



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пирча QR-кода недопустима!

~ 1

$$A = \overline{xxxx} = x \cdot 1111 \quad x \in [1; 9]$$

$$A = x \cdot 11 \cdot 101 \quad \text{т.е.} \quad A: 11; 101, \text{ но } x < 11 \Rightarrow \begin{cases} A: 11^2 \\ A: 101^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} A \cdot B \cdot C: 101 \\ A \cdot B \cdot C: 11 \end{cases} \text{ но } ABC - \text{квадрат} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B \cdot C: 101^2 \\ A \cdot B \cdot C: 11^2 \end{cases}$$

$$\text{Поиск: } \begin{cases} B \cdot C: 101 & \textcircled{1} \\ B \cdot C: 11 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{но! } 101 \text{ и } 11 - \text{простые} \Rightarrow \begin{cases} B: 101 \\ C: 101 \end{cases} \text{ но } C < 100 \text{ и не-гвоздики}$$

$$\Downarrow B: 101 \Rightarrow B = \overline{a0a} \text{ где } a \in [1; 9] \\ \text{но } B \text{ содержит } B \text{ с цифрой } '7' \Rightarrow B = 707$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B: 11 & \text{но } B = 707 \Rightarrow B: 11 \\ C: 11 & - \end{cases} \Rightarrow C: 11 \Rightarrow C = \overline{bb} \text{ где } b \in [1; 9] \\ \text{но } C \text{ содержит цифру } '1' \Rightarrow C = 11$$

$$A \cdot B \cdot C = (x \cdot 101 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 101) \cdot (11) = (x \cdot 7) (101)^2 \cdot (11)^2 - \text{квадрат}$$

$$\Downarrow x \cdot 7 - \text{квадрат} \\ \text{но } 7 - \text{простое} \Rightarrow x: 7 \\ \Downarrow x = 7$$

Ответ: (7777, 707, 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

По условию:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 4 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

Ⓘ $x+y+3=0$

$$y = -(x+3)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$x+y+3 > 0$ проверка!

Ⓜ $(x-4)(y+4) = xy$

$$4x - 4y - 16 = 0$$

$$x - y = 4$$

Ⓜ $x = y + 4$

Ⓜ $M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$ (\leftarrow достигаем $y=1, x=5$ (целые))

~~Ⓜ $M = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) = x^3 + x^3 +$~~

Ответ: $M \in \{64\}$.

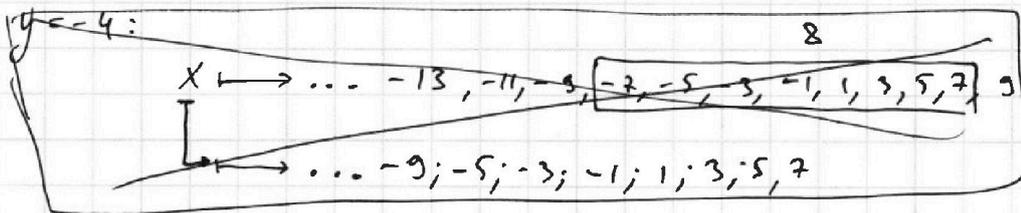


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 y \text{ - чет} &\Rightarrow (3y-1) \text{ - чет} && \text{но } \boxed{+2k} \text{ - любое четное} \\
 &(1-y) \text{ - чет} && \Downarrow \\
 &&& y \text{ - чет} \rightarrow x \text{ - любое четное} \\
 &&& \text{но } x \in [-2; 2] \\
 &&& \Downarrow \\
 &&& \underline{-2; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7} \\
 &&& 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \text{ - нечет: } &(3y-1) \text{ - нечет} && \boxed{+2k} \text{ - любое четное} \\
 &(1-y) \text{ - нечет} && \Downarrow \\
 &&& y \text{ - нечет} \rightarrow x \text{ - любое нечетное} \\
 &&& x \in [-2; 2] \\
 &&& \underline{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6} \\
 &&& 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 y & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \hline
 \text{кол-во } (x; y) & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8
 \end{array} = 68 \quad \boxed{10}$$

Или надо вычесть 1 вариант, когда $(y=4; x=7)$
ведь это случай "и"

Ответ: 67



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

а)

$$\sin^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) = \sin(\pi y) \cdot \sin(\pi x) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$-\cos(2\pi y) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\pi - 2\pi y = \pm(\pi y - \pi x) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1 - 2y = \pm(y - x) + 2k$$

$$1 - 2y = y - x + 2k$$

$$x = 3y - 1 + 2k$$

$$1 - 2y = x - y + 2k$$

$$x = 1 - y + 2k$$

(можно $k \leftrightarrow -k$)
т.е. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot (-1)$

