МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
X						

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из условия задачи следует, что $A=\overline{aaaa}=1111a=$
$=11\cdot101a$; $B=\overline{bb}$; $C=\overline{cc}$, где $a\neq0$,
$A\cdot B\cdot C=11\cdot101\cdot a\cdot B\cdot C$.

Заметим, что $A\cdot B\cdot C$ кратно 101 (101-простое), т.к. $A\cdot B\cdot C$ это кв. то $A\cdot B\cdot C$ кратно 101^2. С явл. двузнач. числом, сл. $НОД(C;101)=1$, $НОД(11;101)=1$, т.к. a ненулевая цифра, то $НОД(a;101)=1$. Значит необходимо чтобы B было $:101$. Т.к. B двузнач, то B может принимать только следующ. знач: 101, 202, 303, ..., эл. среди этих чисел равно одно содерж. хотя бы 1 двойку – это 202. Значит в слу. усл. задачи $B=202$.

Тогда $A\cdot B\cdot C=101^2\cdot2\cdot11\cdot a\cdot C$. Т.к. $A\cdot B\cdot C$ это кв. и $A\cdot B\cdot C\ \vdots\ 11$, то $A\cdot B\cdot C\ \vdots\ 11^2 \Rightarrow a\ \vdots\ 11$ или $C\ \vdots\ 11$; т.к. a ненул. цифра, то $a\not\vdots\ 11$, сл. $C\ \vdots\ 11$. Единств. двузнач. число $:11$, содерж. хотя бы 1 тройку это 33. Значит $C=33$.

$A\cdot B\cdot C=101^2\cdot2\cdot3\cdot11^2\cdot a$. $A\cdot B\cdot C\ \vdots\ 2$, но $\not\vdots\ 4$; $A\cdot B\cdot C\ \vdots\ 3$, но $\not\vdots\ 9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $\overline{A \cdot B \cdot C}$ кв, то $\overline{A \cdot B \cdot C}$ ⋮ 36 $\Rightarrow$ a ⋮ 6. Единств. между цифра ⋮ 6 это 6., т.е. a = 6.

Тогда A = 6666

Ответ: (6666; 202; 33)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{x+y+2}{xy}$.

Если x уменьш. на 1, y увелич. на 1, то $K=\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$

получ. $\frac{x+y+2}{xy}=\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$.

Т.к. числа x,y положит., то $x>0, y>0, y+1>0$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x\neq 1 \\ xy=(x-1)(y+1) \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Т.к. $x>0, y>0$, то $x+y+2>0$, сл. левая сист. не имеет реш.

Значит

$$\begin{cases} xy=(x-1)(y+1) \quad (1) \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Т.к. $xy>0$, то x и y удв. (1) будут такими, что $(x-1)(y+1)>0$. А т.к. $y+1>0$, то $x-1>0$

т.е. $x>1$, сл. $x\neq 1$.

Значит сист. равносильна (при $x>0, y>0$):

$xy=(x-1)(y+1)$

$x=y+1$

$M=x^3-y^3-3xy=(y+1)^3-y^3-3y(y+1)=1$.

Равенство будет достиг. напр. при $y=2$, $x=3$. Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) Раскрывая скобки, получим:

$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y.$

$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y).$

$\cos(\pi x + \pi y) + \cos(2\pi x) = 0.$

$2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t, \quad t \in Z \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 3x + y = 1 + 2t. \\ x - y = 1 + 2n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3x + 1 + 2t. \\ y = x - 1 - 2n \end{array}\right.$

Пусть $x = a$, где a любое. Тогда имеем реш.

$(a; -3a + 1 + 2t)$, $(a; a - 1 - 2n)$.

Ответ: $(a; -3a + 1 + 2t)$, $(a; a - 1 - 2n)$, где a любое, $t, n \in Z$.

б) В силу ограничений аргументов арксинуса и арккосинуса получаем: $-1 \le \frac{x}{5} \le 1$, т.е. $x \in [-5; 5]$.

$-1 \le \frac{y}{4} \le 1$, т.е. $y \in [-4;4]$.

Как известно, $\arcsin a_1 \le \frac{\pi}{2}$, $\arccos b_1 \le \pi$ (где $a_1 \in [-1;1]$, $b_1 \in [-1;1]$). Значит $\arcsin a_1 + \arccos b_1 \le \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$. А равенство будет только при $a_1 = 1$, $b_1 = -1$.

