangle$)

$\Rightarrow PA = PC$ (по опр. р/б $\triangle$)

5) По т. косинусов! $PC^2 = PA^2 + AC^2 - 2 \cdot PA \cdot AC \cdot \cos(\angle PAC) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha = 22^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{11}{16} \quad (1)$$

6) По основ. тригонометр. тождеству: $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{121}{256} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{135}{256} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$7) S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC)}{2} = \frac{24 \cdot 22 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ! } S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

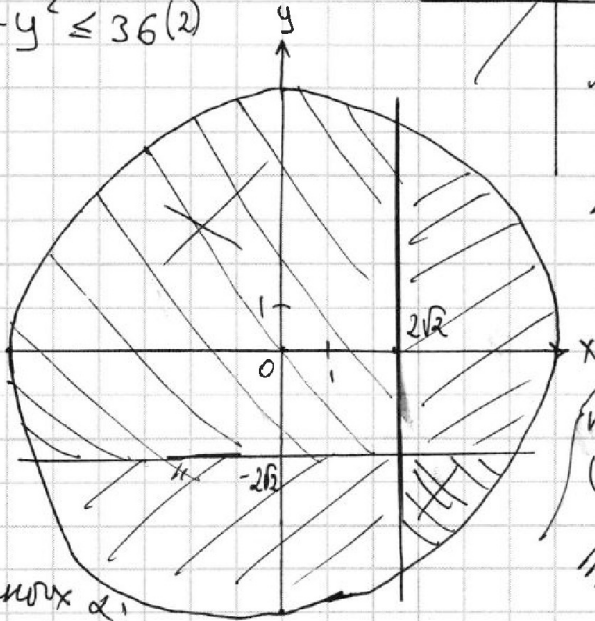
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \end{cases} \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -4\sin\alpha \\ y \leq 4\cos\alpha \\ x \leq -4\sin\alpha \\ y \geq 4\cos\alpha \end{cases} \leftarrow \text{при фиксированном значении } \alpha \text{ это будут 2 непересекающиеся множества точек, ограниченных 2-мя параллельными прямыми, каждая из 2-х совокупностей. Пересечение 2-х прямых при } P_{\max} \text{ должно быть максимально близко к окружности от (2).}$$



при указанных α :

$$P_{\max} = 2 \cdot L + W_1 + W_2$$

длина отрезков прямых дуги (или дуги)

при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$
(возделено правильно)
// такими штрихами
для $\alpha \in (\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k)$
и $\alpha \in (\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{7\pi}{4} + 2\pi k)$
для $\alpha \in (\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k)$
и $\alpha \in (\frac{7\pi}{4} + 2\pi k, \frac{9\pi}{4} + 2\pi k)$



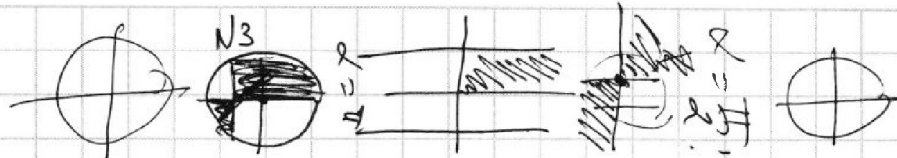
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $k \in \mathbb{Z}$



$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \pi y \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \left(\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \pi y \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin \pi y = 0 \vee \sin \pi(y-x) = 0, \text{ возвращаем})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \operatorname{tg} \pi y = 0 \\ \cos \pi y \neq 0 \wedge \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\cos \pi y = 0 \wedge \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \quad (\text{т.к. при } \cos \pi y = 0)$$

$$\sin \pi y = 0 \wedge \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \quad (\text{аналогично } \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \neq 0, \text{ если } \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0, \text{ значит } \sin \pi y = 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} + k\pi$$



$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$



$$\arcsin$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{1+2k-x}{4} = \frac{x}{7}$$

$$\arcsin \left(\frac{1+2k}{4} - \frac{x}{4} \right) = \frac{x}{7}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$(x+y \sin \alpha) \geq 0$$

$$-y \sin \alpha \geq \frac{x}{7}$$

$$y \cos \alpha \geq \frac{x}{7}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leq \frac{x}{7} \leq \frac{2\pi}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+y=1+2k$$

$$3y+x=1+2k$$

$$\begin{cases} y=k \\ y-x=2k \\ y=\frac{1}{2}+k \\ y= \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2}(y-x)=\pi k$$

