



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad ?(A; B; C): \begin{cases} A = a \cdot 1111, & a < 10 \\ B = \frac{xyz}{101}, & x=1 \vee y=1 \vee z=1 \\ C = \frac{pq}{101}, & p=5 \vee q=1 \\ ABC = n^2, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Рассмотрим  $A$ :  $A; 1111$ , а  $a \times 1111 = 11 \cdot 101$ ,

Таким образом  $n! 11$  и  $n! 101$   
(оба этих числа простые)

1.  $101^2 > 1000$ , тогда либо  $B$ , либо  $C : 101$ ,  
но  $C < 100$ , тогда  $B : 101$ , но  
единственное число содержащее цифру 101 - это 101  
условием на  $B$  и  $: 101$  - это 101

$$\boxed{B = 101}$$

2. Либо  $B$ , либо  $C : 11$ , но  $B = 101$ ,  
 $C = 55$ ,  $C : 11$  и содержит 5, откуда  
 $A$  должно делиться на 5, борь  $B$  и  
 $C$  фиксированы, откуда  $A = 5555$

Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad K(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$xy > 0 : K(x, y) = K(x-3, y+3)$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

M?

$$\text{Распишем } K(x, y) = K(x-3, y+3)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot xy(x-3)(y+3), \\ \text{тогда при } x=3 \\ \text{не имеет} \\ \text{смысла условие} \end{array} \right.$$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$(x-3)(y+3)(x+y+1) = xy(x+y+1), \quad x+y+1 \neq 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

$$(x-3)(y+3) = xy$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy \Rightarrow x = y + 3, \quad \text{подставим в}$$

$$\begin{aligned} M &= (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = 3((y+3)^2 + (y+3)y + y^2) - 9y^2 - 27y = \\ &= 3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y = 3(3y^2 + 9y + 9) - 9y^2 - \\ &- 27y = 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27 \end{aligned}$$

может выполняться при, например,  $x=4, y=1$

$$K(4, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = K(1, 4) = K(4-3, 1+3)$$

$$M(4, 1) = 4^3 - 1^3 - 9 \cdot 4 \cdot 1 = 64 - 1 - 36 = 27$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \overset{\cos}{\cancel{\sin}} \pi x$$

Положим  $\alpha = \pi x$ ,  $\beta = \pi y$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \pi - 2\alpha = \alpha - \beta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \pi - 2\alpha = -(\alpha - \beta) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} 3\alpha = \pi + \beta + 2\pi k \quad . \quad (k \in \mathbb{Z}, \text{ поэтому знако не важно}) \\ \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\beta}{3} + \frac{2\pi k}{3} \end{array} \right]$$

Убедимся в её второй подстановкой:

$$1. \quad \beta = 3\alpha - \pi$$

$$(\sin \alpha - \sin(3\alpha - \pi)) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos(3\alpha - \pi)) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha$$

$$-\cos 2\alpha + \cos(3\alpha - \alpha) = 0 \quad 0 = 0$$

$$2. \quad \alpha = \pi - \beta$$

$$(\sin \pi - \beta - \sin \beta) \sin(\pi - \beta) = (\cos \pi - \beta + \cos \beta) \cos(\pi - \beta)$$

$$(\sin \beta - \sin \beta) \sin \beta = -(-\cos \beta + \cos \beta) \cos \beta, \quad 0 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом получает все  $(x, y)$

такие, что

$$3x = y + 1 + 2k \quad \text{или} \quad x = 1 - y + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\{(x, y) \mid 3x = y + 1 + 2k \quad \vee \quad x = 1 - y + 2m, \quad k, m \in \mathbb{Z}\}$$

5)  $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$

ОДЗ:

$$x \in [-4; 4]$$

$$y \in [-3; 3]$$

Вспомним, что  $\arccost \in [0; \pi]$   
при это  $\arccost = \pi \Leftrightarrow t = -1$ ,

тогда  $x \neq -4$  или  $y \neq -3$ .