Значит для всех нер-во и усл. задачи нам подойдут все пары $(x;y)$ такие, что $x \in [-5;5]$, $y \in [-4;4]$, искомую пару, когда в нашем нер-ве достиг. равенство, т.е. $\frac{x}{5} = 1$; $\frac{y}{4} = -1$, т.е. пара $(5;-4)$.

~~Значит на $[-5;5]$ 11 целых чисел, на $[-4;4]$ 9 целых чисел. Значит ответ к задаче будет $11 \cdot 9 - 1 = 98$~~

~~Ответ: 98.~~

В а) получили, что нам подходят все пары вида $(a; -3a+1+2t)$, $(a; a-1-2n)$. Т.к. $x \in [-5;5]$, то $a \in [-5;5]$. Заметим, что на $[-5;5]$ 6 нечёт. чисел и 5 чёт; на $[-4;4]$ 5 чёт, и нечёт. Заметим, что $a \equiv a-2n$ (2), сл. a и $a-1-2n$ разной чётности, причём т.к. по $a-1-2n$ мы получали все значения той чётности, кот. противополож. чётности a.

Если $a \underset{2}{\equiv} -3a \underset{2}{\equiv} -3a+2t$, сл. a и $-3a+1+2t$ разной

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

чётность. ничего н.к. t любое целое, но $-3a+1+2t$ принимает все значения той чётности, кот. противоположна чётности a.

Разберём случаи:

I. a чётно. Имеем 5 вариантов выбрать число a.

Для $-3a+1+2t$ имеем 4 вар. выбора (Это число нечёт, а на $[-4;4]$ 4 нечёт числа).

Для $a-1-2n$ аналогично имеем 4 способа выбрать. Имеем $5\cdot4+5\cdot4=40$ способов.

II. a нечётно. 6 способов выбрать a.

Для $-3a+1+2t$ имеем 5 вар. выбора (Это число чёт, а на $[-4;4]$ 5 чёт чисел).

Для $a-1-2n$ аналогично 5 вар.

Имеем $6\cdot5+6\cdot5=60$ способов.

~~Каждая пара $(a;-3a+1+2t)$, $(a;a-1-2n)$ дают~~
~~область. Это происходит при $-3a+1+2b=a-1-2n$.~~
~~$4a=2+2n+2t$.~~ Заметим, что
~~$2a=n+t+1$.~~ $a-1-2n \underset{2}{\equiv} -3a+1+2t$. Ничего
~~t~~ т.к. n и t любые целые, то каждую пару $(x;y)$ мы

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

посчитали, как $(a; a-1-2n)$ и как $(a; -3a+1+2t)$, т.е. все способы посчитаны дважды.

Значит общее кол-во способов $= \frac{40+60}{2} = 50$.

Причём, как было написано раньше, пару $(5; -4)$ надо исключить (она действительно была посчитана. Достаточно взять $a=5$, $b=5$).

Имеем $50-1=49$,

Ответ: 49

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть всего X одиннадцатиклассников, количество билетов увеличилось на t штук (t - усл $t>0$).

Кол-во способов раздать 4 билета так, чтобы Петя и Вася их получили $= C_4^2 = 6$.

Вероятность того, что Петя и Вася вместе попадут на концерт в начале месяца $= \frac{6}{X}$.

Количество способов раздать $t+4$ билета так, чтобы Петя и Вася их получили $= C_{t+4}^2 = \frac{(t+4)(t+3)}{2}$.

Вероятность того, что Петя и Вася вместе попадут на концерт в конце месяца $= \frac{(t+4)(t+3)}{2 \cdot X}$

Из условия: $\frac{(t+4)(t+3)}{2X} = \frac{6}{X} \cdot 2{,}5$

X очевидно, что $X \neq 0$, т.к. кол-во 11 кл. > 0.

$(t+4)(t+3) = 30$

$t^2 + 7t - 18 = 0$

$(t+9)(t-2) = 0$

Т.к. $t > 0$, то $t = 2$.

