



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

$$A = \overline{xxxx} = x \cdot 1111 \quad x \in [1; 9]$$

$$A = x \cdot 11 \cdot 101 \quad \text{т.е.} \quad A : 11; 101, \text{ но } x < 11 \Rightarrow \begin{cases} A : 11^2 \\ A : 101^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} A \cdot B \cdot C : 101 \\ A \cdot B \cdot C : 11 \end{cases} \Rightarrow ABC - \text{квадрат} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B \cdot C : 101^2 \\ A \cdot B \cdot C : 11^2 \end{cases}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} B \cdot C : 101 & ① \\ B \cdot C : 11 & ② \end{cases}$$

$$\text{Но! } 101 \text{ и } 11 - \text{простые} \Rightarrow \begin{cases} B : 101 \\ C : 101 \end{cases} \text{ но } C < 100 \text{ и 2-значности}$$

$$\downarrow \\ B : 101 \Rightarrow B = \overline{aa} \text{ где } a \in [1; 9] \\ \text{но в написании } B \text{ есть цифра } '7' \Rightarrow B = 707$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B : 11 & \text{но } B = 707 \Rightarrow B : 11 \\ C : 11 & - \end{cases} \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = \overline{bb} \text{ где } b \in [1; 9] \\ \text{но } C \text{ содержит цифру } '1' \Rightarrow C = 11$$

$$A \cdot B \cdot C = (x \cdot 101 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 101) \cdot (11) = (x \cdot 7) (101)^2 \cdot (11) - \text{квадрат}$$

$$\downarrow \\ x \cdot 7 - \text{квадрат} \\ \text{но } 7 - \text{простое} \Rightarrow x : 7 \\ \downarrow \\ x = 7$$

Ответ: (7777, 707, 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√2

По условию:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\textcircled{I} \quad x+y+3=0$$

$$y = -(x+3)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x+y+3 > 0$$

противоречие!

$$(x-4)(y+4) = xy$$

$$4x - 4y - 16 = 0$$

$$x - y = 4$$

$$\textcircled{II} \quad x = y + 4$$

$$\begin{aligned} \text{II. } M &= (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - \\ &- 12y^2 - 48y = 64 \quad (\leftarrow \text{достигаем } y=1, x=5 \text{ (минимум)}) \end{aligned}$$

$$\text{I: } M = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) = x^3 + x^3 +$$

Ответ:  $M \in \{64\}$ .

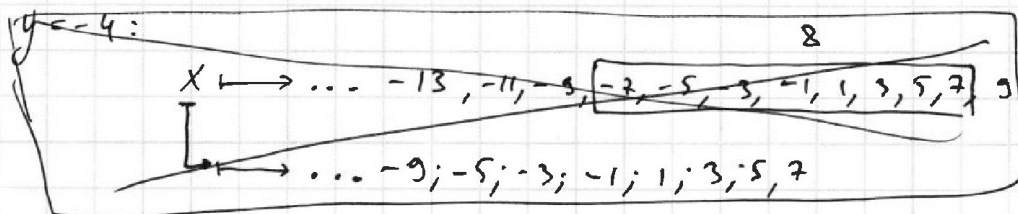


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$y - \text{нечет} \Rightarrow \begin{matrix} (3y-1) - \text{неч} \\ (1-y) - \text{неч} \end{matrix} \quad \text{но } \boxed{+2k} - \text{любое четное}$$

$$\Downarrow \\ y - \text{неч} \rightarrow x - \text{любое нечетное} \\ \text{но } x \in [-7; 7]$$

$$\underbrace{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7}_8$$

$$y - \text{нечет}: \begin{matrix} (3y-1) - \text{неч} \\ (1-y) - \text{неч} \end{matrix} \quad \boxed{+2k} - \text{любое четное}$$

$$y - \text{нечет} \rightarrow x - \text{любое четное} \\ x \in [-7; 7]$$

$$\underbrace{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6}_7$$

$$\Downarrow \\ \begin{array}{c|cccccccc} y & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{кол-во } (x; y) & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 \end{array} = 68 \quad \boxed{\text{но}}$$

Нам надо вычесть 1 вариант, когда  $(y=4; x=7)$   
ведь это случай "неч"

