



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть $A = \overline{aaaa}$ (a - цифра) $0 < a < 10$, ~~и~~

Пусть $n^2 = A \cdot B \cdot C \Leftrightarrow n^2 = \overline{aaaa} \cdot B \cdot C$
(из условия)
($n \in \mathbb{N}$)

$$\overline{aaaa} = a \cdot 1000 + a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

101 — простое 3-хзначное число. Если $n^2 \mid 101$, то

$n \mid 101$, значит, $n \mid n^2 \mid 101^2$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$).
(т.к. 101 — простое)

$$n^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C$$

$\frac{1}{\mid 101^2} \frac{\cancel{101}}{\mid 101} \frac{\cancel{101}}{\mid 101}$ ($\because 101$ — простое, < 101)

Значит, $B \mid 101$. Числа, являющиеся 3-хзначными,

делящиеся на 101 — $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$.

Единственное из них, содержащее цифру 7 —

707 . Значит, $B = 707 = 7 \cdot \underbrace{101}_{\text{простое простое}}$

$$\left(\begin{array}{l} n^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot C \\ \frac{1}{\mid 11^2} \frac{\cancel{11}}{\mid 11} \frac{\cancel{101}}{\mid 11} \frac{\cancel{101}}{\mid 11} \end{array} \right)$$

$n^2 \mid 11$, значит $n \mid 11$ (11 — простое), тогда $n^2 \mid 11^2$.

Значит, $C \mid 11$. 2-хзначное число, которое делится из которых на 11 — $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. Единственный

число, содержащее 1 — 11 . Значит, $C = 11$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} n^2 &= a \cdot 10^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \\ 7 &\text{ - простое, тогда если } n^2 \mid 7, \text{ то } n \mid 7, \text{ значит } n^2 \mid 7^2 \end{aligned}$$

Значит, $a \mid 7$. Единственное число, меньшее 10, которое делится на 7 — 7. Значит, $a = 7$.

Тогда $A = 7777$.

~~Ответ:~~ Ответ: $\{(7777, 707, 11)\}$.

‡



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Условие:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = k \\ \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+x+y}{xy} = k \\ \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\frac{3+x+y}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}} \Leftrightarrow (x+y+3)((x-4)(y+4))$$

$$\cancel{\frac{3+x+y}{xy}} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)}$$

(но условия $x > 0, y > 0; (x+y+3) > 0$, значит, на это число можно делить)

$$\Leftrightarrow (x-4)(y+4) = xy$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 4y + 4x - 16 = xy \\ x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq 0 \\ y \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq -4 \\ y \neq 4 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4+y \\ x \neq 4 \\ (x > 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4+y \quad (1)$$

$$\cancel{\begin{cases} x^3 - y^3 - 12xy \\ x = 4+y \end{cases}}$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 12xy &\stackrel{(1)}{=} (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y)y = \\ &= y^3 + 64 + 3 \cdot 4y^2 + 3 \cdot 16y - y^3 - 12y^2 - 12 \cdot 4y = 64 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Ответ: 64~~ Значит, $M = 64$ при любых $x, y (x > 0, y > 0)$.

Ответ: {64}



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач шумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $\exists k \in \mathbb{Z}$

N3

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \\ 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3y - x = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2k - x \\ 3y = 1 + 2k + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2k - x \\ y = \frac{1+2k+x}{3} \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Ответ: $\{(x, 1+2k-x), (x, \frac{1+2k+x}{3}) \mid k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$.

б) $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{matrix} x \\ 7 \end{matrix} \geq -1 \Leftrightarrow 7 \geq x \geq -7$$

т.к. \arccos

$$1 \geq \frac{y}{4} \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq -4$$

$$(1), (2) \quad 4 \geq 1+2k-x \geq -4$$

$$4 \geq \frac{1+2k+x}{3} \geq -4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+x \geq 2k \geq -5+x \\ 12+12k \geq 2k \geq -12-13-x \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

] $N_{\text{вс.}}$ — кол-во 11-классников.] $q_{\text{бил.}}$ — сколько билетов боялись ли в конце месяца.