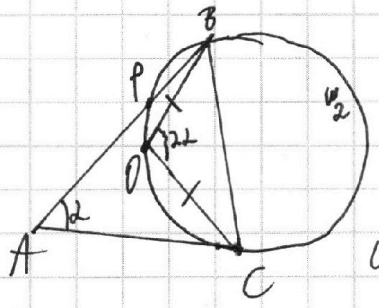
Значит в конце месяца выделено $4+2 = 6$ билетов

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BAC = \alpha$.

$\angle BAC$ вписанный, опир. на дугу BC, $\angle BOC$ центр., опир. на $\cup BC$ (это всё в ω_1). Значит $\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha$.

В ω_2: вписанные углы $\angle BOC$ и $\angle CPB$ опир. на дугу BC $\Rightarrow$ $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$.

$\angle BPC$ внешний для $\triangle APC$ $\Rightarrow$ $\angle BPC = \angle PAC + \angle ACP$

$2\alpha = \alpha + \angle ACP$

$\angle ACP = \alpha$.

Значит $\angle ACP = \angle PAC = \alpha$, см. $\triangle APC$ р/б. Значит $PC = AP = \frac{15}{2}$. Т.к. сумма углов в $\triangle APC$ равна 180°, то $\angle APC = 180^\circ - 2\alpha$. По Т. синусов для $\triangle APC$:

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{AC}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{2AP}$$

$$\cos\alpha = \frac{9}{2 \cdot \frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Т.к. по О.Т.Т. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

т.к. α это угол в ΔABC, то $0° < \alpha < 180°$, ск. $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot (AH + HB) \cdot AC \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 25 \cdot 9 \cdot \frac{1}{5} = 45.$

Ответ: 45.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $3\sqrt{2}\cdot\sin\alpha = b$, $3\sqrt{2}\cdot\cos\alpha = c$.

Тогда $b^2+c^2 = 18(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 18$.

Первое нер-во сист: $(x-b)(y-c)\le 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le b \\ y\ge c \end{cases} \quad (*)$$

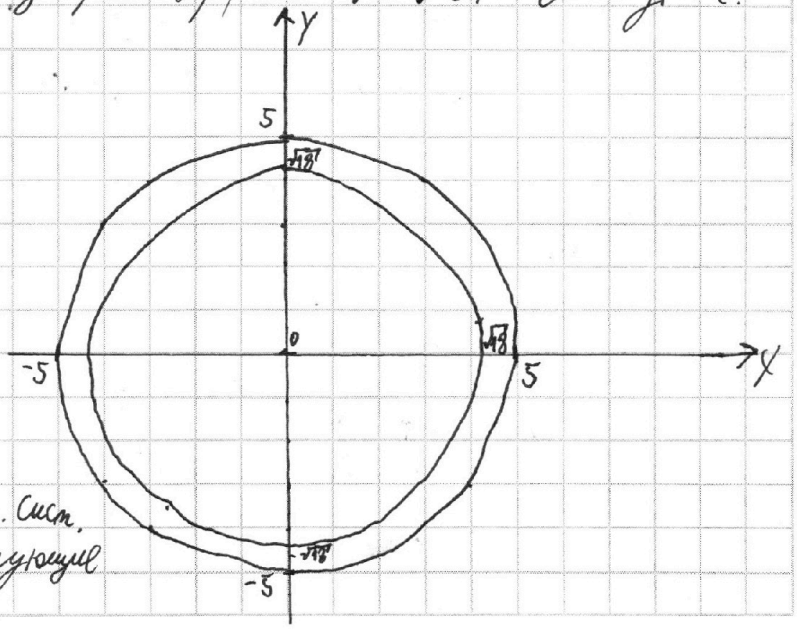
$$\begin{cases} x\ge b \\ y\le c \end{cases}$$

Второе ур. сист.: $x^2+y^2\le 25$.

$x^2+y^2=25$ это окр. с центром в $(0;0)$ и $R=5$.

А $x^2+y^2\le 25$ это все точки, лежащие внутри этой окр. (в т.ч. и на границе)

$b^2+c^2=18$ это окр. с центром в $(0;0)$ и $R=\sqrt{18}$. Значит знач. α соответствует точка на этой окр.