Таким образом на  $O_{xy}$  имеем  
прямоугольник с выпуклой точкой  $(-4; -3)$   
и сторонами  $x = -4$ ,  $x = 4$ ,  $y = 3$ ,  $y = -3$

Далее заметим, что решения уравнения  
из пункта а образуют бесконечное ко-бо  
паралл. прямых, а также, что

условия решения  $3x = y + 1 + 2k$  будут

и решениями  $x = 1 - y + 2m$ . И правда,

пусть  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  решение  $3x_0 = y_0 + 1 + 2k_1$ ,  
при  $k = k_1$ , тогда  $x_0 = 1 - y_0 + 2m$  будет  
верно при расщеплении  $x_0 = 1 - y_0 + 2m$  и  
найдём  $m$ . Сложим равенства

$$x_0 = 2 + 2k_1 + 2m \Leftrightarrow m = 2x_0 - 1 - k_1, \quad \text{т.е.}$$

и  $x_0$  единой точки  $3x = 2y + 1 + 2k$



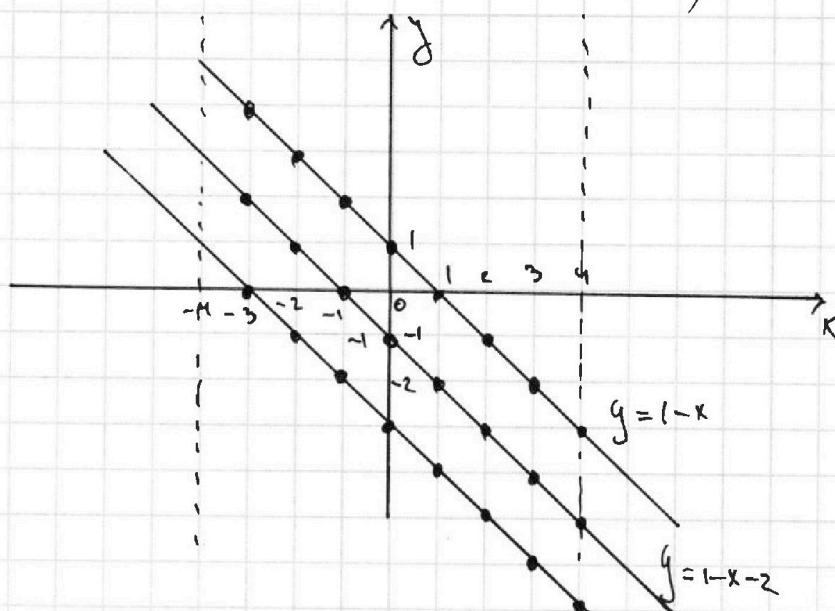
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдётся  $m$ , такое, что эта  
точка будет удовлетворять  ~~$x \geq y + 1$~~   
 $x = 1 - y + 2m$



Заметим, что 6 линий с ~~верти.~~ <sup>суммой</sup> абсцисс

10 целочисленных точек  $(-5; -8; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 8; 9)$ ,  
это образуют греки,  
а с верти. 3 целочисленные точки  $(-8; -6; 4; -2; 0; 2; 4; 6; 8)$

Тако имеем  $5 \cdot 10 + 4 \cdot 3 = 50 + 36 = 86$  точек

НО! Куда винчестер  $(-4; -9)$ , тк у нее нети.  
нес, значит она должна подходит, тк о

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

④ Будет считать вероятность, как кол-во способов выбрать сестёрку с Петей и Васей из всей сестреи.

Тогда 6 первым слугает:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

Во втором:

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}, \text{ где}$$

$n$  - учеников в школе,  $m$  - кол-во парней (мальчиков)

Тогда имеем:

$$3.5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$3.5 \cdot \frac{(n-2)(n-3) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-m+1) \cdot m!}{n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot (m-2)!}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{m \cdot (m-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$4 \cdot 6 = m(m-1), \text{ тогда } m=4 \\ (-6 \text{ не подходит})$$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

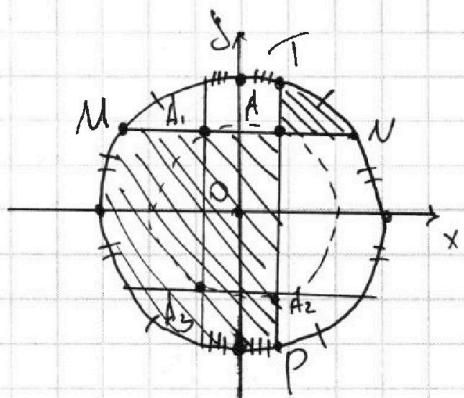
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(6)

$$\text{CP}(\alpha): \begin{cases} (x - 2\cos 3\alpha)(y - 2\sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

В первом уравнении задайте точку A,  
которая лежит по обе стороны радиуса  
в зависимости от  $\alpha$ . Прямо верхний  
и нижний левый квадранты отпадают  
A не лежит.