Ответ @: $(y, 3y - 1 + 2k)$ где все $k \in \mathbb{Z}$
 $(y, 1 - y + 2k)$ где все $k \in \mathbb{Z}$

б)

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) \geq 0 \quad \text{так как } \frac{x}{7} \in [-1; 1]$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{так как } \frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

$$\text{т.е. } \begin{cases} \frac{y}{4} \in [-1; 1] \\ \frac{x}{7} \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\text{и не подходит вариант } \begin{cases} \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{7} = -1 \end{cases}$$

$$y \in [-4; 4] \quad \text{но } x, y \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$x \in [-7; 7]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 4

A - всего дней в месяце

x - число дней в конце месяца.

1) вероятность того что их одна выберут, в начале месяца два:

$$P_0 = \frac{C_{A-2}^2}{C_A^4} \leftarrow \begin{array}{l} \text{т.к. 2 дня уже выданы Васе и Пете} \\ \text{(хорошие варианты)} \end{array}$$

↖ всего вариантов

$$P_0 = \frac{\frac{(A-2)!}{(A-4)! \cdot 2!}}{\frac{A!}{(A-4)! \cdot 4!}} = \frac{(A-2)! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{A! \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{A \cdot (A-1)}$$

2) вероятность в конце месяца:

$$P_1 = \frac{C_{A-2}^{x-2}}{C_A^x} \leftarrow \begin{array}{l} \text{т.к. 2 дня уже выданы В. и П.} \\ \text{(хорошие варианты)} \end{array}$$

↖ всего вариантов

$$P_1 = \frac{\frac{(A-2)!}{(A-x)! \cdot (x-2)!}}{\frac{A!}{(A-x)! \cdot x!}} = \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{A(A-1)}$$

$$3) \frac{P_1}{P_0} = 12 \quad \text{т.к.} \quad \frac{x(x-1)}{4 \cdot 3} = 12$$

$$x^2 - x = 11 \cdot 12$$

$$x^2 - x - 11 \cdot 12 = 0$$

по Виета: $\begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -11 \end{cases}$ по условию $x > 4 \Rightarrow x = 12$

Ответ: 12 дней



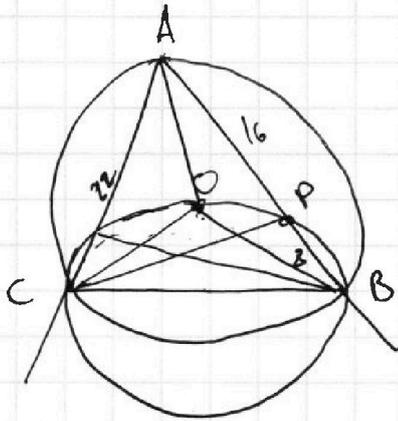
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5



1) $\angle OCP = \angle OAP$ (по вписанности)

2) но! $\angle OBP = \angle OAP$ т.к. $OA = OB$

\Downarrow
 $\angle OCP = \angle OAP$

3) $\angle ACO = \angle CAO$ т.к. $OA = OC$

4) $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB = \angle ACO + \angle OCP = \angle ACP$
 \Downarrow

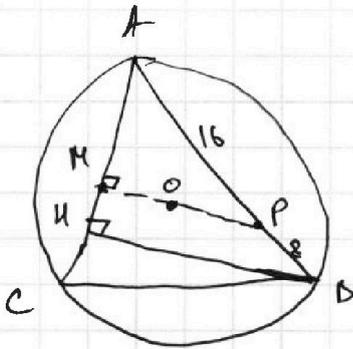
1-р. $\angle CAP = \angle ACP \Rightarrow AP = PC$

5) $\triangle APC$ - равнобедренный $\Rightarrow P$ - середина дуги AC

но и O лежит на дуге AC

\Downarrow

PO - диаметр AC .



6) M - середина AC

BH - высота в $\triangle ABC$

7) $\begin{cases} AM = AC/2 = 11 \\ AP = 16 \end{cases} \Rightarrow MP = \sqrt{16^2 - 11^2}$ по Th Пифагора

$MP = \sqrt{5 \cdot 27} = 3\sqrt{15}$

8) $PM \parallel HB \Rightarrow$ по Th Фалеса $AP:AB = 2:3$

то $MP:HB = 2:3 \Rightarrow HB = \frac{MP}{2} \cdot 3$

9) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot HB = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2} \cdot 3 = \frac{11 \cdot 9 \cdot \sqrt{15}}{2}$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2}$.