Вероятность попасть на концерт Васе и Петя

$$\text{вместе} = P_1 = \frac{C_{N-2}}{C_N^9} \quad (\text{т.к. } C_N^9 \text{ — кол-во всего способов бояться } 4\text{-х человек, идущих на концерт. } C_{N-2}^2 \text{ — кол-во способов бояться } 2\text{-х человек, оставшихся идущих на концерт, если Петя и Вася уже боялись, только идут на концерт})$$

Вероятность попасть на концерт Васе и Петя

$$\text{вместе в конце месяца} - P_2 = \frac{C_{N-2}^{q-2}}{C_N^9}$$

(т.к. C_N^9 — кол-во всего способов бояться 9 человек, идущих на концерт. C_{N-2}^{q-2} — кол-во способов бояться $q-2$ человек, идущих на концерт, если Петя и Вася (2 человека из q) уже боялись, только идут на концерт)

$$\text{По уст. } P_1 = \frac{(N-4)! \cdot 4! \cdot (N-2)!}{N! \cdot 2! \cdot (N-4)!} = \frac{4 \cdot 3}{N \cdot (N-1)} \quad (1)$$

$$P_2 = \frac{(N-2)! \cdot q! \cdot (N-q)!}{(q-2)! \cdot (N-2-q+2)! \cdot N!} = \frac{q(q-1)}{N(N-1)} \quad (2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По условию:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{11} \quad (1), (2) \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{11} \quad (1), (2) \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 3 \cdot N(N-1)}{N(N-1) \cdot 4(q-1)} = \frac{1}{11}$$

$$(1) \ 4 \cdot 3 \cdot 11 = q(q-1) \Leftrightarrow q^2 - q - 132 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 12 \\ q = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

~~q = 12~~

не возмож но, $q > 0$

Значит, $q = 12$. Всего было куплено 12 билетов на концерт в конце месяца.

Ответ: Было куплено

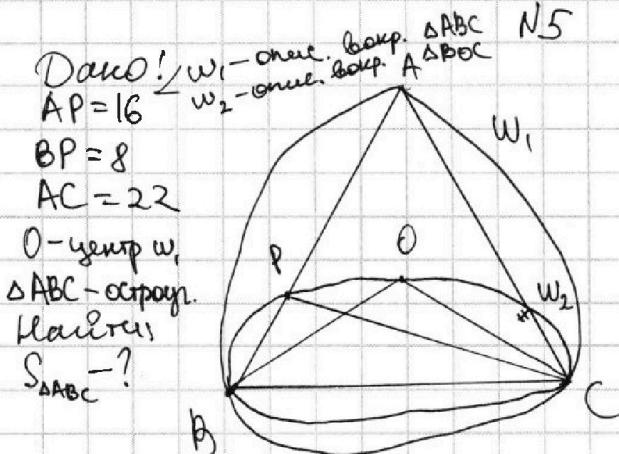
Ответ: Было куплено 12 билетов на концерт в конце месяца.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



3) $\angle BPC = 2\alpha = \angle BOC$
(т.к. в окр. w_2 опир. на ту же дугу BC , что и $\angle BAC$).

Tогда $\angle APC = 180^\circ - \frac{1}{2}2\alpha$ (т.к. смежн. с $\angle BPC$)

4) По сумме \angle в \triangle : $\angle ACP = 180^\circ - \angle BAC - \angle APC = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha$. Тогда $\angle ACP = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC - p/\delta \triangle \Rightarrow \Rightarrow PA = PC$ (по прип. $p/\delta \triangle$)

5) По т. косинусов: $PC^2 = PA^2 + AC^2 - 2 \cdot PA \cdot AC \cdot \cos(\angle PAC) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha = 22^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{11}{16}$ (1)

6) По основ. тригонометр. тождеству: $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{121}{256} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{135}{256} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$7) S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC)}{2} = \frac{24 \cdot 22 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

Решение:

1) Т.к. $\triangle ABC$ — остроугл., то

О лежит внутри $\triangle ABC$.

2) $\angle BOC = 2\alpha$.

т.к. $\angle BOC$ — центральный \angle , опир. на ту же дугу BC , что и $\angle BAC$.

