МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

$7 \cdot 101 \cdot 11$
$7 \cdot 101$ 11
$1111 : 11 = 101$
$121 \cdot 11 = 1331$

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

$(0-0)\cdot 0 \neq (1+1)\cdot 1$

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x)$ $4 \cdot 3m \pm 3$
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
$7 \cdot 5 + 4 \cdot 8 =$
$= 67$ 135

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
$4 = \frac{4k-1}{3}$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

$x = 0;$ $y = \pm\frac{\pi}{3}:$ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8 \cdot 4}$ $512 - 64 - 12 \cdot 8 \cdot 4 =$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4 \cdot 8}$ $= 32(16 - 2 - 12) = 64$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Итого: $a = 1111$
$a = 4444$ $c = 77$ (не подходит (нет 1))
$a = 9999$

Ответ: $a = 7777$ $b = 707$ $c = 11$

Итак: $ac_1 \cdot 7 = u_1^2$

Т.к. c двузначное, то $11c_1 \geq 10 \Rightarrow c_1 \geq \left\lceil \frac{10}{11} \right\rceil = 1$

$11c_1 \leq 99 \Rightarrow c_1 \leq \left\lfloor \frac{99}{11} \right\rfloor = 9$ | $c_1 \in [1;9]$ так же, как и a.

Очевидно, что $u_1 \vdots 7$ (в противном случае $u_1^2 \not\vdots 7$, что неверно)

Пусть $u_1 = 7^v \cdot u_2$, $u_2 \not\vdots 7$, $v \geq 1$

$u_1^2 = 7^{2v} \cdot u_2^2$

$ac_1 = \frac{u_1^2}{7} = 7^{2v-1} \cdot u_2^2 \qquad 2v-1 \geq 1 \Rightarrow ac_1 \vdots 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots 7 \\ c_1 \vdots 7 \end{array}\right.$

Т.к. a и c_1 – числа от 1 до 9, то единственное число кратное 7 – это 7 в этом диапазоне $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 7 \\ c_1 = 7 \end{array}\right.$

Случай 1.

$a = 7$

Тогда: $c_1 = 7^{2(v-1)} \cdot u_2^2$. Если $v \geq 2$, то $c_1 = 49u_2^2 > 9$, невозможно

$\Rightarrow v = 1$, $c_1 = u_2^2$ – квадрат какого то числа: 1, 4, 9 (от 1 до 9)

Итого: $a = 7777$, $c = 11$

$c = 44$ – не подходит (нет 1)

$c = 99$ – не подходит (нет 1)

Случай 2.

$c_1 = 7 \Rightarrow c = 77$

Тогда $a = 7^{2(v-1)} \cdot u_2^2$. Аналогично если $v \geq 2$, то $a = 49u_2^2 > 9$, невозможно

$\Rightarrow v = 1$, $a = u_2^2$ – квадрат какого то числа: 1, 4, 9 (от 1 до 9)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Число A вида $\overline{aaaa}$: $a\cdot 1000 + a\cdot 100 + a\cdot 10 + a = a\cdot 1111 =$

$= a\cdot 101\cdot 11$, $a\in[1;9]$ — не делится ни на 11, ни на 101 (т.к. меньше)

Очевидно, что $c \not\vdots 101$ (т.к. двузначное). Пусть $b = 101^{\alpha}\cdot b_1$,

$b_1 \not\vdots 101$, квадрат натурального числа представим в виде

~~...~~ u^2, где $u = 11^{p_1}\ 101^{p_2}\ u_1$, $u_1 \not\vdots 11$ и $u_1 \not\vdots 101$

Тогда: $a\cdot 101\cdot 11\cdot c\cdot 101^{\alpha}\cdot b_1 = u^2 = 11^{2p_1}\ 101^{2p_2}\ u_1^2$

Итак: $a\, b_1\, c\cdot 11\cdot 101^{\alpha+1} = 11^{2p_1}\ 101^{2p_2}\ u_1^2$

Итак, $\alpha+1 = 2p_2$ (равенство степеней при 101) $\Rightarrow \alpha$ — нечетное

Очевидно, что тогда $\alpha = 1, 3 \ldots$, но если $\alpha \geq 3$, то $b \geq 101^3\cdot b_1$