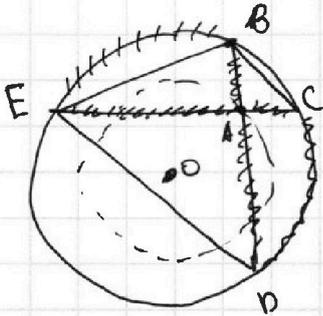


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

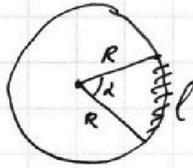


$$M = BD + EC + \overline{EB} + \overline{CD}$$

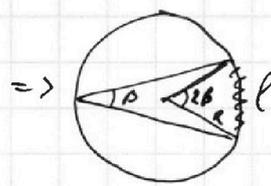
$$\begin{aligned} * \text{но: } \overline{EB} + \overline{CD} &= 4 \cdot \frac{EB}{2\pi} \cdot R \cdot \pi + 4 \cdot \frac{DC}{2\pi} \cdot R \cdot \pi = \\ &= \frac{4(EB + DC)}{2\pi} \cdot R \cdot 2\pi, \text{ но } \angle BAC = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{EB} + \overline{CD} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot R = \pi R = 6\pi$$

* длина дуги:



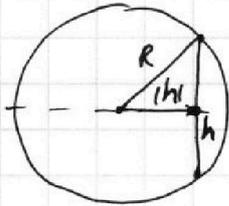
$$l = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi R$$



$$l = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot 2\pi R$$

$$l = \frac{\pi}{2\pi} \cdot 4\pi R$$

$$M = BD + EC + 6\pi$$



$\rightarrow x$ — длина хорды криво $x=h$ в круге радиусом R :

$$f(h) = 2\sqrt{R^2 - |h|^2}$$

Аналогично $y=h$ (всё ≥ 0 криво оборот на 90°)

\Downarrow

$$M = 6\pi + \int (4|\sin(x)|) + \int (4|\cos(x)|)$$

$$M = 6\pi + 2\sqrt{R^2 - 16\sin^2(x)} + 2\sqrt{R^2 - 16\cos^2(x)} \quad (R=R_1=6)$$

$$\text{как надо } M_{\text{max}} \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 16\sin^2(x)} + \sqrt{R^2 - 16\cos^2(x)} - \text{max.}$$

$$\left(\sqrt{R^2 - 16\sin^2(x)} + \sqrt{R^2 - 16\cos^2(x)} \right)^2 - \text{max.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

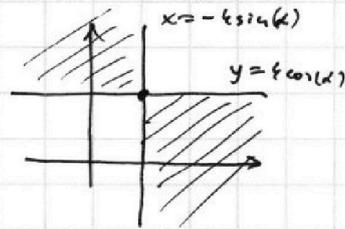
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нб

$$\begin{cases} (x+4\sin(\alpha))(y-4\cos(\alpha)) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36; \end{cases}$$

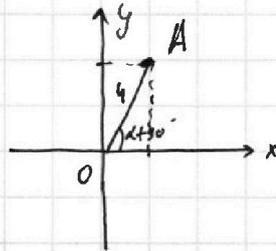
II. - круг с центром в $(0;0)$ и $R=6$

I. две прямые: $x = -4\sin(\alpha)$
 $y = 4\cos(\alpha)$



закрашиваем участки, где $\textcircled{I} \leq 0$

Пусть A - точка, такая:

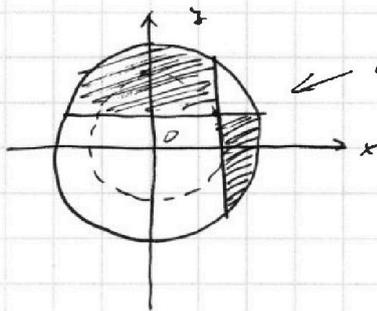


т.е. $OA=4$
а тогда $\angle xOA = \alpha + 90^\circ$
т.е. $\alpha + \frac{\pi}{2}$

Тогда! $X_A = +4\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$
 $Y_A = +4\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

т.е. $X_A = -4\sin(\alpha)$
 $Y_A = 4\cos(\alpha)$

тогда A - любая точка на окружности с центром в $(0;0)$ и $R=6$.