Пусть мы ~~взяли~~ зафиксировали точку $A(x;y)$ на окр. с $R=\sqrt{18}$

Тогда в силу $(*)$ реш. сист. будут все точки $(x;y)$, образующие

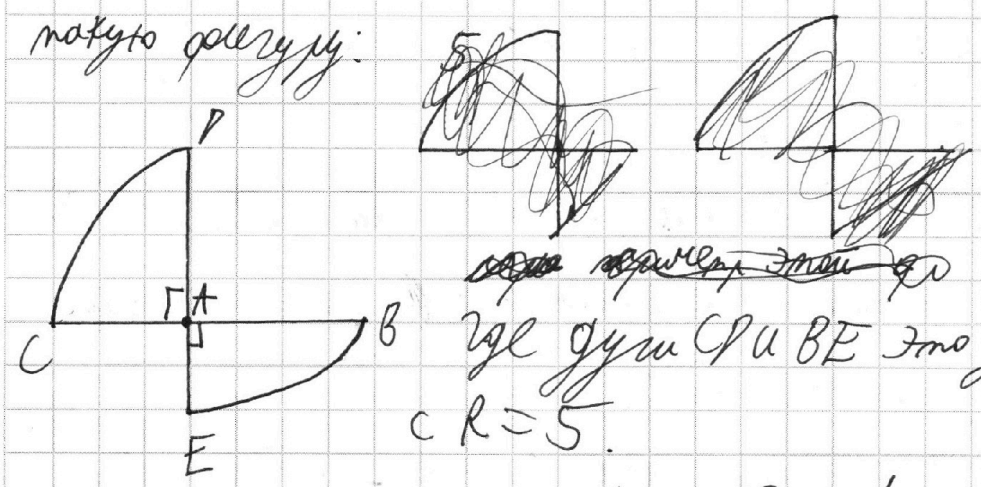
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

такую фигуру:



где дуги CP и BE это дуги окр. с $R=5$.

периметр этой фигуры $= P = l_{\cup CP} + l_{\cup BE} + BC + PE$

(где $l_{\cup CP}$ - длина дуги CP, $l_{\cup BE}$ - длина дуги BE).

Докажем, что $l_{\cup CP} + l_{\cup BE} = 5\pi$:

$\angle CBP = \frac{\cup CP}{2}$, $\angle ADB = \frac{\cup BE}{2}$ (как вписанные углы, $\cup CP$, $\cup BE$ - градусные меры этих дуг) тогда $\cup BE + \cup CP = (\angle CBP + \angle ADB) \cdot 2 =$

$= 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$ (т.к. $DA \perp CB$, то $\angle CBP + \angle ADB = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$l_{\cup CP} + l_{\cup BE}$ равна $\frac{180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}$ длине окр. с $R=5$.

т.е. $l_{\cup CP} + l_{\cup BE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 = 5\pi$.

Таким образом, для максимизации P, надо максимизировать $BC + PE$. Очевидно, что ординаты т. A, B, C одинаковые; абсциссы т. A, P, E одинаковые.

а также абсцисса т. $C < 0$, а абсцисса т. $B > 0$ (т.к. любая точка $\in$ окр. $CR = \sqrt{18}$ идя горизонт. налево мы

попадём в т. С абц. <0, а идя гор. назад попадём в т. С абс. >0).

Ордината т. $P>0$ (т.к. от любой точки $\in$ окр. С $R=\sqrt{18}$ идя вверх мы попадём в т. С орд. >0, а идя вниз попадём в т. С орд <0)

т.к. $n^2+\Lambda^2=18$, то $C(-\sqrt{18-n^2};\Lambda)$,

$B(\sqrt{18-n^2};\Lambda)$, $P(n;\sqrt{18-\Lambda^2})$, $E(n;-\sqrt{18-\Lambda^2})$.

$BC=2\sqrt{18-n^2}$, $PE=2\sqrt{18-\Lambda^2}$

т.к. т. $B,C,P,E\in$ окр. С $R=5$, то $C(-\sqrt{25-n^2};\Lambda)$,

$B(\sqrt{25-n^2};\Lambda)$, $P(n;\sqrt{25-\Lambda^2})$, $E(n;-\sqrt{25-\Lambda^2})$.