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

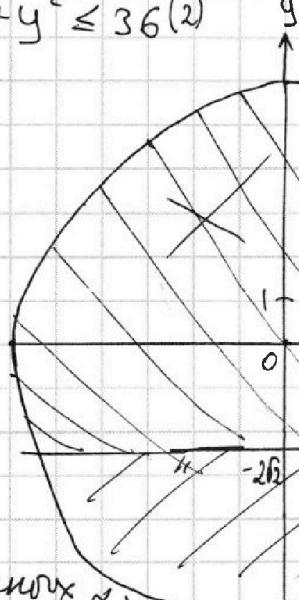
N6

$$\begin{cases} (x + 4\sin \alpha)(y - 4\cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4\sin \alpha \geq 0 \\ y - 4\cos \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 4\sin \alpha \leq 0 \\ y - 4\cos \alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$\begin{cases} x \geq -4\sin \alpha \\ y \leq 4\cos \alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq -4\sin \alpha \\ y \geq 4\cos \alpha \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 \leq 36 \quad (2)$$



При указанных α :

$$P_{\max} = d \cdot l + w_1 + w_2$$

где d — длина (их длины)
ограничивающих прямых

при фиксированном значении α это будут 2 "ненужных" множества точек, ограниченных 2-мя пересекающимися прямыми, т.к. каждая из 2-х сокращается. Пересечение 2-х прямых при P_{\max} должно быть максимально близко к окружности

от (2) \Rightarrow $\alpha = \frac{3\pi}{4}$
(введенено правильно)
// таким образом

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $k \in \mathbb{Z}$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cdot \sin \pi y = \cos \pi y \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(y-x)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \left(\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y - \cos \pi y \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \quad \left(\sin \pi y = 0 \vee \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0, \text{ возможные случаи} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \tan \pi y = 0 \\ \cos \pi y \neq 0 \wedge \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \neq 0 \\ \cos \pi y = 0 \wedge \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \quad (\text{т.к. при } \cos \pi y = 0 \quad \sin \pi y \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0) \\ \sin \pi y = 0 \wedge \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \quad (\text{аналогично } \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0, \text{ если } \pi \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0, \text{ т.к. } \sin \pi y = 0) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} + k \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \frac{1+2k-x}{\sqrt{1-(1+2k-x)^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \frac{1+2k-x}{\sqrt{1-(1+2k-x)^2}} > \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+y=1+2k$$

$$3y+x=1+2k$$

$$\begin{cases} y = k \\ y - x = 2k \\ y = \frac{1}{2} + k \\ y = \end{cases}$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \pi k$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = k$$

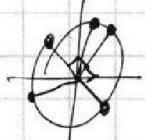
$$\frac{\pi(y-x)}{2} = k$$

$$\pi y = \pi k$$

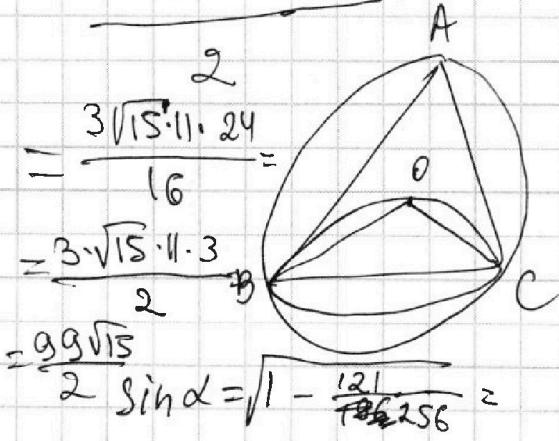
$$y = k$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} =$$

$$5+3+3+4=15$$



$$\frac{3\sqrt{15}}{16} \cdot 12 \cdot 24 =$$



$$2 \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{16} \cdot 11 \cdot 24$$

$$= \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$2 \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} =$$

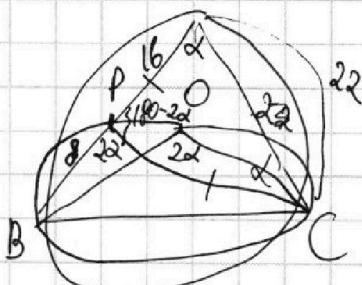
$$= \sqrt{45}$$

$$\tan \frac{\pi(y-x)}{2} = \operatorname{ctg} \pi y$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \pi y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi(y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi y + 2\pi k$$

$$\frac{256-121}{256} = \frac{135}{256} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$



$$135 = 5 \cdot 27$$

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha$$

$$2 \cdot 16 \cdot 22 \cos \alpha = 22^2$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 16 \cos \alpha = 22$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{N-2}^1}{C_N^3} = \frac{(N-2) \cdot 3 \cdot 2}{N(N-1)(N-2)} \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \sin \pi y = \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y$$