$> 100^3\cdot b_1 = 10^6\cdot b_1$ — далеко не трехзначное $\Rightarrow \alpha = 1$

Итак: $b = 101 b_1$. Среди трехзначных подходят следующие:

101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909; среди них только 707

содержит 7 в записи $\Rightarrow b = 707$

Итак: $a\cdot 7\cdot c\cdot 11\cdot \cancel{101^2} = 11^{2p_1}\ \cancel{101^2}\ u_1^2$

Аналогично пусть $c = 11^{\gamma}\cdot c_1$, $c_1 \not\vdots 11$:

$a c_1\cdot 7\cdot 11^{\gamma+1} = 11^{2p_1}\ u_1^2$

$\gamma = 2p_1 - 1$ получается снова нечетным: $\gamma = 1, 3, 5 \ldots$

Но если $\gamma \geq 3$, то $c = 11^{\gamma}\cdot c_1 \geq 1331\cdot c_1$ — далеко не двузначное

число $\Rightarrow \gamma = 1$, и $c = 11 c_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$; $x, y \neq 0$

$K' = \frac{(x-4)+(y+4)+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$; $x-4 \neq 0 \quad x \neq 4$

$y+4 \neq 0 \quad y \neq -4$

$K = k' \Leftrightarrow xy = (x-4)(y+4)$

$y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$

$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow y = x - 4$

$y \neq -4 \Leftrightarrow x \neq 0$

Итак: $M = x^3 - y^3 - 12xy =$

Достаточно 2х условий: $x \neq 4$ и $x \neq 0$

$= (x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy = 4\cdot(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) -$

$- \underbrace{12x(x-4)}_{4x(x-4)\cdot 3} = 4(x^2 + x^2 - 8x + 16 - 2(x^2 - 4x)) =$

$= 4(\cancel{2x^2} - \cancel{8x} + 16 - \cancel{2x^2} + \cancel{8x}) = 4\cdot 16 = 64$

Ответ: $M = 64$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Действительно, все нечетные числа – это либо $4k+1$, либо $4k-1$

Поэтому любое $x+y$, которое нечётное, подходит

это относится и к п.а

Значит:

а) ~~либо~~ x чётное $-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ – 7 вар
y нечётное $-3, -1, 1, 3$ – 4 вар

$4 \cdot 7 = 28$ вар.

б) x нечётное $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$ – 8 вар
y чётное $-4, -2, 0, 2, 4$ – 5 вар

$5 \cdot 8 = 40$ вар.

Итого: $40 + 28 = 68$ вариантов

Ответ: а) все (x, y), удовлетворяющие соотношению:

$$x + y = 2z + 1, \quad z \in \mathbb{Z}$$

б) 68 пар чисел

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Удобно перезаписать:

$3(y-k) = x+k+1 \Rightarrow x_1 = 3y-4k_1-1$ или $k_1 = -\left(\frac{x-3y+1}{4}\right) = -\left(\frac{x+y+1}{4} - y\right)$

$3(y-k) = x+k-1 \Rightarrow x_2 = 3y-4k_2+1$ или $k_2 = -\left(\frac{x-3y-1}{4}\right) = -\left(\frac{x+y-1}{4} - y\right)$

$x_3 = 4k_3+1-y$ или $k_3 = \frac{x+y-1}{4}$

$x_4 = 4k_4-1-y$ или $k_4 = \frac{x+y+1}{4}$

~~Рассмотрим конкретное значение y. Изучим, при каких k x-ы могут совпадать (очевидно $x_1 \neq x_2$ и $x_3 \neq x_4$~~

Мы свели задачу поиска (x,y) к поиску (x,y), удовлетворяющих одному из следующих соотношений: $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$

$y - \frac{x+y+1}{4}$ целое $\Leftrightarrow (x+y+1) \vdots 4$

$y - \frac{x+y-1}{4}$ целое $\Leftrightarrow (x+y-1) \vdots 4$

$\frac{x+y-1}{4}$ целое $\Leftrightarrow (x+y-1) \vdots 4$

$\frac{x+y+1}{4}$ целое $\Leftrightarrow (x+y+1) \vdots 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+1 \vdots 4 \Rightarrow (x+y) \equiv 3 \pmod 4 \\ x+y-1 \vdots 4 \Rightarrow (x+y) \equiv 1 \pmod 4 \end{array}\right.$

