МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из условия задачи следует, что $A = \overline{aaaa} = 1111a = 11\cdot 101a$; ~~[illegible]~~, где $a \neq 0$ ~~[illegible]~~

$A\cdot B\cdot C = 11\cdot 101\cdot a\cdot B\cdot C$.

Заметим, что $A\cdot B\cdot C$ кратно 101 (101 – простое), т.к. $A\cdot B\cdot C$ это кв., то $A\cdot B\cdot C$ кратно 101^2. C явл. двузнач. числом, сл. $НОД(C;101)=1$, $НОД(11;101)=1$, т.к. a ненулевая цифра, то $НОД(a;101)=1$. Значит необходимо чтобы B было $\vdots 101$. Т.к. B трёхзнач, то B может принимать только следующ. знач: 101, 202, 303, ..., 909. Среди этих чисел ровно одно содерж. хотя бы 1 двойку – это 202. Значит ~~[illegible]~~ в силу усл. задачи $B = 202$.

Тогда $A\cdot B\cdot C = 101^2\cdot 2\cdot 11\cdot a\cdot C$. Т.к. $A\cdot B\cdot C$ это кв. ~~[illegible]~~ и $A\cdot B\cdot C \vdots 11$, то $A\cdot B\cdot C \vdots 11^2 \Rightarrow a \vdots 11$ или $C \vdots 11$, т.к. a ненул. цифра то $a \not\vdots 11$, сл. $C \vdots 11$. Единств. двузнач. число $\vdots 11$, содерж. хотя бы 1 тройку это 33. Значит $C = 33$.

$A\cdot B\cdot C = 101^2\cdot 2\cdot 3\cdot 11^2\cdot a$. $A\cdot B\cdot C \vdots 2$, но $\not\vdots 4$; $A\cdot B\cdot C \vdots 3$, но $\not\vdots 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $A \cdot B \cdot C$ кв, то $A \cdot B \cdot C \vdots 36 \Rightarrow a \vdots 6$. Единств. ненул. цифра $\vdots 6$ это 6, т.е. $a = 6$.

Тогда $A = 6666$

Ответ: $(6666; 202; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{x+y+2}{xy}$.

Если x уменьш на 1, y увелич. на 1, то $K=\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$

по усл. $\frac{x+y+2}{xy}=\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$.

$\Updownarrow$ т.к. числа x,y положит, то $x>0, y>0, y+1>0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+2=0\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}xy=(x-1)(y+1)\\ x\neq 1\end{cases}\end{array}\right.$

т.к. $x>0, y>0$, то $x+y+2>0$, сл. первая сист. не имеет реш.

Значит

$\begin{cases}xy=(x-1)(y+1)\\ x\neq 1\end{cases}$ (1)

т.к. $xy>0$, то x и y удв. (1) будут такими, что $(x-1)(y+1)>0$. А т.к. $y+1>0$, то $x-1>0$

т.е. $x>1$, сл. $x\neq 1$.

Значит сист. равносильна (при $x>0, y>0$):

$xy=(x-1)(y+1)$

$x=y+1$

$M=x^3-y^3-3xy=(y+1)^3-y^3-3y(y+1)=1$.

Равенство будет достиг. наим. при $y=2$, $x=3$. Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) Раскрывая скобки, получим:

$\sin^2\pi x - \cos^2\pi x = \cos\pi x \cdot \cos\pi y - \sin\pi x \cdot \sin\pi y$.

$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$.

$\cos(\pi x + \pi y) + \cos(2\pi x) = 0$.

$2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3\pi x+\pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \end{array}\right.$ / $\left[\begin{array}{ll} \frac{3\pi x+\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t & t \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n & n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 3x + y = 1 + 2t. \\ x - y = 1 + 2n \end{array}\right.$ / $\left[\begin{array}{l} y = -3x + 1 + 2t. \\ y = x - 1 - 2n \end{array}\right.$

Пусть $x = a$, где a любое. Тогда имеем реш.

$(a; -3a+1+2t)$, ~~(a~~ $(a; a-1-2n)$.

Ответ: $(a; -3a+1+2t)$, $(a; a-1-2n)$, где a любое, $t, n \in \mathbb{Z}$.

б) В силу ограничений аргументов арксинуса и арккосинуса получаем: $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$, т.е. $x \in [-5; 5]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$-1 \le \frac{y}{4} \le 1$, т.е. $y \in [-4;4]$.