Второе уравнение это  
круг.



Заметим, что часть периметра  $\Phi$ , где лежит на др. равна  $3\pi$  (половина периметра круга):

Отметим  $A_1, A_2, A_3$  симметрично  
по  $Ox$  и  $O$ . И заметим, что

Каждой "закрашенной" дуге приходится "незакрашенная",  
находящаяся либо симметрично  $Ox$ , либо  $Oy$ ,

Таким образом половина дуги закрашена, то  
сумма их длины  $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$ .

Далее рассмотрим длины корр



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вспомним теорему о степени тангенса,

$$\text{тогда } TA \cdot AD = MA \cdot AN = \cancel{3\sqrt{5}} \quad 3^2 - 2^2 = 5$$

Запишем сумму длин гипотенуз  $(\alpha \in (0; 90^\circ))$

$$S_{\text{сум}} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot 3 \sin \alpha + \frac{5}{2} \cos \alpha} + \cancel{\frac{5}{2} \sin \alpha + \frac{5}{2} \cos \alpha} \cdot 2$$

$$S'(\alpha) = \cancel{2 \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot 2 =$$

$$= \cancel{2(\cos \alpha - \sin \alpha)} + \frac{5}{2} (\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha) \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot 2 =$$

$$= 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \left( \cancel{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} (\cos^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right) =$$

$$= 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \left( \cancel{\frac{5}{2}} + \frac{1 + \cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right)$$

максимум достигается при  $\sin \alpha = \cos \alpha$   
 $\alpha = 45^\circ + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$   
правиль сабак всегда  $\geq 0$ .

Отдельно рассмотрим  $\alpha = \frac{\pi}{2}k$ , т.е. тогда  $S(\alpha)$  неявр. Сумма хорд будет равна  $2 \cdot 3 + 2\sqrt{5}$

$$\text{При } \alpha = \cancel{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k} \quad S(\alpha) = \cancel{\left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 = \frac{9}{2}\sqrt{2} \cdot 2 = 9\sqrt{2}$$

Сравним  $9\sqrt{2}$  и  $2 \cdot 3 + 2\sqrt{5}$

$$162 \quad v \quad 36 + 20 + 2\sqrt{5}$$

$$106 \quad v \quad 24\sqrt{5}$$

$$53 \quad v \quad 12\sqrt{5}$$

всё таки  $53 > 2500 > 144,5$ , получаем, что при  $\alpha = 45^\circ$  максимум, а не минимум



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

S было определено где  $\alpha \in (0; 90^\circ)$ , но это никак не ограничивает решение, ведь где  $\alpha \notin [0; 90^\circ] \cup (\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$  можно перенести балансировочную силу, используя симметрии с ох или oy, чтобы перенести тягу в боковую четверть. Тогда могут стать раскрашены эти другие области, но на метр не больше.

Ответ:  $\max M = 3\pi + \sqrt{2}$ , при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

Формула где S неверна, правильная

$$S = 2(2\sin\alpha + (-\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 5})) + 2(2\cos\alpha + (-\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 5})) = \\ = 2(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 5} + \cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 5})$$

Осьб  $M$  макс при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

$$\max M = \sqrt{2} + \sqrt{2+5} + \sqrt{2} + \sqrt{2+5} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2+5}$$