Ответ: 67



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

а)

$$\sin^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) = \sin(\pi y) \cdot \sin(\pi x) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$-\cos(2\pi y) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\pi - 2\pi y = \pm(\pi y - \pi x) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1 - 2y = \pm(y - x) + 2k$$

$$1 - 2y = y - x + 2k$$

$$x = 3y - 1 + 2k$$

$$1 - 2y = x - y + 2k$$

$$x = 1 - y + 2k$$

(или можем  $k \leftrightarrow -k$ )  
т.е.  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot (-1)$

Ответ:  $(y, 3y - 1 + 2k)$  где все  $k \in \mathbb{Z}$   
 $(y, 1 - y + 2k)$  где все  $k \in \mathbb{Z}$

б)

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) \geq 0 \quad \text{так как} \quad \frac{x}{7} \in [-1; 1]$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{так как} \quad \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} y \in [-4; 4] \\ x \in [-7; 7] \end{cases}$$

$$\text{и не подходит вариант} \begin{cases} \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{7} = -1 \end{cases}$$

$$y \in [-4; 4] \quad \text{но} \quad x, y \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$x \in [-7; 7]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

A - всего 12 месяцев

x - число дней в конце месяца.

1) вероятность того что их одна выберет, в начале месяца дня:

$$P_0 = \frac{C_{A-2}^2}{C_A^4} \leftarrow \begin{array}{l} \text{т.к. 2 дня уже выданы Васе и Пете} \\ \text{(хорошие варианты)} \end{array}$$

↖ всего вариантов

$$P_0 = \frac{\frac{(A-2)!}{(A-4)! \cdot 2!}}{\frac{A!}{(A-4)! \cdot 4!}} = \frac{(A-2)! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{A! \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{A \cdot (A-1)}$$

2) вероятность в конце месяца:

$$P_1 = \frac{C_{A-2}^{x-2}}{C_A^x} \leftarrow \begin{array}{l} \text{т.к. 2 дня уже выданы В. и П.} \\ \text{(х-рые варианты)} \end{array}$$

↖ всего вариантов

$$P_1 = \frac{\frac{(A-2)!}{(A-x)! \cdot (x-2)!}}{\frac{A!}{(A-2)! \cdot x!}} = \frac{\frac{x!}{(x-2)!}}{A(A-1)} = \frac{x(x-1)}{A(A-1)}$$

$$3) \frac{P_1}{P_0} = 12 \quad \text{т.к.} \quad \frac{x(x-1)}{4 \cdot 3} = 12$$

$$x^2 - x = 11 \cdot 12$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

по Виета:  $\begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -11 \end{cases}$  по условию  $x > 4 \Rightarrow x = 12$

Ответ: 12 дней



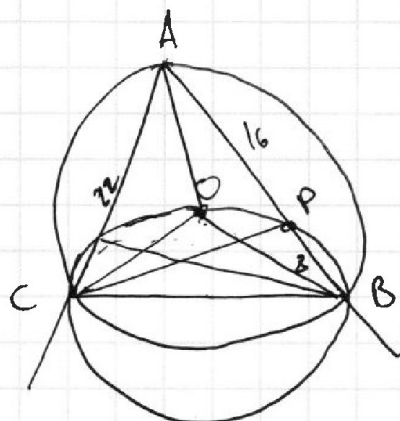
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5



$$1) \angle OBP = \angle OAP \text{ (по вписанности)}$$

$$2) \text{ но! } \angle OBP = \angle OAP \text{ т.к. } OA = OB$$

$$\Downarrow$$

$$\angle OCP = \angle OAP$$

$$3) \angle ACO = \angle CAO \text{ т.к. } OA = OC$$

$$4) \angle CAB = \angle CAO + \angle OAB = \angle ACO + \angle OBP$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ACP$$



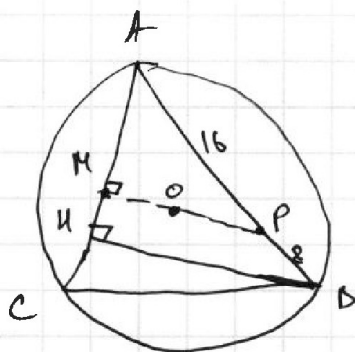
$$\text{т.е. } \angle CAP = \angle ACP \Rightarrow AP = PC$$

$$5) \triangle APC - \text{равнобедренный} \Rightarrow P - \text{лежит на середине } AC$$

$$\text{но и } O \text{ лежит на середине } AC$$



$$PO - \text{середина } AC.$$



$$6) M - \text{середина } AC$$

$$BM - \text{высота в } \triangle ABC$$

$$7) \begin{cases} AM = AC/2 = 11 \\ AP = 16 \end{cases} \Rightarrow MP = \sqrt{16^2 - 11^2} \text{ по т. Пифагора}$$

$$MP = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$$

$$8) PM \parallel MB \Rightarrow \text{по т. Фалеса } AP:AB = 2:3$$

$$\text{т.к. } MP:MB = 2:3 \Rightarrow MB = \frac{MP}{2} \cdot 3$$

$$9) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2} \cdot 3 = \frac{11 \cdot 9 \cdot \sqrt{15}}{2}$$

Ответ:  $\frac{99\sqrt{15}}{2}$ .