$BC=2\sqrt{25-n^2}$, $PE=2\cdot\sqrt{25-\Lambda^2}$. т.к. $n^2+\Lambda^2=18$, то

~~т.к. надо максимизировать~~ $BC+PE=$

$$BC+PE=2\cdot\left(\sqrt{n^2+\Lambda^2}+\sqrt{25-n^2}\right)$$

По нер-ву между ср. кв. и ср. ариф. (т.к. $n^2+\Lambda^2$ и $25-n^2$ под корнями, то они ≥ 0, см. это нер-во можно применять)

$$2\cdot\sqrt{\frac{32}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{n^2+\Lambda^2+25-n^2}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{\left(\sqrt{n^2+\Lambda^2}\right)^2+\sqrt{(25-n^2)}^2}{2}}\geq$$

$$\geq 2\cdot\frac{\sqrt{n^2+\Lambda^2}+\sqrt{25-n^2}}{2}=\frac{BC+PE}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Значит $2 \cdot \sqrt{16} \geq \frac{BC+PE}{2}$

$16 \geq BC+PE$ (*)

Так как нам нужно наиб. знач $BC+PE$, то равенство в этом нер-ве будет достиг. при $n^2+7=25-n^2$

$n^2=9$

$n=\pm 3$.

Нужно заметить из (*), что т. $A(n;1)$ это т., у кот. $n=b$, $1=C$.

т. е. $b=\pm 3$

Обр. зам: $3\sqrt{2} \cdot \sin\alpha = \pm 3$

$\sin\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$, где $n \in Z$.

$P = 5\pi + 16$.

Ответ: $5\pi+16$; Если $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$, где $n \in Z$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos\pi x = a$

$\sin\pi x = b$. $a^2+b^2=1$

$\cos\pi y = n$

$\sin\pi y = 1$. $n^2+1^2=1$

$(b+1)\cdot b = (a+n)\cdot a$

$b^2+1b = a^2+an$.

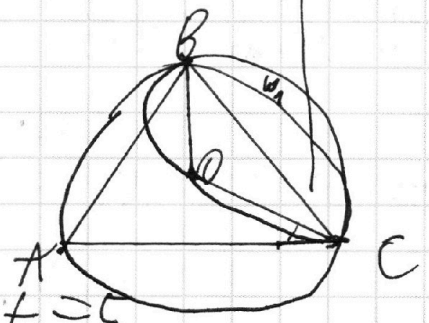
$1-a^2+1b = a^2+an$

$1+1b = 2a^2+an$.

$\cos(2x+\beta) + \cos(2x-\beta) = 2\cdot\cos x\cdot\cos\beta$.

$\begin{cases} 2x+\beta = x \\ 2x-\beta = y \end{cases}$. $2x = \frac{x+y}{2}$. $\beta = \frac{x-y}{2}$.

$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$.



$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a=5$. $-14+2t$. $t=5$.

X один-ков. Увелич. на t билетов.

$\frac{4+t}{x} = 2{,}5\cdot\frac{t}{x}$.

Вначале кол-во способов $= \frac{4\cdot3}{2} = 6$. $4+t = 2{,}5t$.

$4 = 1{,}5t$. $t = 3t$.

$2{,}5\cdot\frac{6}{x} = \frac{(t+4)(t+3)}{2x}$

$(t+4)(t+3)$

$t+4=?$

$\frac{(t+4)(t+3)}{2}$

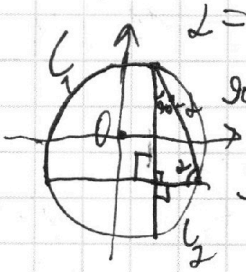
$t+4=?$

$a-1-2n = -3a+1+2t$.

$4a = 2n+2t+2$

$2a = n+t+1$.

Вер. в начале



$\alpha = \frac{\angle_1}{2}$

$90^\circ - \alpha = \frac{\angle_2}{2}$

$90^\circ = \frac{\angle_1+\angle_2}{2}$

$\angle_1+\angle_2 = 180^\circ$ $\angle_1+\angle_2 = \pi R$

Сумма $\angle$ всегда πR

36

$t^2+4t+12$

$t(t+4)=0$.

$t^2+4t-12=0$.

$(t+6)(t-2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa}$ $= 1111a$ $= 11 \cdot 101a$ $\vdots 11^2$ $\vdots 101$, $\vdots 101^2$ $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

$\Downarrow$

$B = \overline{mlk}$ m, l, k равны 2. $mlk \vdots 101$.

101, 202, 303, ...