Обратим внимание: корень $x=0,\ y=4$ не будет учтён при подсчете (он не подходит)

~~$y = -4$ $x \equiv 3 \pmod 4$ — n_3~~

$y = 0$ $\Rightarrow$

$y = 4$ $x \equiv 1 \pmod 4$ — n_1

$(y \equiv 0 \pmod 4)$

$y = -3$ $x \equiv 0 \pmod 4$ — n_0

$y = 1$ $\Rightarrow$

~~$(y \equiv 1 \pmod 4)$ $x \equiv 2 \pmod 4$ — n_2~~

$y = -2$ $x \equiv 3 \pmod 4$

$y = 2$ $\Rightarrow$

~~$(y \equiv 2 \pmod 4)$ $x \equiv 1 \pmod 4$~~

Новая мысль: $(x+y) \equiv \pm 1 \pmod 4 \Leftrightarrow x+y$ — нечётное число

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Другими словами: найдем все (x,y), которые удовлетворяет

$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} \le -\frac{\pi}{2}$

Поскольку $\arccos\frac{x}{7} \ge 0$ и $\arcsin\frac{y}{4} \le \frac{\pi}{2}$

$-\arcsin\frac{y}{4} \ge -\frac{\pi}{2}$

$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} \ge -\frac{\pi}{2}$

По базовому свойству неравенств это означает $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$ — равенство. Это достижимо только при $\arccos\frac{x}{7} = 0$ и $\arcsin\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$ (в противном случае выражение больше $\frac{\pi}{2}$)

Итак: $\frac{x}{7} = \cos(0) = 0$, $x = 0$

$\frac{y}{4} = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y = 4$

Только при паре чисел $y=4$ и $x=0$ требуемое условие не выполняется. При всех остальных оно верно.

Есть допустимые значения: $\frac{x}{7} \in [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-7; 7]$

$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Leftrightarrow y \in [-4; 4]$

как аргументы обратных тригонометрических функций

Осталось подсчитать количество таких чисел:

x — целое, k — целое, y целое

$$\left.\begin{aligned} y &= k + \frac{x+k+1}{3} \\ y &= k + \frac{x+k-1}{3} \end{aligned}\right|$$

~~не могут совпадать между собой при одинаковом x~~

$$\left.\begin{aligned} y &= 4k + 1 - x \\ y &= 4k - 1 - x \end{aligned}\right|$$

~~не могут совпадать между собой при одинаковом x~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin(\pi y) - \sin(\pi x))\sin(\pi y) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x))\cos(\pi y)$

Пусть $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$:

$(\sin\beta - \sin\alpha)\sin\beta = (\cos\beta + \cos\alpha)\cos\beta$

$\cos^2\beta + \cos\alpha\cos\beta - \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(2\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 0$

По формуле $\cos(u) + \cos(v) = 2\cos\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$:

$2\cos\frac{2\beta-(\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{2\beta+(\alpha-\beta)}{2} = 2\cos\frac{3\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$

Либо $\cos\frac{3\beta-\alpha}{2} = 0$, либо $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$

Итого: $\frac{3\beta-\alpha}{2} = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2} = \pi(2k \pm \frac{1}{2}) \Rightarrow 3\beta - \alpha = \pi(4k \pm 1), k \in \mathbb{Z}$

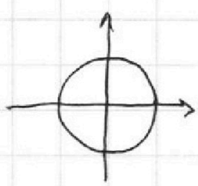
$\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\pi m \pm \frac{\pi}{2} = \pi(2m \pm \frac{1}{2}) \Rightarrow \alpha + \beta = \pi(4m \pm 1), m \in \mathbb{Z}$

Поделим на π: $\left[\begin{array}{l} 3y - x = 4k \pm 1 \Rightarrow y = \frac{x+4k\pm 1}{3} \\ x + y = 4m \pm 1 \Rightarrow y = \frac{4m \pm 1 - x}{1} \end{array}\right.$

Ответ: все такие пары — это:

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x+4k+1}{3}, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{x+4k-1}{3}, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \\ y = 4k+1-x, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \\ y = 4k-1-x, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

б) $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$



$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Видно, что проще сказать, $\arccos \in [0; \pi]$

какие не подходят

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть x – количество 11 классников, n – количество билетов