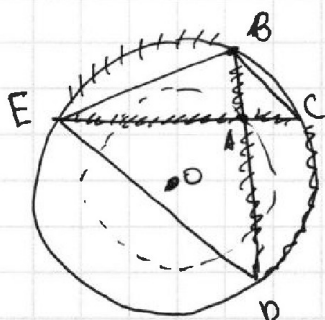


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

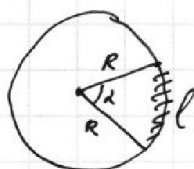


$$M = BD + EC + \overline{EB} + \overline{CD}$$

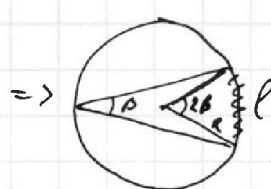
$$\begin{aligned} (*) \text{ но: } \overline{EB} + \overline{CD} &= 4 \cdot \frac{\angle EAB}{2\pi} \cdot R \cdot \pi + 4 \cdot \frac{\angle DBC}{2\pi} \cdot R \cdot \pi = \\ &= \frac{\angle ECA + \angle DBC}{2\pi} \cdot R \cdot 2\pi, \text{ но } \angle BAC = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{EB} + \overline{CD} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 2}{2\pi} \cdot R \cdot 2\pi = \pi R_1 = 6\pi$$

(\*) длина дуги:



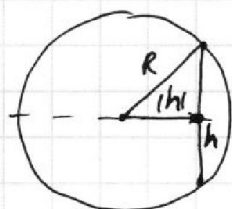
$$l = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi R$$



$$l = \frac{26}{2\pi} \cdot 2\pi R$$

$$l = \frac{26}{2\pi} \cdot 4\pi R$$

$$M = BD + EC + 6\pi$$



— длина хорды вырезанной углом  $\alpha = h$  в круге радиусом R:

$$f(h) = 2\sqrt{R^2 - h^2}$$

Аналогично  $y = h$  (всё то же самое только на  $90^\circ$ )

⇓

$$M = 6\pi + \int (4\sin(\alpha)) + \int (4\cos(\alpha))$$

$$M = 6\pi + 2\sqrt{R^2 - 16\sin^2(\alpha)} + 2\sqrt{R^2 - 16\cos^2(\alpha)} \quad (R = R_1 = 6)$$

$$\text{Нам надо } M_{\min} \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 16\sin^2(\alpha)} + \sqrt{R^2 - 16\cos^2(\alpha)} - \min.$$

$$\left( \sqrt{R^2 - 16\sin^2(\alpha)} + \sqrt{R^2 - 16\cos^2(\alpha)} \right)^2 - \min$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

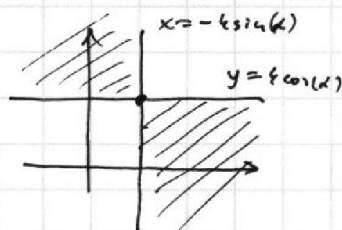
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x+4\sin(\alpha))(y-4\cos(\alpha)) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36; \end{cases}$$

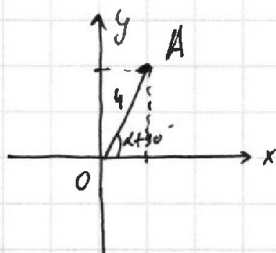
II. — круг с центром в  $(0;0)$  и  $R=6$

I. где true:  $x = -4\sin(\alpha)$   
 $y = 4\cos(\alpha)$



зашраени  
участки, где I  $\leq 0$

Пусть A — точка, такая:

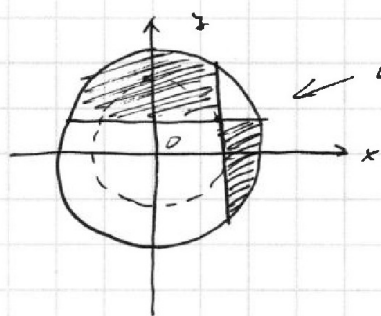


т.е.  $OA=4$   
а также  $\angle xOA = \alpha + 90^\circ$   
т.е.  $\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$

Тогда!  $X_A = +4\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$   
 $Y_A = +4\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

т.е.  $X_A = -4\sin(\alpha)$   
 $Y_A = 4\cos(\alpha)$

тогда A — любая точка на окружности с центром в  $(0;0)$  и  $R=6$ .