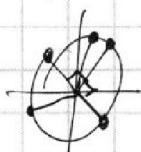
$$\frac{y-x}{2}=k$$

$$\pi y=\pi k$$

$$y=k$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2}=$$

$$5+3+3+4=15$$



$$\frac{3\sqrt{15}}{16} \cdot 22 \cdot 24$$

$$= \frac{3\sqrt{15} \cdot 11 \cdot 24}{16}$$

$$= \frac{3\sqrt{15} \cdot 11 \cdot 3}{2}$$

$$= \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{121}{256}}$$

$$= \sqrt{\frac{135}{256}}$$

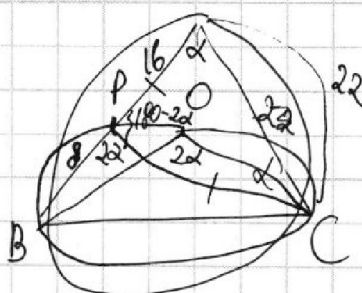
$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(y-x)}{2} = \operatorname{ctg} \pi y$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \pi y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi y + 2\pi k$$

$$\frac{256-121}{256} = \frac{135}{256} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$



$$135=5 \cdot 27$$

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha$$

$$2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha = 22^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 16 \cos \alpha = 22$$



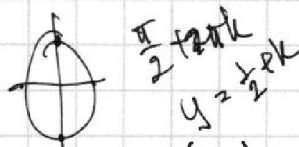
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{N-2}^1}{C_N^3} = \frac{(N-2) \cdot 3 \cdot 2}{N(N-1)(N-2)}$$



$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{1+2k-x}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos \pi y = 0 \wedge \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \\ \sin \pi y = 0 \wedge \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \\ \operatorname{tg} \frac{\pi(y-x)}{2} \operatorname{tg} \pi y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = p_1$$

$$p_2 = \frac{C_{N-2}^{q-2}}{C_N^q} = \frac{(N-2)! (N-4)! q!}{(N-q)! (q-2)! N!} = \frac{(N-2)! q!}{(q-2)! N!}$$

$$C_{N-2}^{q-2} = \frac{(N-2)!}{(N-2-q+2)! (q-2)!} = \frac{(N-2)!}{(N-q)! (q-2)!}$$

$$C_{N-2}^2 = \frac{(N-2)!}{2! (N-4)!} = \frac{(N-2)! \cdot 4! (N-4)!}{2! (N-4)! \cdot N!}$$

$$C_N^4 = \frac{N!}{4! (N-4)!}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{11} = \frac{q(q-2) \cdot 4 \cdot 3}{4(q-1)} = \frac{4 \cdot 3}{N(N-1)}$$

$$q = 12, q = -11 \quad \Rightarrow \quad q^2 - q - 132 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k + \pi$
 $2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k \Rightarrow 3\pi y = \pi x + 2\pi k + \pi$
 $3y = x + 2k + 1$
 $y = 1 + 2k - x$

$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$
 $\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$
 $\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$
 $\cos 2\pi y = \cos(\pi(x - y))$

$2\pi y - \pi x + \pi y$
 $3\pi y - \pi x$
 $-2 \sin \frac{2\pi y - \pi(x - y)}{2} \sin \frac{2\pi y + \pi(x - y)}{2} = 0$
 $\sin \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0$
 $\sin \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0$

$\frac{3y - x}{2} = k$
 $\frac{y + x}{2} = k$
 $3y = 2k + x$
 $y = 2k - x$
 $y = \frac{2k + x}{3}$
 $y = 2k - x$

$1 + 2k - x = \frac{1 + 2k + x}{3} \Rightarrow 3 + 6k - 3x = 1 + 2k + x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 + 4k = 4x \Rightarrow \frac{1}{2} + k = x$