Количество способов распределить билеты: C_x^n

Количество способов распределить билеты, чтобы П и В из них пошли: $П, В$ – билет (x2), $x-2$ человек – $n-2$ билетов

Итого: C_{x-2}^{n-2}

Вероятность того, что П и В вместе попадут на концерт:

$$p = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^n} = \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_{x-2}^{n-2}\left(\frac{(n-1)n}{(x-1)x}\right)^{-1}} = \frac{(n-1)n}{(x-1)x}$$

(т.е. $C_x^n = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$

$C_{x-2}^{n-2} = \frac{(n-2)!}{(n-x)!\,(x-2)!}$

$\Downarrow$

$\frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_n^x} = \frac{n!/(n-2)!}{x!/(x-2)!} = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$)

В начале месяца $p_0 = \frac{(4-1)\cdot 4}{(x-1)\cdot x} = \frac{12}{x(x-1)}$

В конце месяца $p = \frac{n(n-1)}{x(x-1)}$

$\frac{p}{p_0} = \frac{n(n-1)}{12} = 11 \Rightarrow n(n-1) = 132$

$$n^2 - n - 132 = n^2 - 12n + 11n - 11\cdot 12 = n(n-12) + 11(n-12) =$$

$$= (n+11)(n-12) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -11 \end{array}\right.$$

$n=-11$ – невозможно (т.к. количество билетов неотрицательно)

Итак, в конце месяца 12 билетов

Ответ: 12 билетов (на 8 билетов больше, чем в начале)

Итак:

$$(3(\cos\alpha - \cos\beta))^2 + (3\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \left(\frac{AC}{R_1}\right)^2$$

$$(3(\cos\alpha - \cos\beta))^2 + (3\sin\alpha - 3\sin\beta)^2 = \left(\frac{AB}{R_1}\right)^2$$

(Вычитаем)

$$(6\sin\alpha - 4\sin\beta)\cdot 2\sin\beta = \frac{(AC)^2 - (AB)^2}{R_1^2}$$

$$(3\sin\alpha - 2\sin\beta)\cdot\sin\beta = \frac{(AC)^2 - (AB)^2}{(2R_1)^2} =$$

$$= \frac{(2\cdot 11)^2 - (2\cdot 12)^2}{(2R_1)^2} = \frac{144 - 121}{R_1^2} = -\frac{23}{R_1^2}$$

Итак: $R_1 = \dfrac{4}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R_1^2 = \dfrac{16}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{32}{1-\cos\alpha}$

$$(3\sin\alpha - 2\sin\beta)\cdot\sin\beta\,(1-\cos\alpha) = -\frac{23}{32}$$

Площадь ΔABC: $\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{22\cdot 24\cdot \cancel{2R_1}\sin\beta}{4\cdot\cancel{2R_1}\sin\frac{\beta}{2}} = \dfrac{22\cdot 24}{4}\cdot 2\cos\frac{\beta}{2}$

$$= 264\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

$$264 = \frac{22\cdot 24}{2}$$

Значит: аналогично $\angle BAC$:

$$S_{\Delta ABC} = 264\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 264\cdot\sin\angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle BAC + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 4 из 4

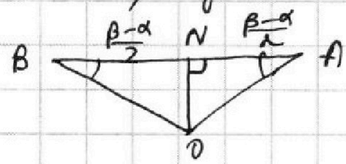
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Итак, видим что $\angle PBO = \angle ABO$:



$$ON = OB\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$12 = BN = OB\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = R\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

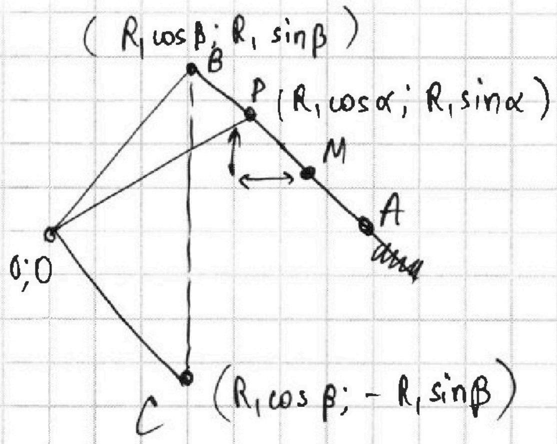
$$R_1 = \frac{8}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\ ; \quad R = 2R_1\sin\frac{\beta}{2} = 8\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Итак: $$12 = 8\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