окружность или фигура.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А это можно самое, что:

$$2R^2 - 16(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + \sqrt{R^2 - 16\sin^2(\alpha)} \sqrt{R^2 - 16\cos^2(\alpha)} - \max$$

$$\frac{2R^2 - 16 + \sqrt{(R^2 - 16\sin^2(\alpha))(R^2 - 16\cos^2(\alpha))}}{\text{const}} - \max$$

$$\sqrt{(R^2 - 16\sin^2(\alpha))(R^2 - 16\cos^2(\alpha))} - \max$$

$$(R^2 - 16\sin^2(\alpha))(R^2 - 16\cos^2(\alpha)) - \max$$

$$R^4 - R^2 \cdot 16 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + 16^2 \cdot \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) - \max$$

$$\frac{R^4 - 16R^2 + 16 \cdot 4 \cdot (2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha))^2}{\text{const}} - \max$$

$$(2 \sin(\alpha) \cos(\alpha))^2 - \max$$

$$\sin^2(2\alpha) - \max$$

$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k}$$

$$M_{\max} = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

Ответ:  $M_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

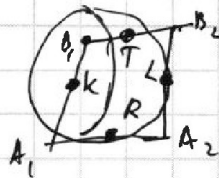
1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА  
 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

1) Рассмотрим одну из данных задач и  $\Omega$ :



← считаем что наша усеченная пирамида:  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$   
 и все прямые  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$  пересекаются в точке  $C$ .

$$\begin{cases} B_1K = B_1T \\ A_1K = A_1R \\ A_2R = A_2L \\ B_2T = B_2L \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_1B_2 + A_1A_2 = B_1A_1 + A_2B_2$$

$A_1, B_1, B_2, A_2$  — описанный

и имеем точки касания  
 вписанной в него окружности, то  
 $K, T, L, R$

а также  $O_\Omega$  — лежит на средней  
 линии  $TR$ .

2) Пусть  $CH$  — высота вписанного  $\triangle A_1 \dots A_n$

тогда в силу того что картинка не меняется  
 от поворота на  $\frac{2\pi}{n}$  (где  $n$  — число вершин в основании)

то!  $\Rightarrow O_\Omega$  и  $O_\omega$  лежат на  $CH$ . (можно считать  
 $CH$  — осью поворота)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

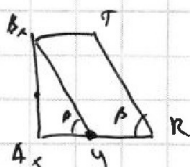
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$r = \sqrt{k \cdot k\alpha} = k\sqrt{\alpha} \quad \left( \begin{array}{l} T_x = TB_x \\ R_x = RA_x \end{array} \right)$$

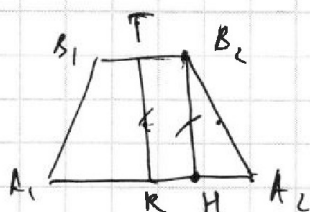
$$\angle TRA_x = \beta :$$



$$\sin(\beta) = \frac{b_x A_x}{b_x y} = \frac{2r}{TR}$$

$$\sin(\beta) = \frac{2r}{k+k\alpha} = \frac{2k\sqrt{\alpha}}{k(1+\alpha)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

4) из  $[k \sim 1]$ :  $A_1 B_1 + A_2 B_2 = A_1 A_L + B_1 B_2$



$$\Rightarrow TB_2 + RA_L = B_2 A_L$$

$$\text{из } RA_L = N$$

$$\downarrow$$

$$TB_2 = N\alpha$$

$$\downarrow$$

$$KA_L = N(1-\alpha)$$

$$B_2 A_L = \sqrt{B_2 K^2 + KA_L^2} = \sqrt{TR^2 + KA_L^2}$$

$$B_2 A_L = \sqrt{k^2(1+\alpha)^2 + N^2(1-\alpha)^2}$$

$$N(1+\alpha) = \sqrt{k^2(1+\alpha)^2 + N^2(1-\alpha)^2}$$

$$N^2(1+\alpha)^2 = k^2(1+\alpha)^2 + N^2(1-\alpha)^2$$

$$N^2(2\alpha \cdot 2) = k^2(1+\alpha)^2$$

$$4 \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{k^2}{N^2}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{\frac{k^2}{N^2}}}{\sqrt{\frac{k^2}{N^2}}} = \sqrt{\frac{k^2}{N^2}} = \frac{k}{N}$$