Как известно, $\arcsin a_1 \le \frac{\pi}{2}$, $\arccos b_1 \le \pi$ (где $a_1 \in [-1;1]$, $b_1 \in [-1;1]$). Значит $\arcsin a_1 + \arccos b_1 \le \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$. А ~~Знач~~ равенство будет только при $a_1 = 1$, $b_1 = -1$.

Значит ~~на~~ чтобы выпол. нер-во и усл. задачи нам подходят все пары $(x;y)$ такие, ~~нам нужно исключить из количества пар $(x;y)$ таких~~ что $x \in [-5;5]$, $y \in [-4;4]$ исключая пару, когда в нашем нер-ве достиг. равенство, т.е. $\frac{x}{5} = 1$; $\frac{y}{4} = -1$, т.е. пару $(5;-4)$.

~~Значит на $[-5;5]$ 11 целых чисел, на $[-4;4]$ 9 целых чисел. Значит ответом к задаче будет $11 \cdot 9 - 1 = 98$~~

~~Ответ: 98.~~ ~~Возьмём случаи~~

В а) получили, что нам подходят все пары вида $(a; -3a+1+2t)$, $(a; a-1-2n)$. Т.к. $x \in [-5;5]$, то $a \in [-5;5]$. Заметим, что на $[-5;5]$ 6 нечёт. чисел и 5 чёт., на $[-4;4]$ 5 чёт., 4 нечёт. Заметим, что $a \equiv_2 a-2n$ сл. a и $a-1-2n$ разной чётности. причём т.к. $n \in \mathbb{Z}$ то $a-1-2n$ принимает все значения той чётности, кот. противополож. чётности a. ~~Если~~ $a \equiv_2 -3a \equiv_2 -3a+2t$, сл. a и $-3a+1+2t$ разной чётност. причём т.к. ~~t~~ t любое целое, то $-3a+1+2t$ принимает все значения той чётности, кот. противоположна чётности a.

Разберём случаи:

I. a чётно. Имеем 5 вариантов выбрать число a.

Для $-3a+1+2t$ имеем 4 вар. выбора (Это число нечёт, а на $[-4;4]$ 4 нечёт числа).

Для $a-1-2n$ ~~[...]~~ аналогично имеем 4 способа выбрать. Имеем $5\cdot4+5\cdot4=40$ способов.

II. a нечётно. есть 6 способов выбрать a.

Для $-3a+1+2t$ имеем 5 вар. выбора (Это число чёт, а на $[-4;4]$ 5 ~~[...]~~ чёт чисел).

Для $a-1-2n$ аналогично 5 вар.

Имеем $6\cdot5+6\cdot5=60$ способов.

~~Однако пары $(a;-3a+1+2t)$, $(a;a-1-2n)$ могут~~

~~Область. Это происходит при $-3a+1+2t=a-1-2n$.~~

~~$4a=2+2n+2t$.~~ ~~Из этого~~ Заметим, что

~~$2a=n+t+1$.~~ $a-1-2n \underset{2}{\equiv} -3a+1+2t$. причём ~~n+t~~ т.к. n и t любые целые, то каждую пару $(x;y)$ мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

посчитали, как $(a; a-1-2n)$ и как $(a; -3a+1+2t)$, т.е.
Все способы посчитаны дважды.
Значит общее кол-во способов $= \frac{40+60}{2} = 50$.
Причём, как было написано раньше, пару $(5; -4)$ надо исключить (она действительно была посчитана. Достаточно взять $a=5$, $b=5$).
Имеем $50-1=49$.
Ответ: 49

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего X одиннадцатиклассников, количество билетов увеличилось на t штук (из усл. $t>0$).

Кол-во способов раздать 4 билета так, чтобы Петя и Вася их получили $= C_4^2 = 6$.

Вероятность того, что Петя и Вася вместе попадут на концерт в начале месяца $= \frac{6}{X}$.

Количество способов раздать $t+4$ билета так, чтобы Петя и Вася их получили $= C_{t+4}^2 = \frac{(t+4)(t+3)}{2}$.