По формуле ~~[illegible]~~ $2\cos u\sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$:

$$12 = \frac{8}{2}\cdot \frac{\sin\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 4\cdot\left(1 + \frac{\sin\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\beta-\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$



$$\Delta x = R_1(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$\Delta y = R_1(\sin\alpha - \sin\beta)$$

Координата точки A:

$$R_1\cos\beta + 3\Delta x = R_1(3\cos\alpha - 2\cos\beta)$$

$$R_1\sin\beta + 3\Delta y = R_1(3\sin\alpha - 2\sin\beta)$$

$$x_A - x_C = R_1(3\cos\alpha - 3\cos\beta) = 3R_1(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$y_A - y_C = R_1(3\sin\alpha - \sin\beta)$$

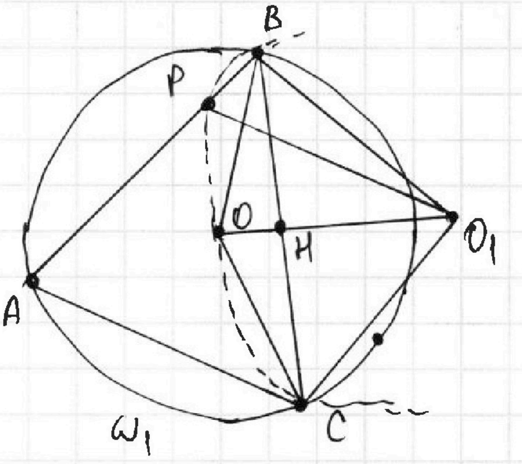
$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = R_1^2\left(9\cos^2\alpha - 18\cos\alpha\cos\beta + 9\cos^2\beta + 9\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

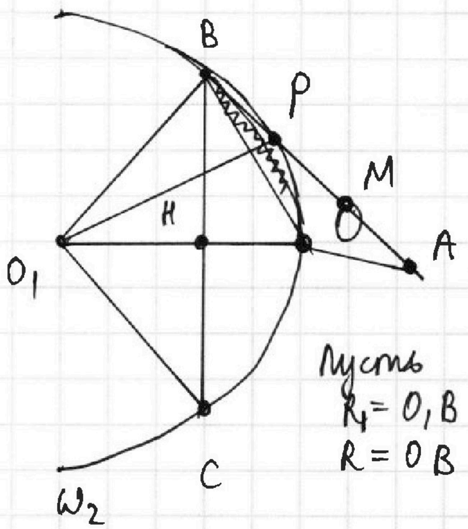


ΔBOC равнобедренный ($BO = CO$)

Пусть O_1 – центр ω_2, тогда O_1, O и H (середина BC) на одной прямой. Это можно объяснить:

O, O_1, H – на одной прямой $\Leftarrow$ OH и O_1H – одна прямая $\Leftarrow$
- $OH \perp BC$ (т.к. в р/б ΔBOC OH и медиана, и высота)
- $O_1H \perp BC$ (т.к. в р/б ΔBO_1C O_1H и медиана, и высота)) т.к. $O_1B = O_1C$

$AB = AP + BP = 24$; $AP = 2\ BP$



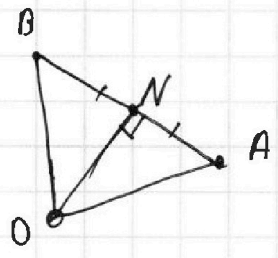
Пусть
$R_1 = O_1B$
$R = OB$

Пусть M – середина AP:

$AM = MP = BP = 8$

Пусть N – середина AB:

Рассмотрим ΔAOB



$AN = BN = 12$

$OB^2 = 12^2 + ON^2$

$\angle BO_1O = \beta$; $\angle PO_1B = \alpha$

$\Rightarrow 8 = BP = 2R_1 \sin\frac{\alpha}{2}$ (ΔBO_1P), $\angle PBO_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$R = OB = 2R_1 \sin\frac{\beta}{2}$ (ΔBOO_1), $\angle OBO_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$

Свойство р/б треугольников

$\angle PBO = \angle PBO_1 - \angle OBO_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\alpha = 2\pi m - \theta = 2\pi(m-1) + \underline{2\pi - \theta}$