$\pi/2 + 2k\pi$
 $y/2 + k\pi$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{1+2k-x}{4}$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \cos \pi y = 0 \wedge \sin \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \\ \sin \pi y = 0 \wedge \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 0 \\ \tan \frac{\pi(y-x)}{2} \tan \pi y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{C_{N-2}^2}{C_N^q} = P_1 \quad \cancel{P_1}$$

$$C_N^q = \frac{(N-2)! (N-q)! q!}{(N-q)! (q-2)! N!} = \frac{(N-2)! q!}{(q-2)! N!} =$$

$$\sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot P_2 = \frac{C_{N-2}^{q-2}}{C_N^q} = \frac{N!}{2! (N-4)!} \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cos \pi y = \frac{q(q-1)}{N \cdot (N-1)} \tan \pi y = 0$$

$$C_N^q = \frac{N!}{(N-q)! q!} \quad \cancel{P_2}$$

$$C_{N-2}^{q-2} = \frac{(N-2)!}{(N-2-q+2)! (q-2)!} = \frac{(N-2)!}{(N-q)! (q-2)!} \frac{\pi(y-x)}{2} = \pi k$$

$$C_{N-2}^2 = \frac{(N-2)!}{2! (N-4)!} = \frac{(N-2)(N-3)}{2} = \frac{(N-2)! \cdot q! (N-q)!}{2! (N-q)! \cdot N!} =$$

$$C_N^q = \frac{N!}{q! (N-4)!} \quad \cancel{P_1}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{\pi} = \frac{q(q-1)4 \cdot 3}{q(q-1)(2)} = \frac{4 \cdot 3}{N \cdot (N-1)} \quad \begin{cases} x+y=1+2k \\ 3y+x=1+2k \\ q(q-1)=4 \cdot 3 \cdot 11 \Leftrightarrow \\ q^2 - q - 132 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$q=12 \quad q=-11 \quad \cancel{(2)} \quad \Rightarrow \quad q^2 - q - 132 = 0 \quad \cancel{(2)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \\
 & 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k + \pi \quad \uparrow \quad 3\pi y = \pi x + 2\pi k + \pi \quad 3y = x + 2k + 1 \\
 & 2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi y = \pi + 2\pi k - \pi x \quad y = 1 + 2k - x \\
 & \sin \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y \\
 & \sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y \\
 & 2\pi y - \pi x + \pi y \quad \cos 2\pi y \quad = \cos(\pi x - \pi y) \\
 & \cos 2\pi y = \cos(\pi(x-y)) \\
 & 3\pi y - \pi x \\
 & -2 \sin \frac{2\pi y - \pi(x-y)}{2} \quad \sin \frac{2\pi y + \pi(x-y)}{2} = 0 \quad \cos \alpha - \cos \beta = \\
 & \uparrow \quad \uparrow \quad = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \\
 & \left[\begin{array}{l} \sin \left(\frac{3\pi y - \pi x}{2} \right) = 0 \\ \sin \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \pi k \\ \frac{\pi y + \pi x}{2} = \pi k \end{array} \right] \quad \Leftrightarrow \\
 & \left(\begin{array}{l} \frac{3y - x}{2} = k \\ \frac{y + x}{2} = k \end{array} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} 3y = 2k + x \\ y = 2k - x \end{array} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} y = \frac{2k+x}{3} \\ y = 2k - x \end{array} \right) \\
 & 1 + 2k - x = \frac{1 + 2k + x}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 6k - 3x = 1 + 2k + x \quad \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 + 4k = 4x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + k = x
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 2k - x \quad \textcircled{1} \\ y = \frac{2k + x}{3} \end{cases} \quad C_{N-2}^2 = \frac{\cancel{(N-2)}(N-3)}{2k}$$

$$C_N^3 = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \cancel{(N-2)}}{3 \cdot 2} \quad \frac{12}{(N-2)(N-3)} \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot (N-2)(N-3)}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad \arccos \frac{C_N^2}{C_N^3} = \frac{3}{(N-2)} \quad \frac{C_4^3 = 4}{C_2^2 = 1} \quad \frac{11}{4}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \quad \text{ПАБ} \quad \frac{2 = C_N^2}{4 = C_N^4} = \frac{N(N-1) \cdot 3}{2 \cdot N(N-1) \cdot (N-2)(N-3)}$$