Вероятность того, что Петя и Вася вместе попадут на концерт в конце месяца $= \frac{(t+4)(t+3)}{2 \cdot X}$

Из условия: $\frac{(t+4)(t+3)}{2X} = \frac{6}{X} \cdot 2{,}5$

$\Updownarrow$ очевидно, что $X \neq 0$, т.к. кол-во 11 клас. >0.

$\cancel{(t+4)(t+3)}$

$(t+4)(t+3) = 30$

$t^2 + 7t - 18 = 0$

$\cancel{(t+9)}(t+9)(t-2) = 0$

т.к. $t>0$, то $t=2$.

Значит в конце месяца выделено $4+2=6$ билетов

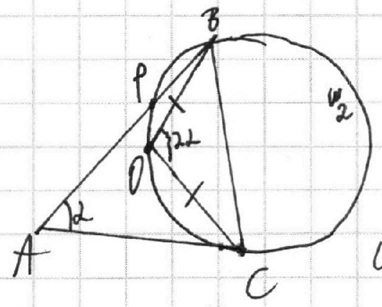
Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BAC = \alpha$.

$\angle BAC$ впис., опир. на дугу BC, $\angle BOC$ ~~впис~~ центр., опир. на $\cup BC$ (это всё в ω_1). Значит $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha$.

~~А~~ в ω_2; впис. углы $\angle BOC$ и $\angle CPB$ опир. на дугу BC $\Rightarrow$ ~~$\angle P$~~ $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$.

$\angle BPC$ внешний для $\triangle APC \Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle ACP$

$2\alpha = \alpha + \angle ACP$

$\angle ACP = \alpha$.

Значит $\angle ACP = \angle PAC = \alpha$, сл. $\triangle APC$ р/б. Значит $PC = AP = \frac{15}{2}$. Т.к. сумма углов в треуг. $\triangle APC$ равна $180°$, то $\angle APC = 180° - 2\alpha$. По т. синусов для $\triangle APC$:

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)}$$

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{AC}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{2AP}$$

$\cos\alpha = \frac{9}{2 \cdot \frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. ~~Т.к.~~ По осн. тр. т. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

т.к. α это угол в ΔABC, то $0° < \alpha < 180°$ сл. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot(AP+PB)\cdot AC\cdot\sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{15}{2}+5\right)\cdot 9\cdot\frac{4}{5} = 25\cdot 9\cdot\frac{1}{5} = 45.$

Ответ: 45.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $3\sqrt{2}\cdot\sin\alpha = b$, $3\sqrt{2}\cdot\cos\alpha = c$.

Тогда $b^2+c^2 = 18(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 18$.

Первое нер-во сист: $(x-b)(y-c) \le 0$

$$\Updownarrow$$

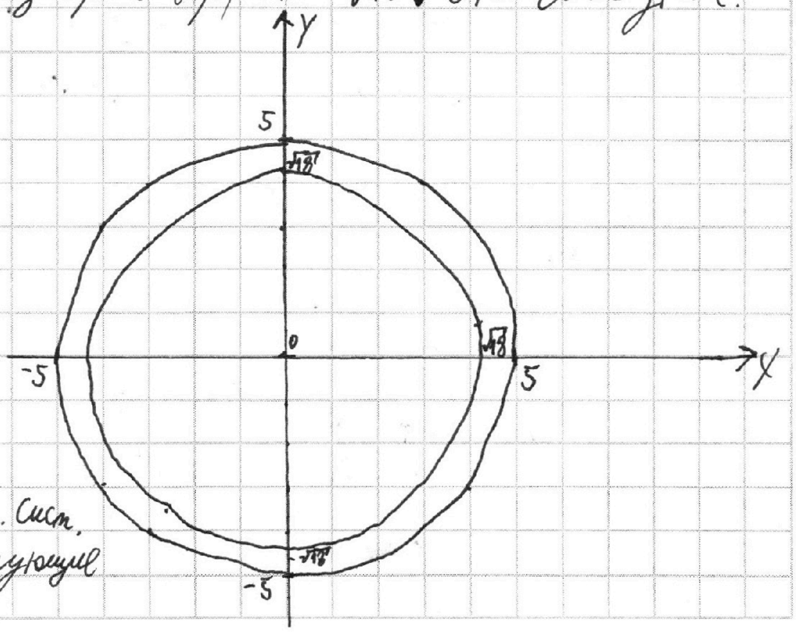
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le b \\ y \ge c \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge b \\ y \le c \end{cases} \end{array}\right. \quad (*)$$

Второе ур. сист.: $x^2+y^2 \le 25$.