$\theta = \frac{\pi}{4} \to 2\pi - \theta = \frac{7\pi}{4}$

$\theta = \frac{3\pi}{4} \to 2\pi - \theta = \frac{5\pi}{4}$

$\theta = \frac{5\pi}{4} \to 2\pi - \theta = \frac{3\pi}{4}$

$\theta = \frac{7\pi}{4} \to 2\pi - \theta = \frac{\pi}{4}$

те же решения можно записать в виде $\frac{4u \pm 1}{4}\pi$

Тот же самый вид решения:

~~это~~ $\cancel{\frac{2v+1}{4}\pi}$

~~[illegible]~~

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \alpha = 2\pi v + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi v + \frac{3\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi v + \frac{5\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi v + \frac{7\pi}{4} \end{array}\right.$, $v \in \mathbb{Z}$

$M_{max} = 6\pi + 4\sqrt{28}$ (достигается при α, указанных выше)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x(A) = -x(C) = \sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2}$

$y(B) = -y(D) = \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2}$ | Всегда

Удобно применить неравенство о среднем А и К: (арифметическом и квадратичном)

$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$M = 6\pi + 2\left(\underbrace{\sqrt{6^2-(4\sin\theta)^2}}_{=a} + \underbrace{\sqrt{6^2-(4\cos\theta)^2}}_{=b}\right) \le$

$\le 6\pi + 2\cdot 2\,\frac{a+b}{2} \le 6\pi + 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} =$

$= 6\pi + 4\cdot\sqrt{\frac{6^2-(4\sin\theta)^2 + 6^2-(4\cos\theta)^2}{2}} = 6\pi + 4\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 36 - 16}{2}}$

$= 6\pi + 4\sqrt{28}$ — и есть максимально возможное M

Оно достигается тогда и только тогда, когда $a=b$:

$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab = 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = b$

Тогда и $a^2 = b^2$: $6^2 - (4\sin\theta)^2 = 6^2 - (4\cos\theta)^2$

$(4\sin\theta)^2 = (4\cos\theta)^2 \Rightarrow \sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) = 0$

Итого: $2\theta = 2\pi u \pm \arccos(0) = (2u \pm \frac{1}{2})\pi$, $u \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{4u \pm 1}{4}\pi = \pi(u \pm \frac{1}{4})$

Вспомним, что $\theta \in [0; 2\pi)$

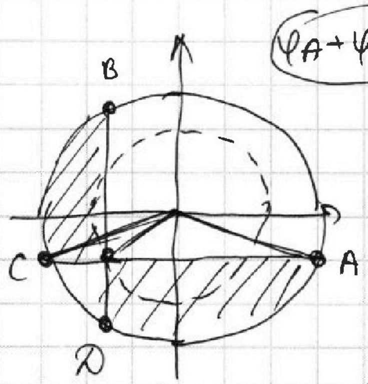
$\pi u + \frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi) \Leftrightarrow u \in [-\frac{1}{4}; \frac{7}{4})$ — только 0 и 1 (соотв. $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = \frac{5\pi}{4}$)

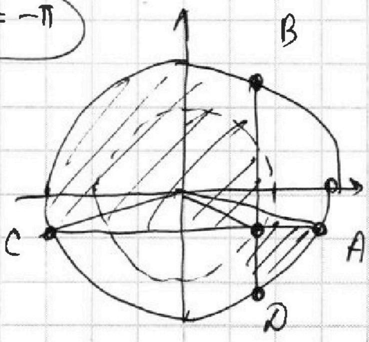
$\pi u - \frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi) \Leftrightarrow u \in [\frac{1}{4}; \frac{9}{4})$ — только 1 и 2 (соотв. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ и $\theta = \frac{7\pi}{4}$)

б) $\theta \in [\pi; \frac{3\pi}{2})$

$\varphi_A + \varphi_C = -\pi$

$\varphi_B + \varphi_D = 0$





$\cup BC = (2\pi + \varphi_C - \varphi_B)\cdot 6$

$\cup AD = (\varphi_A - \varphi_D)\cdot 6$

$\cup BC + \cup AD =$

$= 6\,(2\pi + \underbrace{\varphi_A + \varphi_C}_{-\pi} - \underbrace{\varphi_B - \varphi_D}_{0})$