$$4 \quad \textcircled{ПВ.} \quad \frac{3}{4} \quad \text{ВАБ} \quad \frac{1}{2}$$

$$P_1(\pi + B) \cdot 11 = P_2(\pi + B)$$

$$q - \text{коэф. - во бисегах?} \quad \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4}$$

$$N - \text{коэф. - во 11-классниках} \quad C_N^2 =$$

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot 2 = \frac{2}{N(N-1)} \quad \frac{1}{C_N^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_N^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{N(N-1)(N-2)}$$

$$C_N^2 = \frac{N!}{2(N-2)!} = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$$

$$\frac{1}{C_N^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_N^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{N(N-1)(N-2)}$$

$$\frac{C_{N-2}^2 \cdot 2}{C_N^3} = \frac{\cancel{(N-2)}(N-3) \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot N \cdot (N-1)(N-2)} = \frac{C_N^4 \cdot C}{C_N^4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{N(N-1)(N-2)(N-3)}$$

$$= \frac{(N-3) \cdot 3}{N(N-1)} \quad \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = k$$

$$6+5+4$$

—

$$aaaa = a \cdot 1111$$

7 cd c 7 d cd 7

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = k$$

1g e1

$$0 < a < 10$$

$$x^3 - y^3 - 12xy$$

$$n^2 = \overbrace{aaaa} \cdot \cancel{x \cdot y}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = k$$

: 1111
: a

x · y
: 1111
: a

$$\frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = k$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

101 — простое

$$\frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{xy}$$

$$13 \cdot 7 \cdot 13 = 91$$

$$x \neq 101$$

$$707 = y$$

$$(y+x+3)xy = y+4 \underbrace{aaaa}_{11 \cdot 7 \cdot 101} \cdot \underbrace{707 \cdot 11}_{11 \cdot 7 \cdot 101} \cdot \underbrace{aaaa}_{11 \cdot 7 \cdot 101} \cdot 707 \cdot y$$

$$= (y+x+3)(x-4)(y+4) \underbrace{(7777, 707, 11)}_{11 \cdot 7 \cdot 101}$$

$$; 101 \checkmark$$

$$707 \not\sim 11 \Rightarrow \frac{x}{y}; 11$$

$$0 = (y+x+3) ((x-4)(y+4) - xy) ; a$$

$$; 11 \not\sim x$$

$$0 = (y+x+3) (xy - 4y + 4x - 16 - xy) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = (y+x+3) (x-y-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ x = -y-3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 x^3 - y^3 - 12xy &= x^3 - 8xy - y^2 - 4xy = \\
 \left[\begin{array}{l} x = y+4 \\ x = -y-3 \end{array} \right] &\quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq y \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq -4 \end{array} \right\} = x(x^2 - 8y) - y(y - 4x) \\
 &\quad \cancel{x} \\
 (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y &= \\
 &= y^3 + 64 + 3 \cdot 4y^2 + 3 \cdot 16 \cdot y - y^3 - 12y^2 - 12 \cdot 4y = \\
 &= 64 + 3 \cdot 16 \cdot y - 3 \cdot 16y = 64 \\
 &= (y+3)^3 - y^3 + 12(y+3)y = \\
 &= -(y^3 + 27 + 3 \cdot 3 \cdot y^2 + 3 \cdot 3^2 \cdot y) - y^3 + 12y^2 + 12 \cdot 3 \cdot y = \\
 &= -2y^3 - 27 - 9y^2 - 27y + 12y^2 + 36y = \\
 &= -2y^3 + 3y^2 + 9y - 27 = \\
 &\quad \cancel{-y-3 > 0 \Leftrightarrow -3 > y} \quad \cancel{y < 0}
 \end{aligned}$$

6

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + 4\sin \alpha)(y - 4\cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 4\sin \alpha \leq 0 \\ y - 4\cos \alpha \geq 0 \\ x + 4\sin \alpha \geq 0 \\ y - 4\cos \alpha \leq 0 \end{array} \right.$$