$x^2+y^2=25$ Это окр. с центром в $(0;0)$ и $R=5$.

А $x^2+y^2\le 25$ это все точки, лежащие внутри этой окр. (в том числе и на границе)

$b^2+c^2=18$ Это окр. с центром в $(0;0)$ и $R=\sqrt{18}$. Значит знач. α соответствует точка на этой окр.



Пусть мы ~~выб~~ ~~выбрали~~ ~~на~~ зафиксировали точку $A(m;n)$ на окр. с $R=\sqrt{18}$

Тогда в силу $(*)$ реш. сист. будут все точки $(x;y)$, образующие

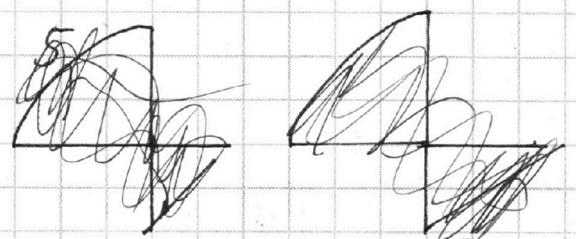
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

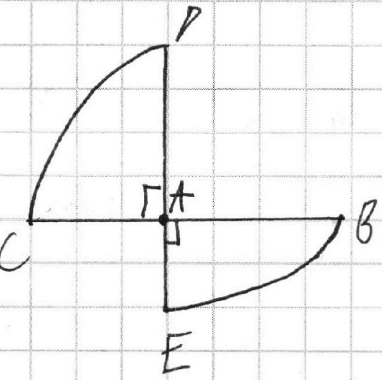
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

такую фигуру:





~~одна периметр этой ф~~

где дуги CP и BE это дуги окр. с $R=5$.

периметр этой фигуры $= P =$ ~~...~~ $l_{\cup CP} + l_{\cup BE} + BC + PE$

(где $l_{\cup CP}$ – длина дуги CP, $l_{\cup BE}$ – длина дуги BE).

Докажем, что $l_{\cup CP} + l_{\cup BE} = 5\pi$:

$\angle CBP = \frac{\cup CP}{2}$, $\angle APB = \frac{\cup BE}{2}$ (как впис. углы, $\cup CP$, $\cup BE$ – гр. меры этих дуг) тогда $\cup BE + \cup CP = (\angle CBP + \angle APB)\cdot 2 =$ $= 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$ (т.к. $PA \perp CB$, то $\angle CBP + \angle APB = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$l_{\cup CP} + l_{\cup BE}$ равна ~~...~~ $\frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$ длине окр ~~...~~ с $R=5$.

т.е. $l_{\cup CP} + l_{\cup BE} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \pi \cdot 5 = 5\pi$.

Таким образом, для максимизации P, надо максимизировать $BC+PE$. Очевидно, что ~~абсциссы~~ ординаты у т. A, B, C одинаковые; ~~ординаты~~ абсциссы т. A, P, E одинаковые.

а ~~...~~ также абсцисса т. C <0 ~~...~~ абсцисса т. B >0

(т.к. от ~~...~~ любой точки $\in$ окр. с $R=\sqrt{18}$ и идя горизонт. налево мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

попадём в т. C абсц. <0, а идя гор. направо попадём в т. C абс. >0).

Ордината т. P >0 (т.к. орд. т. E <0 от любой точки $\in$ окр. с $R=\sqrt{18}$ идя ~~гориз.~~ верт. вверх мы попадём в т. C орд. >0, а идя верт. вниз попадём в т. C орд <0)

~~т.к. $m^2+n^2=18$, то $C(-\sqrt{18-m^2}; n)$, $B(\sqrt{18-m^2}; n)$, $P(m; \sqrt{18-n^2})$ $E(m; -\sqrt{18-n^2})$.~~

~~$BC=2\sqrt{18-m^2}$, $PE=2\sqrt{18-n^2}$~~

т.к. т. B, C, P, E $\in$ окр. с $R=5$, то $C(-\sqrt{25-m^2}; n)$, $B(\sqrt{25-m^2}; n)$, $P(m; \sqrt{25-n^2})$, $E(m; -\sqrt{25-n^2})$.