$C = \overline{3t}$ или $C = \overline{x3}$

$A \cdot B \cdot C \ldots \vdots 11^2$ $\frac{BC}{\sin 2\alpha} = R_2$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$\Downarrow$ $\cos 2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$\exists\, C : 11$. Тогда $C = 33$. $\frac{BC}{\sin 2\alpha} = R_1$. $2\cdot\cos 2\alpha = \frac{R_1}{R_2}$

$1010 \cdot \overline{mlk} \cdot 3$ кв.

$\sin^2\pi x + \sin\pi x \cdot \sin\pi y = \cos^2\pi x + \cos\pi x \cdot \cos\pi y$.

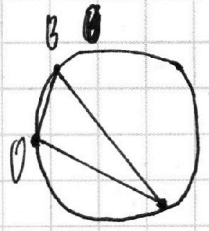
$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot C$ $(\sin\pi x - \cos\pi y)(\ldots) =$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$ $= \cos(\pi x - \pi y)$.

$\sin^2\pi x - \cos^2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$

$K = \frac{x+y}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$.

$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$



б/ц или $-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$.

$x = -y - 2$. > 0

$xy - 2 > 0$

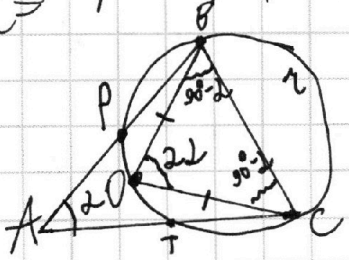
R_2 – рад. у ω_2 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

R_1 – рад. у ω_1. $\beta = -\alpha$: $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$\alpha = ?$

$xy = xy - y + x - 1$

$\angle ATC =$



$x_1 = x+1$

$BO = CO = AO$

R_1''.

$AT \cdot AC = AP \cdot AB$

Найти AT, TC.

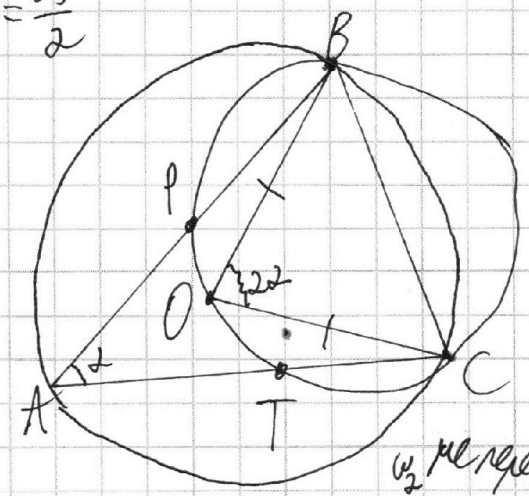
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$AB = \frac{25}{2}$



$\frac{15}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 12{,}5 = 9 \cdot AT$

$\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = 9AT$

$AT = \frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$

$\sqrt{\frac{25-n^2+7+n^2}{2}} = \frac{\sqrt{25-n^2}+\sqrt{7+n^2}}{2}$

$25 - n^2 = 7 + n^2$

$18 = 2n^2$

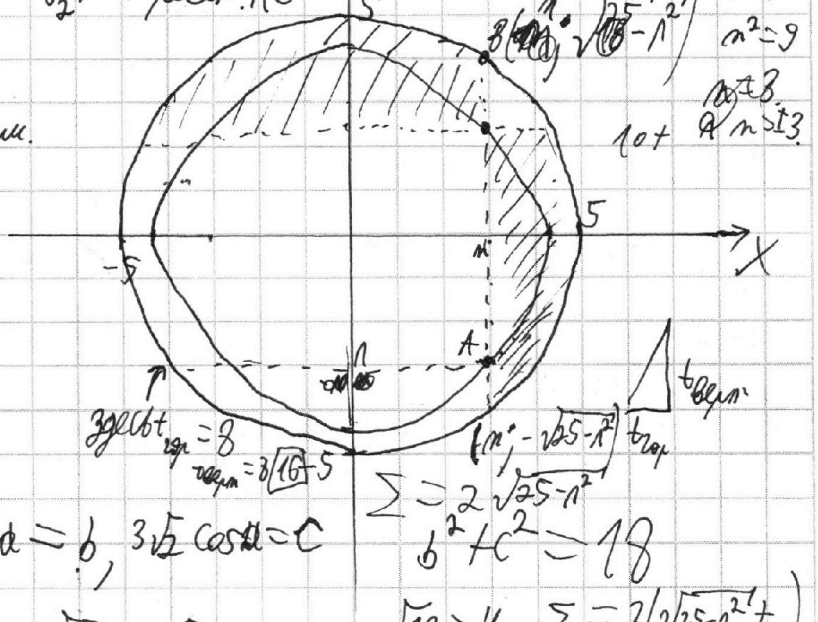
$n^2 = 9$

$n = 3$

v_2 мелкая. AC.