$= 6\cdot\pi$

$\cup BC = (2\pi + \varphi_C - \varphi_B)\cdot 6$

$\cup AD = (\varphi_A - \varphi_D)\cdot 6$

$\cup BC + \cup AD = (2\pi + \underbrace{\varphi_A + \varphi_C}_{-\pi} - \underbrace{\varphi_B - \varphi_D}_{0})\cdot 6$

$= 6\cdot\pi$

Итак, подытожим: $\varphi_B + \varphi_D = 0$ $(\varphi_D = -\varphi_B)$ всегда

при $\theta \in [0; \pi)$ $\varphi_A + \varphi_C = \pi$

при $\theta \in [\pi; 2\pi)$ $\varphi_A + \varphi_C = -\pi$

$\cup BC + \cup AD = 6\cdot\pi$ всегда, и мы это доказали

Периметр фигуры Ф складывается из $\cup BC + \cup AD$ и $AC + BD$ (это видно из каждого рисунка)

~~AC~~ Итак: $M = 6\pi + 2\left(\sqrt{6^2 - (4\sin\theta)^2} + \sqrt{6^2 - (4\cos\theta)^2}\right)$

Эта формула верна, поскольку корень всегда неотрицателен, и корректно отображает длины отрезков

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$AC+BD=2\left(\sqrt{6^2-(4\sin\theta)^2}+\sqrt{6^2-(4\cos\theta)^2}\right)$

А ещё к M нужно прибавить $\cup BC+\cup AD$ — мы обозначаем длину дуги таким образом

При $\theta\in[0;\pi)$ A и C нужно определять по косинусу, а точки B и D: по синусу. (тогда это будет корректно и однозначно)

Угловые меры следующие:

$\varphi_A=\arccos\left(\frac{1}{6}\sqrt{6^2-(4\sin\theta)^2}\right)$, $\varphi_C=\pi-\varphi_A$

$\varphi_B=\arcsin\left(\frac{1}{6}\sqrt{6^2-(4\cos\theta)^2}\right)$, $\varphi_D=-\varphi_B$

Т.е.: $\cup BC+\cup AD=(\varphi_C-\varphi_B+\varphi_A-\varphi_D)\cdot 6=$

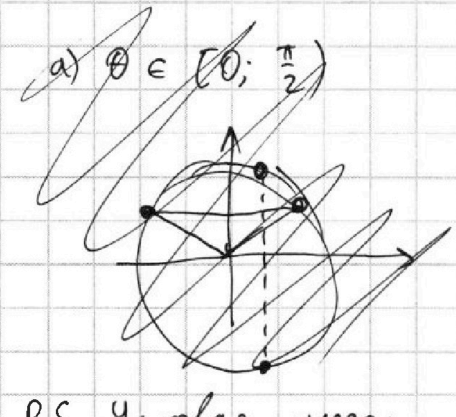
$=(\pi-\varphi_A-\varphi_B+\varphi_A+\varphi_B)\cdot 6=\pi\cdot 6=const.$

Докажем это более строго: ~~вводя~~ по определению $\cup BC=6\cdot(\varphi_C-\varphi_B)$, $\cup AD=6\cdot(\varphi_A-\varphi_D)$