← ищем нашу фигуру.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А это может самое, что:

$$2R^2 - 16(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + \sqrt{R^2 - 16\sin^2(\alpha)} \sqrt{R^2 - 16\cos^2(\alpha)} - \max$$

$$\underbrace{2R^2 - 16}_{\text{const}} + \sqrt{(R^2 - 16\sin^2(\alpha))(R^2 - 16\cos^2(\alpha))} - \max$$

$$\sqrt{(R^2 - 16\sin^2(\alpha))(R^2 - 16\cos^2(\alpha))} - \max$$

$$(R^2 - 16\sin^2(\alpha))(R^2 - 16\cos^2(\alpha)) - \max$$

$$R^4 - R^2 \cdot 16 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + 16^2 \cdot \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) - \max$$

$$\underbrace{R^4 - 16R^2}_{\text{const}} + \underbrace{16 \cdot 4}_{\text{const}} \underbrace{(2 \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha))^2}_{\frac{1}{4}} - \max$$

$$(2 \sin(\alpha) \cos(\alpha))^2 - \max$$

$$\sin^2(2\alpha) - \max$$

$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k}$$

$$M_{\min} = 6\pi + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} = 6\pi + 4\sqrt{22} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

Ответ: $M_{\max} = 6\pi + 8\sqrt{7}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

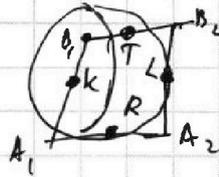
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7

1) Рассмотрим одну из данных задач и Ω :



← считаем что наша усеченная пирамида: $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$
и ее грани $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$
пересекаются в точке C .

$$\left. \begin{array}{l} B_1K = B_1T \\ A_1K = A_1R \\ A_2R = A_2L \\ B_2T = B_2L \end{array} \right\} \Rightarrow B_1B_2 + A_1A_2 = B_1A_1 + A_2B_2$$

\Downarrow
 A_1, B_1, B_2, A_2 - описанный

и имеем точки касания
вписанной в него окружности, это

K, T, L, R

а также O_Ω - лежит на серединном перпендикуляре к TR .

2) Пусть CH - высота в пирамиде $CA_1 \dots A_n$

тогда в силу того что каромикса не меняется
от поворота на $\frac{2\pi}{n}$ (где n - число вершин в основании)

то! $\Rightarrow O_\Omega$ и O_ω лежат на CH . (можно считать
 CH - осью поворота)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

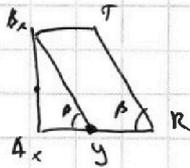
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$r = \sqrt{k \cdot k\alpha} = k\sqrt{\alpha} \quad \left(\begin{array}{l} TX = TB_x \\ RX = RA_x \end{array} \right)$$

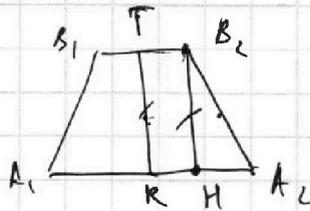
$$\angle TRA_x = \beta :$$



$$\sin(\beta) = \frac{B_x A_x}{B_x T} = \frac{2r}{TR}$$

$$\sin(\beta) = \frac{2r}{k+k\alpha} = \frac{2k\sqrt{\alpha}}{k(1+\alpha)} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

4) уг $[k \sim 1]$: $A_1 B_1 + A_2 B_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2$



$$\Rightarrow TB_2 + RA_2 = B_2 A_2$$

$$\text{угер } RA_2 = N$$

$$\downarrow$$

$$TB_2 = N\alpha$$

$$\downarrow$$

$$KA_2 = N(1-\alpha)$$

$$B_2 A_2 = \sqrt{B_2 K^2 + KA_2^2} = \sqrt{TR^2 + KA_2^2}$$

$$B_2 A_2 = \sqrt{k^2(1+\alpha)^2 + N^2(1-\alpha)^2}$$

$$N(1+\alpha) = \sqrt{k^2(1+\alpha)^2 + N^2(1-\alpha)^2}$$

$$N^2(1+\alpha)^2 = k^2(1+\alpha)^2 + N^2(1-\alpha)^2$$

$$N^2(2\alpha \cdot 2) = k^2(1+\alpha)^2$$

$$\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{k^2}{N^2}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}}}{\sqrt{\frac{k^2}{N^2}}} = \sqrt{\frac{k^2}{N^2}} = \frac{k}{N}$$

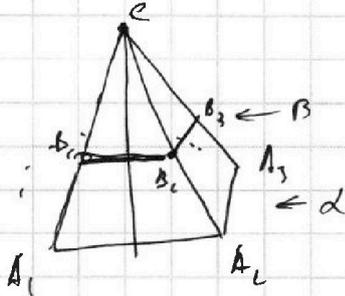


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если B_x - точка касания ω и n -го B
 A_x - точка касания ω и n -го A