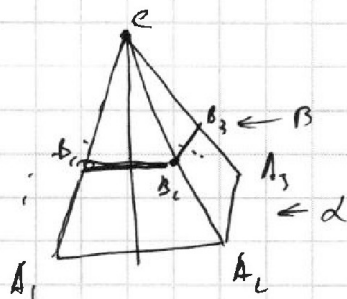


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если  $B_x$  — точка касания  $\omega$  и  $n$ -пл  $\beta$   
 $A_x$  — точка касания  $\omega$  и  $n$ -пл  $\alpha$

то:  $OA_x \perp \alpha$

$OB_x \perp \beta$

но  $\begin{cases} CH \perp \alpha \perp \beta \text{ (т.к. } \alpha \parallel \beta) \\ CH \supseteq O\omega \end{cases}$

$\Downarrow$

$A_x, B_x \in CH$  (и  $A_x, B_x$  — центры  $A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_n$ )

③ вспомним н.п.з. внем



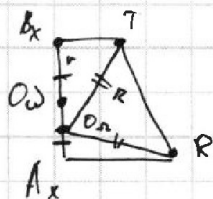
но  $A_1B_1, B_1A_2$  — равносторонние треугольники.

$\Downarrow$

$T, R$  — середины

$B_1B_2$  и  $A_1A_2$

Тогда можно рассмотреть  
 элемент  $CHTR$ :



$n$  — радиус  $\omega$

$R$  — радиус  $\Omega$

и есть  $k$  — радиус вписанной окружности в  $A_1 \dots A_n$

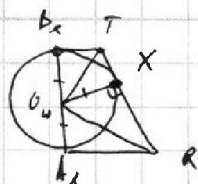
$A \cdot d$  — коэффициент подобия  $A_1 \dots A_n$

и  $B_1 \dots B_n$

$\Downarrow$

$A_1R = k$

$B_xT = k \cdot d$



$\angle TOX + \angle XOR$

$\angle B_xOT + \angle A_xOR$

$\Downarrow$

$\angle TOX + \angle XOR = 90^\circ$

$\angle TOR = 90^\circ$

$\Rightarrow OX = \sqrt{TX \cdot XR}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

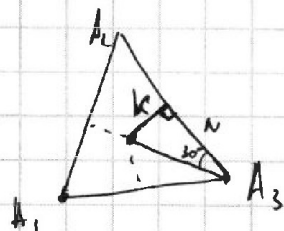
6  
☐

7  
☒

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по  $n=3$ :



$\rightarrow A_1, A_2, A_3$  — равносторонний  $\Rightarrow \frac{h}{n} = \lg(30^\circ)$

$$\lg(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Итого Ответ:  $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

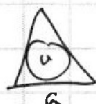
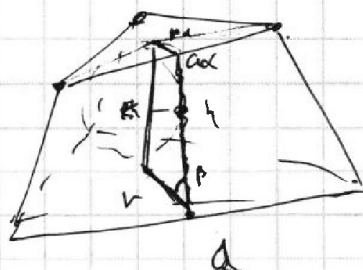


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = r$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

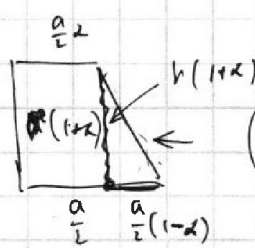
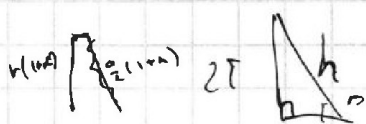
$$r \cdot h \alpha = T^2$$

$$T = r \cdot \sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a \alpha$$

$$\frac{2T}{\alpha}$$

$$\frac{2T}{h} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} a \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{6} a (1+\alpha)} = 2 \frac{\alpha}{1+\alpha}$$



$$\left( \frac{a}{2} (1+\alpha) \right)^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 (1-\alpha)^2 + (v(1+\alpha))^2$$

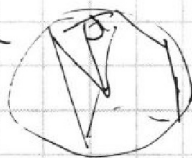
$$v(1+\alpha) < \frac{a}{2} (1+\alpha)$$