$\sin(\pi + 2\pi k - \pi x) = \sin(\pi - \pi x) = \sin \pi x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 2k - x \\ y = \frac{2k + x}{3} \end{cases} \quad C_{N-2}^2 = \frac{(N-2)(N-3)}{2}$$

$$C_N^3 = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}{3 \cdot 2} = \frac{12}{(N-2)(N-3)} \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot (N-2)(N-3)}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \arccos \frac{C_N^2}{C_N^3} = \frac{3}{(N-2) \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3}$$

$$C_4^3 = 4$$

$$C_2^2 = 1$$

$$\frac{2 = C_N^2}{4 = C_N^4} = \frac{N(N-1) \cdot 2}{2 \cdot N(N-1) \cdot (N-2)(N-3)}$$

4

(ПВ)

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3}{4}$$

П А Б
В А Б

1/2

П В Б
П В А

→ 2 ш.

$$p_1(\pi + \beta) \cdot 11 = p_2(\pi + \beta)$$

9 - кол. во билетов?

N - кол. во 11-классников

$$C_{N-2}^2$$

$$C_N^4$$

П В А Б

$$C_N^2 =$$

~~1/2~~

~~1/2~~

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot 2 = \frac{2}{N(N-1)}$$

$$\frac{1}{C_N^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_N^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{N(N-1)(N-2)}$$

$$C_N^2 = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$$

$$\frac{1}{C_N^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_N^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{N(N-1)(N-2)}$$

~~Pr~~

$$\frac{2}{N(N-1)}$$

$$C_N^4$$

$$\frac{C_{N-2}^2 \cdot 2}{C_N^3} = \frac{(N-2)(N-3) \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot N \cdot (N-1)(N-2)} = \frac{(N-3) \cdot 3}{N(N-1)}$$

$$C_N^4$$

$$\frac{C_N^4}{C_N^2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{N(N-1)(N-2)(N-3)}$$

$$\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = k$$

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = k$$

$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = k$$

$$\frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = k$$

$$\frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{xy}$$

$$\begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \end{matrix}$$

$$(y+x+3)xy =$$

$$= (y+x+3)(x-4)(y+4)$$

$$(7777, 707, 11)$$

$$0 = (y+x+3)((x-4)(y+4) - xy)$$

$$0 = (y+x+3)(xy - 4y + 4x - 16 - xy)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (y+x+3)(x-y-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ x = -y-3 \end{cases}$$

$$\overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$\overline{7cd}, \overline{c7d}, \overline{cd7}$$

$$\overline{1g}, \overline{e1}$$

$$0 < a < 10$$

$$n^2 = \overline{aaaa} \cdot \overline{7cd} \cdot x \cdot y$$

$$\begin{matrix} : 1111 \\ : a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x \cdot y \\ : 1111 \\ : a \end{matrix}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$101 - \text{простое}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 13 = 91$$

$$x \neq 101$$

$$(707) = y$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot y \cdot 101$$

$$y+4 \cdot \overline{aaaa} \cdot \overline{707, 11} \cdot \overline{aaaa} \cdot \overline{707} \cdot y$$

$$11 \cdot 7 \cdot 101$$

$$707, 11 \Rightarrow \frac{x}{y} = 11$$

$$11 = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - 8xy - y^2 - 4xy =$$

$$\begin{cases} x = y+4 \\ x = -y-3 \end{cases} \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq -4 \end{cases} = x(x^2 - 8y) - y(y-4x)$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \text{no sol.} \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y =$$

$$= y^3 + 64 + 3 \cdot 4y^2 + 3 \cdot 16 \cdot y - y^3 - 12y^2 - 12 \cdot 4y =$$

$$= 64 + 3 \cdot 16 \cdot y - 3 \cdot 16y = 64$$

$$= (y+3)^3 - y^3 + 12(y+3)y =$$

$$= -(y^3 + 27 + 3 \cdot 3 \cdot y^2 + 3 \cdot 3^2 \cdot y) - y^3 + 12y^2 + 12 \cdot 3 \cdot y =$$

$$= -2y^3 - 27 - 9y^2 - 27y + 12y^2 + 36y =$$

$$= -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27 =$$

$$\rightarrow -y-3 > 0 \Rightarrow -3 > y \quad \downarrow \\ 0$$

6

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4\sin\alpha \leq 0 \\ y-4\cos\alpha \geq 0 \\ x+4\sin\alpha \geq 0 \\ y-4\cos\alpha \leq 0 \end{cases}$$