$BC=2\sqrt{25-m^2}$, $PE=2\cdot\sqrt{25-n^2}$. т.к. $m^2+n^2=18$, то

~~т.к. надо максимизировать $BC+PE=$~~

$BC+PE=2\cdot(\sqrt{m^2+7}+\sqrt{25-m^2})$

По нер-ву между ср. кв. и ср. арифм. (т.к. m^2+7 и $25-m^2$ под корнями, то они ≥ 0 сл. это нер-во можно применять)

$$2\cdot\sqrt{\frac{32}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{m^2+7+25-m^2}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{(\sqrt{m^2+7})^2+(\sqrt{25-m^2})^2}{2}}\geq$$

$$\geq 2\cdot\frac{\sqrt{m^2+7}+\sqrt{25-m^2}}{2}=\frac{BC+PE}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Значит $2\cdot\sqrt{16} \geq \frac{BC+PE}{2}$

$16 \geq BC+PE$

Так как нам нужно найт. знач. $BC+PE$, то равенство в этом нер-ве будет достиг. при $m^2+7=25-m^2$

$m^2=9$

$m=\pm3.$

~~Обратная замена~~ Нетрудно заметить ~~из~~ из (1), что т. $A(m;n)$ это т., у кот. $m=b$, $n=c$.

т.е. $b=\pm3$

~~Обр.~~ обр. зам.: $3\sqrt{2}\cdot\sin\alpha=\pm3$

$\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

$P=5\pi+16$

Ответ: $5\pi+16$; ~~$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n$~~ при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos\pi x = a$

$\sin\pi x = b$. $a^2+b^2=1$

$\cos\pi y = m$

$\sin\pi y = n$. $m^2+n^2=1$

$(b+n)\cdot b = (a+m)\cdot a$

$b^2+nb = a^2+am$.

$1-a^2+nb = a^2+am$

$1+nb = 2a^2+am$.

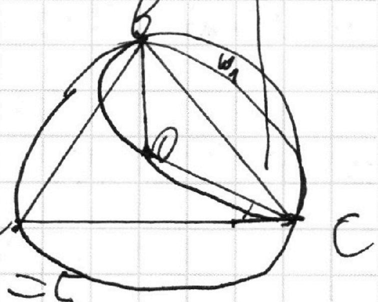
в конце (5)

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$.

$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$. $\alpha=\frac{x+y}{2}$. $\beta=\frac{x-y}{2}$.

$\cos x+\cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$.

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



$a=5$. $-14+2t$. $t=5$.

x один-ков. Увелич. на t билетов

$\boxed{t+4=?}$

$\frac{4+t}{x} = 2{,}5\cdot\frac{t}{x}$.

Вначале кол-во способов $=\frac{4\cdot3}{2}=6$. $4+t=2{,}5t$.

$4=1{,}5t$.

$8=3t$.

$\frac{(t+4)(t+3)}{2}$

$\boxed{t+4=?}$

$2{,}5\cdot\frac{6}{x} = \frac{(t+4)(t+3)}{2x}$

Вер. вначале

$30 = t^2+7t+12$

~~$t(t+7)=0$.~~

$t^2+7t-18=0$.

$(t+9)(t-2)$

$a-1-2m = -3a+1+2t$.

$4a = 2m+2t+2$

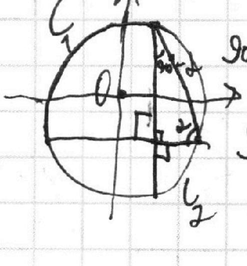
$2a = m+t+1$.

$\alpha=\frac{\smile_1}{2}$

$90^\circ-\alpha=\frac{\smile_2}{2}$

$90^\circ=\frac{\smile_1+\smile_2}{2}$

$\smile_1+\smile_2=180^\circ$ $\smile_1+\smile_2=\pi R$



Сумма дуг всегда πR

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = 1111a = 11 \cdot 101a$ $\vdots 11$. $\not\vdots 11^2$. $\vdots 101$, $\not\vdots 101^2$. $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$.

$B = \overline{mnk}$ какие-нибудь m, n, k равно 2.

$\overline{mnk} \vdots 101$. 101, 202, 303, ...