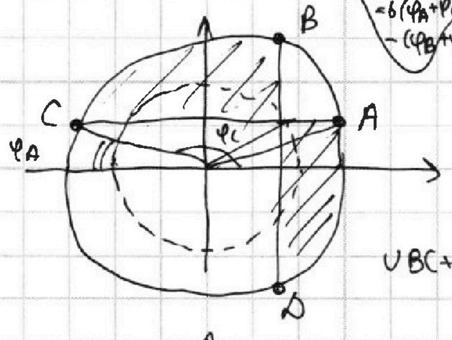
$\Downarrow$

$\cup BC+\cup AD=6(\varphi_A+\varphi_C-(\varphi_B+\varphi_D))$

~~a) $\theta\in[0;\frac{\pi}{2})$~~



a) $\theta\in[0;\pi)$



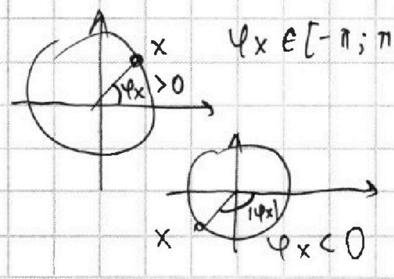
$\varphi_A+\varphi_C=\pi$

$\varphi_B+\varphi_D=0$

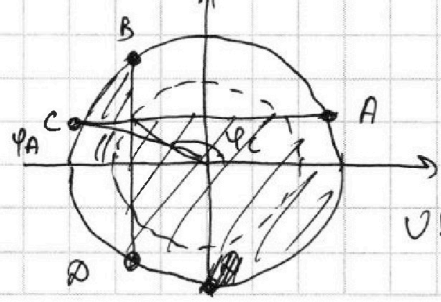
$\Downarrow$

$\cup BC+\cup AD=6\cdot\pi$

P.S. Угловая мера:



$\varphi_x\in[-\pi;\pi]$



$\varphi_A+\varphi_C=\pi$

$\varphi_B+\varphi_D=0$

$\cup BC+\cup AD=6\cdot\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

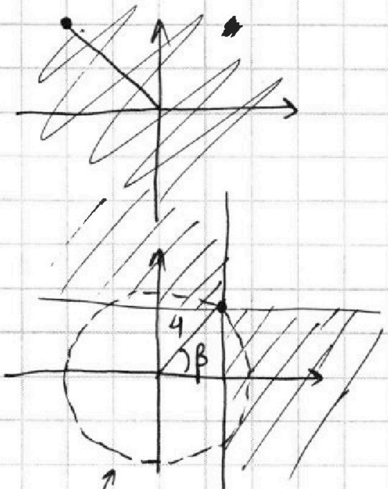
СТРАНИЦА 1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+y^2 \le 36 = 6^2 \Leftrightarrow$ x и y внутри окружности с центром в центре координат и радиуса 6

$(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4\sin\alpha\le 0 \Leftrightarrow x\le -4\sin\alpha = 4\sin(-\alpha) \\ y-4\cos\alpha \ge 0 \Leftrightarrow y\ge 4\cos\alpha = 4\cos(-\alpha) \end{cases} \\ \begin{cases} x+4\sin\alpha\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -4\sin\alpha = 4\sin(-\alpha) \\ y-4\cos\alpha \le 0 \Leftrightarrow y\le 4\cos\alpha = 4\cos(-\alpha) \end{cases} \end{array}\right.$$



Если $\beta=-\alpha$, то:

$$\begin{cases} x\le 4\sin\beta \\ y\ge 4\cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 4\sin\beta \\ y\le 4\cos\beta \end{cases}$$

$\alpha = 2\pi m - \theta$

Представим

$\beta = -2\pi m + \theta = 2\pi k + \theta$

(где $k=-m$; $k\in\mathbb{Z}$)

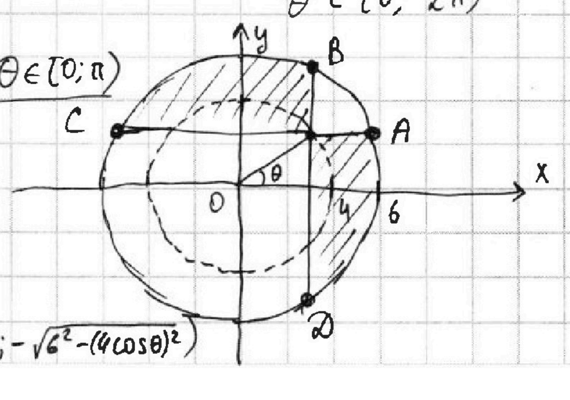
$\theta\in[0;2\pi)$

Тогда $\sin\beta = \sin\theta$

$\cos\beta = \cos\theta$

~~1. Случай $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}]$~~

Случай $\theta\in[0;\pi)$



$A\left(\sqrt{6^2-(4\sin\theta)^2}\,;\ 4\sin\theta\right)$

$B\left(4\cos\theta\,;\ \sqrt{6^2-(4\cos\theta)^2}\right)$

$C\left(-\sqrt{6^2-(4\sin\theta)^2}\,;\ 4\sin\theta\right)$

$D\left(4\cos\theta\,;\ -\sqrt{6^2-(4\cos\theta)^2}\right)$