№6.

Вся область внутри.



$\begin{cases} x \le 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \ge 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \ge 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \le 3\sqrt{2}\cdot\cos\alpha \end{cases}$

1 сист.

$3\sqrt{2}\sin\alpha = b,\ 3\sqrt{2}\cos\alpha = c$

$b^2 + c^2 = 18$

$x \le const$

$y \ge const$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 5$

$\sqrt{18} > 4$

$x \le b$

$y \ge c$

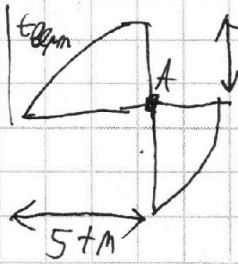
$\Sigma = 2\sqrt{25-n^2}$

$\Sigma_{итог} = 2(\sqrt{25-n^2}+\sqrt{25-m^2})$

$n^2 + n^2 = 18.$

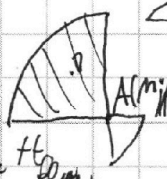
$\Sigma = 2\cdot(\sqrt{7+n^2}+\sqrt{25-n^2})$

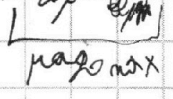
$t_{гор}$



$A(n;1)$

$S_{гор} = S_{прям} + t_{гор} \cdot t_{верт}$





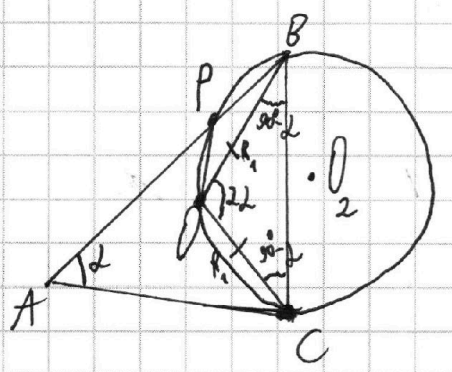
//

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

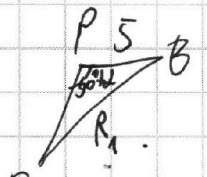
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

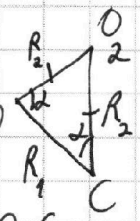


$AC^2 = AP \cdot AB$ ← кеп

$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = R_2$ ↑ : $2\cos\alpha = \frac{R_1}{R_2}$.

$\frac{BC}{\sin\alpha} = R_1$





$\angle OPB = 90° + \alpha$.

$\angle BPC = 2\alpha$. $\angle OO_2C = 2 \cdot \angle OBC =$

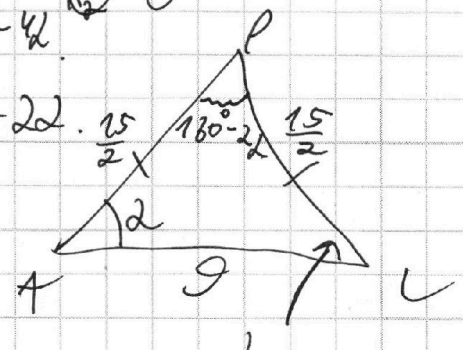
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$. $= 180° - 2\alpha$

$\frac{R_2}{\sin\alpha} = \frac{R_1}{\sin 2\alpha}$

$\angle PBO = \angle PO = \angle BO -$

~~$\angle BOC = 360° - 2\alpha$~~ $\angle BOC = 360° - 4\alpha$.

$\angle BPC = 2\alpha$. $\angle APC = 180° - 2\alpha$.



$\Rightarrow AP = PC$.

$\frac{15}{2\sin\alpha} = \frac{9}{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. $AP = \frac{AC}{2\cos\alpha}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 5 \cdot 9 = 45$