то: $O\omega A_x \perp d$
 $O\omega B_x \perp B$

но $\begin{cases} CU \perp d \text{ и } \perp B \text{ (т.к. } d \parallel B) \\ CU \supseteq O\omega \end{cases}$

$A_x \text{ и } B_x \in CU$ (и $A_x \text{ и } B_x$ - центры $A_1 \dots A_n$ $B_1 \dots B_n$)

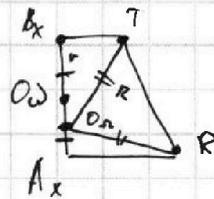
③ вспомним n -го Δ внешне



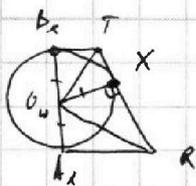
но $A_1 B_1 B_2 A_2$ - равнобедренная трапеция.

T, R - середины $B_1 B_2$ и $A_1 A_2$

Тогда можно рассмотреть элемент CTR :



n -радиус d
 R -радиус Ω
 пусть k -радиусе вписанной окружности в $A_1 \dots A_n$
 $A \cdot d$ - коэффициент подобия $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$



$\angle TOX + \angle XOR$
 \parallel
 $\angle B_1 O T + \angle A_2 O R$
 \Downarrow
 $\angle TOX + \angle XOR = 90^\circ$
 $\angle TOR = 90^\circ$
 $\Rightarrow OX = \sqrt{TX \cdot XR}$

$A_1 R = k$
 $B_x T = k \cdot d$



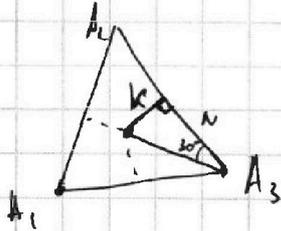
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по $n=3$:



$\rightarrow \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ - правильнй $\Rightarrow \frac{k}{n} = \lg(30^\circ)$

$$\lg(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ответ Ответ: $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

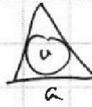
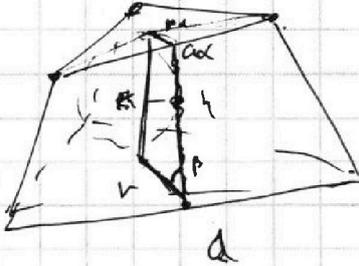


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\frac{1}{2} h \cdot 3a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = h$$

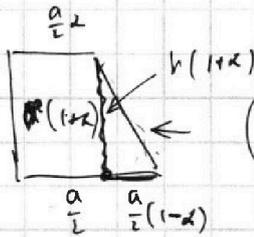
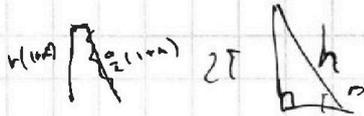
$$h = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

$$h \cdot h \cdot a = T^2$$

$$T = h \cdot \sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a \cdot a$$

$$\frac{T}{h} = \frac{2 \frac{\sqrt{3}}{6} a \cdot a}{\frac{\sqrt{3}}{6} a (1+x)} = 2 \frac{a}{1+x}$$



$$\left(\frac{a}{2}(1+x)\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 (1-x)^2 + (h(1+x))^2$$

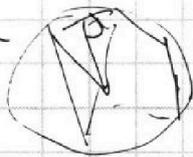
$$h(1+x) < \frac{a}{2}(1+x)$$

$$h < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} - 4x = h(1+x)$$

$$\frac{2h}{1+x}$$

$$h > h$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical sketches and calculations on a grid background. The sketches include various geometric shapes like spheres, cones, pyramids, and cylinders, often with internal lines and labels. Calculations include:

- $36 - 8 = 28$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}$
- $2R^2 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$
- $2R^2 - 16 + \sqrt{\dots}$
- $R^4 - 16R^2$ (with $\sin^2 + \cos^2$ and a circled 1 below)
- $\frac{2\pi r}{1+x}$
- $2 \frac{\sqrt{x}}{1+x}$
- $f(-)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 2

$11 \cdot 24 = 22 \cdot x$

$\sin(\pi) = 0$
 $\cos(\pi) = -1$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$-9 - 3 - 2 - 1 0 1 2 3$

-13

$3y - 1$

$k \in \mathbb{N}$

$\frac{abc}{R}$

$\cos(a-b) = \dots$

$\sin(\pi y) - \cos(\pi y) = \sin(\pi x) - \sin(\pi y) + \cos(\pi y) - \cos(\pi x)$

$-\cos(2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\cos(2\pi - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$