Ответ:  $\max M = 2\sqrt{2} + \sqrt{2+5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad | \cdot xy \\ (x-3)(y+3)$$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$\cancel{y(x-3)y+3x-9} + x(\cancel{xy-3y+3x-9}) + \cancel{xy \cdot 3y+3x+9} = \\ = xy^2 + 3\cancel{xy} + x^2y - \cancel{3xy} + \cancel{xy}$$

$$\cancel{xy^2-3y^2+3xy-9y+x^2y-3xy+3x^2-9x-3y+3x+9} = \\ = xy^2 + x^2y$$

$$3x^2 - 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 + 6 = 0$$

$$(x-3)(y+3)(x+y+1) = xy(x+y+1)$$

$$xy - 3y + 3x - 3 = xy \\ x = y+3$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$$

$$= 3 \cdot (y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + 9) - 9y^2 - 18y =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} ? (A, B, C) : A = \underbrace{\alpha}_{\sim} \cdot \overline{1111} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} B = \overline{xyz} \\ x=1 \quad \checkmark \quad p \leq 1, \quad \checkmark \quad z=1 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} C = \overline{pq} \\ p=5 \quad \checkmark \quad q=5 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$ABC = n^2$$

$$\sqrt{B=101} \leftarrow \begin{matrix} n: 101, \text{ тогда} \\ B=101 \cdot f \quad f < 10 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1111 \\ 101 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{---} \\ - \text{ простое} \end{matrix}$$

$$\alpha \cdot 14 \cdot 101^2 \cdot \overline{pq} = n^2 \quad \begin{matrix} C: 11 \rightarrow 55 \cdot \checkmark \\ \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5} \cancel{6} \cancel{7} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 101 \\ 101 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{8} \cancel{9} \cancel{10} \cancel{11} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{12} \end{matrix}$$

$$C = 11 \cdot d$$

$$a \cdot d = x^2$$

$$\textcircled{1}: 2 \quad 3 \quad 4 \quad \textcircled{5}: 6 \quad 7$$

$$\textcircled{8}: 9 \quad 10$$

$$A \quad B \quad C$$

$$2222 \cdot 101 \cdot 88$$

$$4444 \cdot 101 \cdot 44$$

$$5555 \cdot 101 \cdot 55$$

$$1111 \cdot 101 \cdot 44$$

$$1111 \cdot 101 \cdot 55$$

$$5555 \cdot 101 \cdot 55$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 3(3y^2 + 5y + 3) - 9y^2 - 27y = \\ & = 3y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27 \end{aligned}$$

Нра  $y=4$   $x=1$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \neq 4.$$

$$\textcircled{3} \text{ а) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\alpha = \pi x \quad \beta = \pi y, \quad (\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

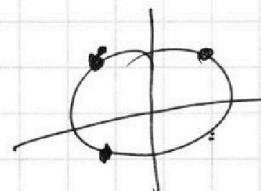
$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta), \quad \cos(\alpha - \beta) + \cos 2\alpha = 0$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta = \pi - 2\alpha + 2\pi k \\ \beta - \alpha = \pi - 2\alpha + 2\pi k \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 3\alpha = \beta + \pi + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{array} \right. \quad \beta = 3\alpha - \pi \quad (\sin \alpha -$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \pi - \beta \\ (\underbrace{\sin(\pi - \beta) - \sin \beta}_{0}) \sin(\pi - \beta) = 0 \cos \pi - 1 \end{array} \right. \quad \checkmark$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\beta = 3\alpha - \pi$$

$$(\sin \alpha - \sin 3\alpha - \pi) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos 3\alpha - \pi) \cos \alpha$$

$$(\sin \alpha + \sin 3\alpha) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos 3\alpha) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos 3\alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos 3\alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0 \quad 0 = 0$$

$$3\alpha = \beta + \pi + 2\pi k \quad \left[ \begin{array}{l} x = y + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{array} \right]$$

$$\alpha = \pi - \beta + 2\pi k \quad \left[ \begin{array}{l} x = 1 - y + 2k \\ y = 1 - x + 2k \end{array} \right]$$

8)  $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq 2\pi$

$$\left[ \begin{array}{l} y = 3x - 1 - 2k \\ y = 1 - x + 2k \end{array} \right]$$

$$3x - 1 - 2k = 1 - x + 2k$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = 2 + 2m + 2k \\ x = 1 + m + k \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} -8 - 6 - 2 - 2 \\ -9 - 7 - 5 - 3 \end{array} \right] \quad 0.2468 \\ 1.15575$$