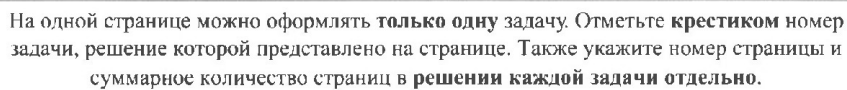
$$v < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \alpha = v(1+\alpha)$$

$$\frac{2v}{1+\alpha}$$

$$v > h$$

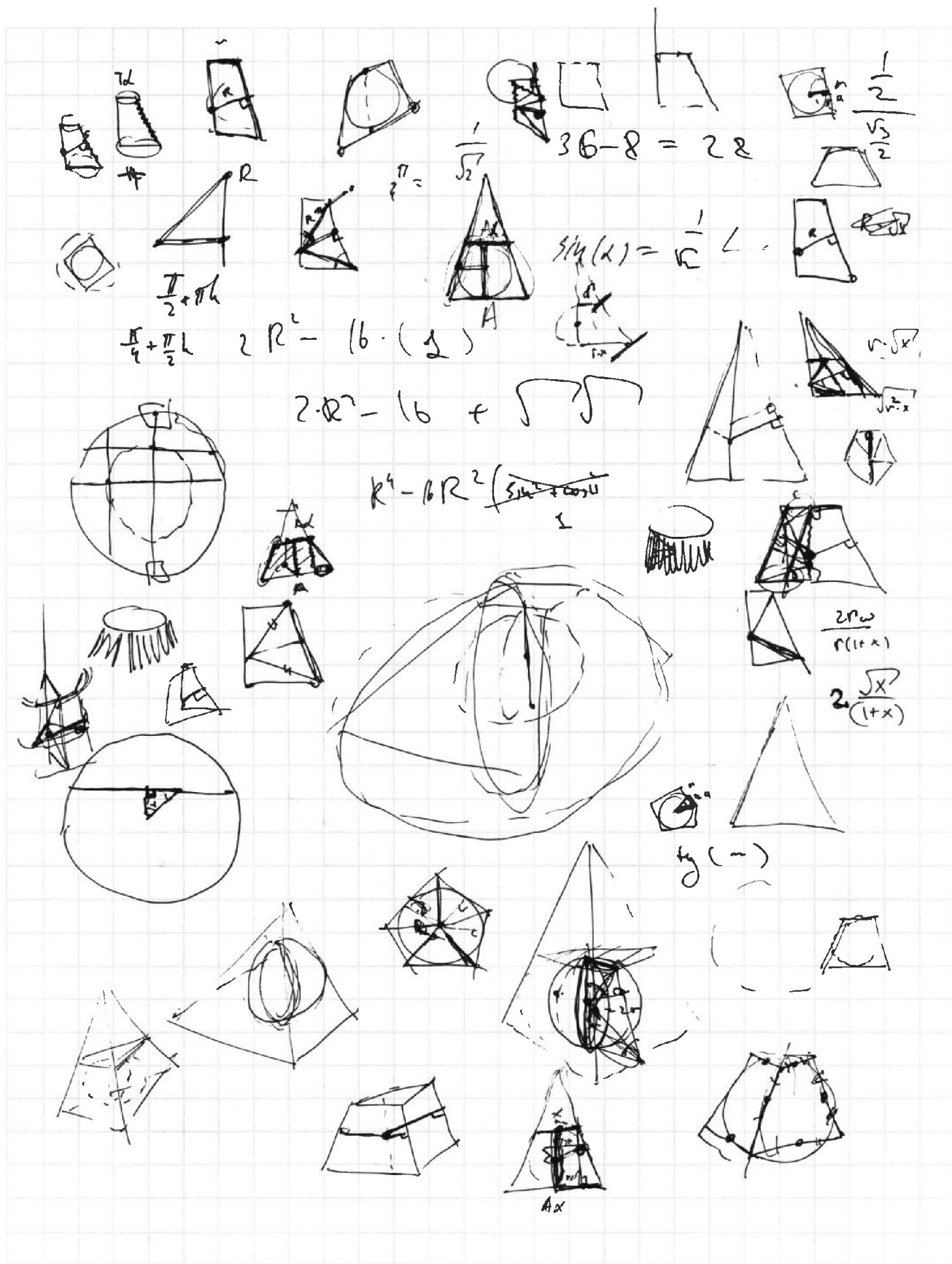




7  
X

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