$C = \overline{3t}$ или $C = \overline{x3}$

$A \cdot B \cdot C \vdots 11^2$ $\frac{BC}{\sin 2\alpha} = R_2$. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$-\cos 2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

I. $C \vdots 11$. Тогда $C = 33$. $\frac{BC}{\sin\alpha} = R_1$. $2 \cdot \cos\alpha = \frac{R_1}{R_2}$

$1010a \cdot \overline{mnk} \cdot 3$ — кв.

$\sin^2\pi x + \sin\pi x \cdot \sin\pi y = \cos^2\pi x + \cos\pi x \cdot \cos\pi y$.

$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_1}$ $11 \cdot a \cdot 2 \cdot C$ $(\sin\pi x - \cos\pi y)(\dots) =$

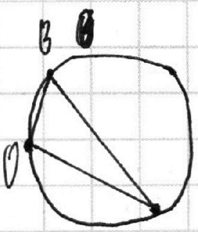
$= \cos(\pi x - \pi y)$.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$k = \frac{x+y}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$. $\sin^2\pi x - \cos^2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$

б/изм

$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$



$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$.

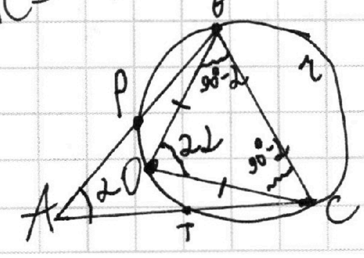
$x = -y-2$. >0

R_2 — рад. у w_2 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

R_1 — рад. у w_1. $\beta = -\alpha$: $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$xy = xy - y + x - 1$

$\angle ATC =$ $\alpha = ?$



$x = y+1$

$BO = CO = AO$

$AT \cdot AC = AP \cdot AB$

R_1''.

Нашли AT, TC.

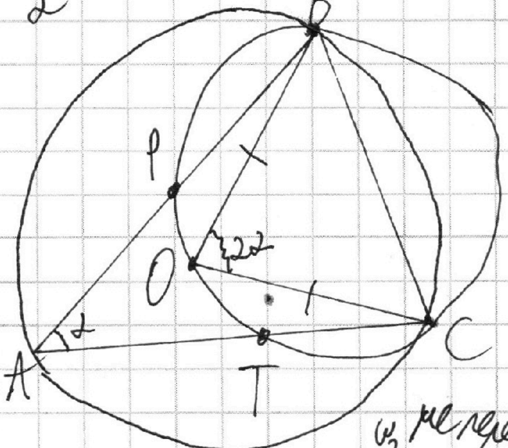
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$AB = \frac{25}{2}$



$7{,}5 \cdot 12{,}5 = 9 \cdot AT$

$\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = 9AT$

$AT = \frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$

ω_2 не пересек. AC.

$\sqrt{\frac{25-n^2+7+m^2}{2}} \geq \frac{\sqrt{25-n^2}+\sqrt{7+m^2}}{2}$

$25-n^2=7+n^2$

$18=2n^2$

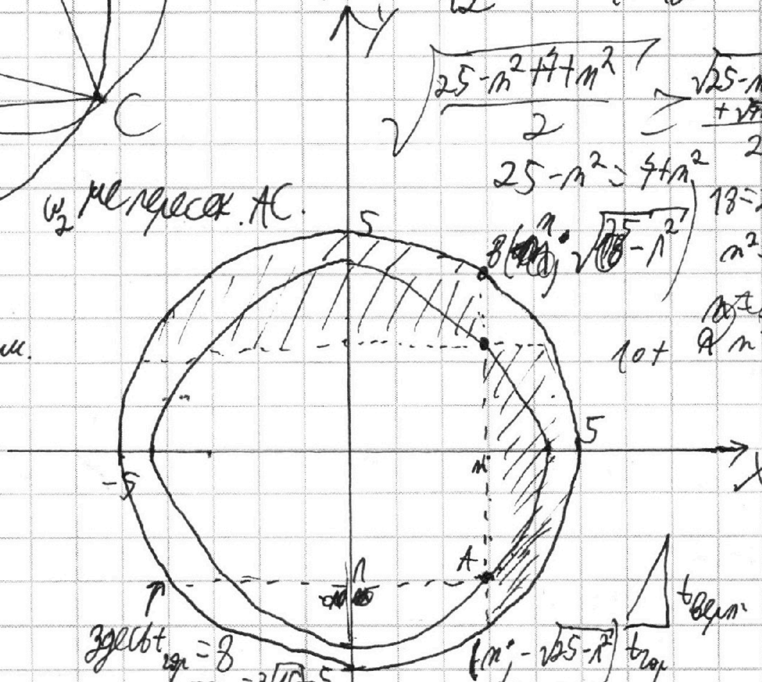
$n^2=9$

$n=3$

№6.