72.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

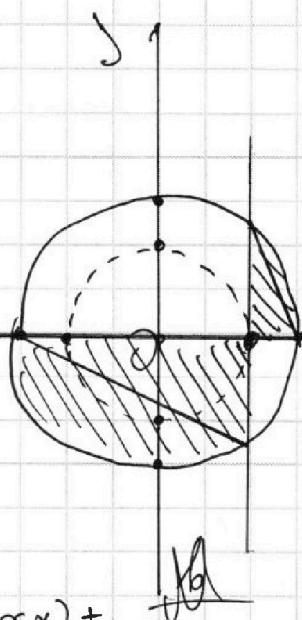


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\varphi(x) : \begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



Левая

$$(2\sin\alpha + x) \cdot x = 5$$

$$x^2 + 2\sin\alpha x - 5 = 0$$

$$-\sin\alpha = \frac{\sqrt{29}}{2} \approx 1.7785$$

$$3\pi + \arcsin$$

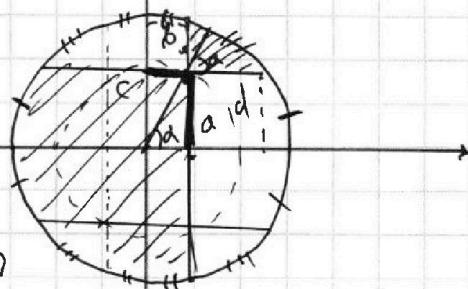
$$a(\sin\alpha + \cos\alpha) +$$

$$ab = cd = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$ab = 5$$

$$cd = 5$$

$$\max a + b + c + d ?$$



$$\max 3 \cdot \sin\alpha + 3 \cos\alpha + \frac{5}{3\sin\alpha} + \frac{5}{3\cos\alpha} - 3$$

$$3 \cdot \cos\alpha - 3 \sin\alpha + \frac{5}{3} \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{5}{3} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$3(\cos\alpha - \sin\alpha) + \frac{5}{3} \frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha} = 0$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha \dots$$

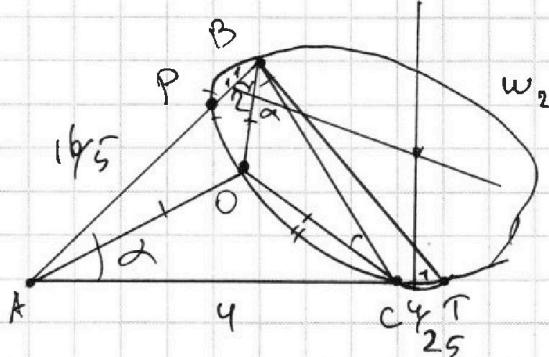
Без

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\deg_{w_2} A = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

$$AC \cdot AT = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

$$4 \cdot AT = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$$

$$AT = \frac{104}{25}$$

$$CT = \frac{4}{25}$$

$$\hat{BCO} = \hat{OBC}$$

$$\hat{BTA} = \hat{OBC}$$

$$\hat{ABC} + \hat{ACB} = \hat{ABT} + \hat{BTA}$$

$$\hat{ABO} + \alpha + \alpha + \hat{OCA} = \hat{ABO} + \alpha + \hat{CBT} +$$

$$\hat{OCA} = \alpha + \hat{CBT}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

~~$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$~~

$$\left(\frac{4}{25}\right)^2 + y_0^2 = R^2$$

$$x_0 = \frac{102}{25}$$

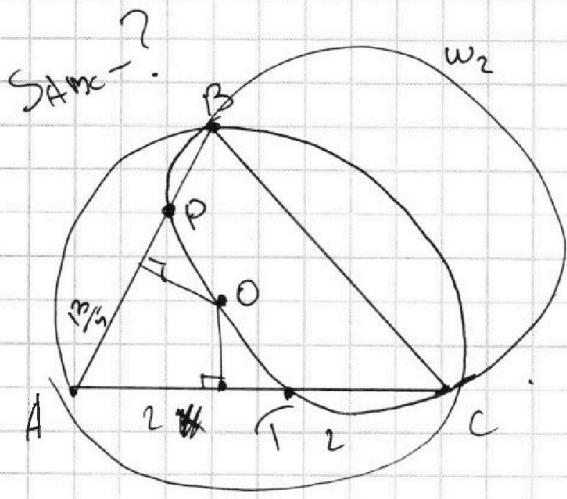
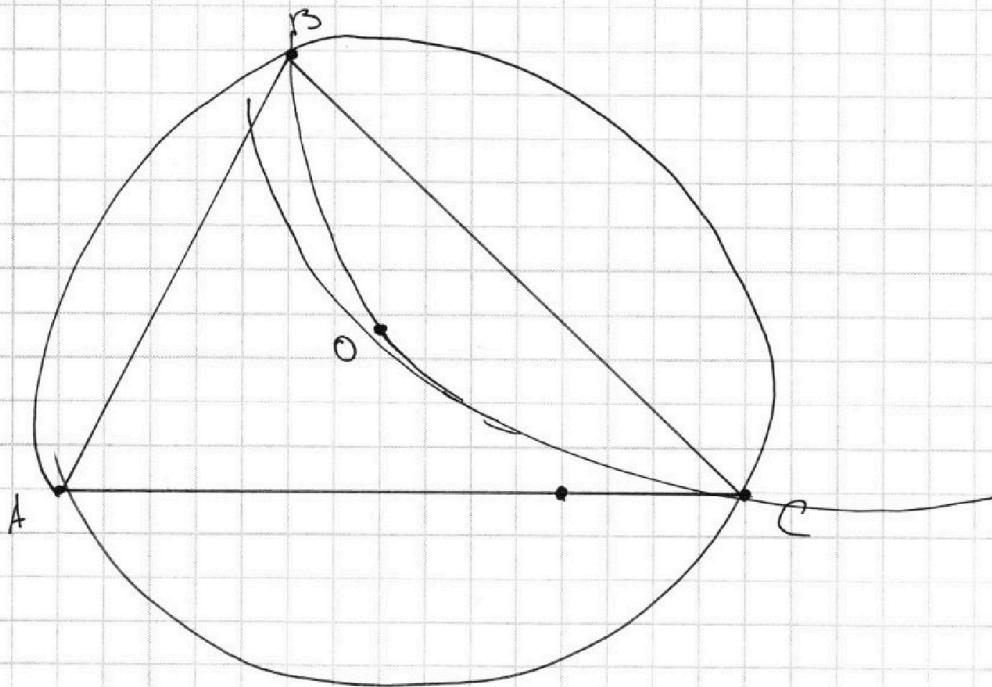


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$\begin{aligned} \deg_{w_2} A &= \cancel{BP} \cdot AP \cdot AB = \\ &= \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} \end{aligned}$$

$$4 \times \cancel{(4k)} = \frac{16 \cdot 26}{25}$$

$$\begin{aligned} 25x^2 + 100x + 16 \cdot 26 &= 0 \\ (5x)^2 + 20(5x) + 16 \cdot 26 &= 0 \\ 25x^2 + 100x - 100 &= 0 \\ 25(x^2 + 4x - 4) &= 0 \\ x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{25} = \frac{104}{25} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n$

$$3.5 \quad \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1}$$

$$21 = m^2 - m$$

$$m^2 - m - 21 = 0$$

$$m = \cancel{\frac{(m+7)(m-3)}{m}}$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{C_n^4}{\dots}$$

$$\frac{C_n^{n-2}}{C_n^3} = \frac{(n-1) \cdot n}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

$$|\Omega| = C_n^{n-4}$$

$$(n-2) n -$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$1 - \frac{\cancel{C_{n-2}^2} C_{n-2}^4}{C_n^4} =$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} =$$

$$C_4^2 \cdot C_{n-2}^2 = 1 -$$

$$= \frac{n^2 - n - n^2 + 2n - 20}{n(n-1)} =$$

$$C_n^4 - \text{беср.}$$

$$= \frac{8n - 20}{n(n-1)} =$$

$$7 \cdot 8 =$$

$$3.5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{n-2}}{C_n^n}$$

$$\frac{4!}{7!} = m \cdot (m-1)$$

$$m = 7$$

$$3.5 \cdot \frac{(n-2)(n-3) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-m+1) \cdot m!}{n(n-1) \dots (n-m+1) \cdot (m-2)!} \dots$$