Вся область внутри.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin a \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos a \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin a \\ y \leq 3\sqrt{2}\cdot\cos a \end{cases}\end{array}\right.$$



10+

здесь $t_{гор}=8$

$t_{верт}=3\boxed{16}5$

$t_{верт}$

$t_{гор}$

$\sum = 2\sqrt{25-n^2}$

$3\sqrt{2}\sin a = b$, $3\sqrt{2}\cos a = c$

$b^2+c^2=18$

1 сист:

$x \leq const$

$y \geq const$:

$3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 5$

$\sqrt{18} > 4$

$\sum_{свер} = 2(\sqrt{25-n^2} + \sqrt{25-m^2})$

$x \leq b$

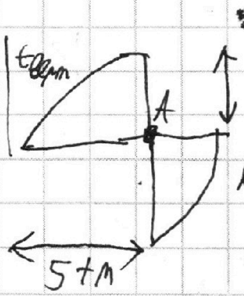
$y \geq c$

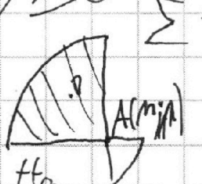
$m^2+n^2=18$.

$\sum = 2\cdot(\sqrt{7+m^2} + \sqrt{25-n^2})$

$/\!/1$

$A(m;n)$.





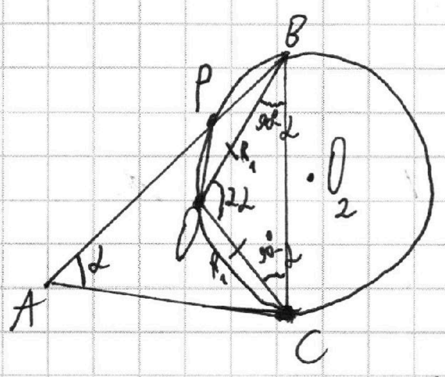
$\Rightarrow P =$ сумма $\underbrace{2(t_{гор}+t_{верт})}_{\text{надо max}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

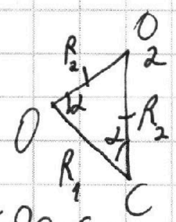


$AC^2 \overset{?}{=} AP\cdot AB$ ← нет

$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = R_2$

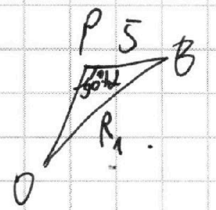
$\frac{BC}{\sin \alpha} = R_1$

$2\cdot\cos\alpha = \frac{R_1}{R_2}$.



$\angle OPB = 90^\circ + \alpha$.

$\angle BPC = 2\alpha$.



$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\alpha$.

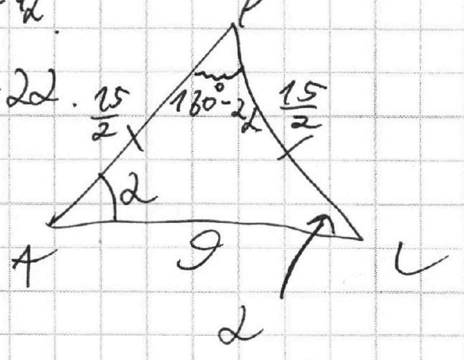
$\angle OO_2C = 2\cdot\angle OBC = 180^\circ - 2\alpha$

$\frac{R_2}{\sin\alpha} = \frac{R_1}{\sin 2\alpha}$

$\angle PBO = \angle PO = \angle BO -$

$\cancel{\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha}$. $\angle BOC = 360^\circ - 4\alpha$

$\angle BPC = 2\alpha$. $\angle APC = 180^\circ - 2\alpha$.



$\Rightarrow AP = PC$.

$\frac{15}{2\sin\alpha} = \frac{9}{\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. $AP = \frac{AC}{2\cos\alpha}$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{25}{\cancel{2}}\cdot 9\cdot\frac{\cancel{4}}{5} = 5\cdot 9 = 45$