



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. и.к. A - 4-х значное число, состоящее из четырех различных цифр, ибо $A = a \cdot 11 \cdot 101$, где $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
 $\Rightarrow A : 11 \text{ и } 101$; тогда чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом,
ибо одно из чисел B и C тоже должно делиться
на 11 и 101. и.к. C - двузначное, ~~число~~ и не может : 101,
ибо $B : 101 \Rightarrow B = b \cdot 101$, $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Но в B содержит
также кроме 1 единицу $\Rightarrow B = 202$. ~~число~~, тогда
С обязательно : 11 и содержит хотя бы одну тройку \Rightarrow
 $\Rightarrow C = 33$ - единичный парижник.

$$A \cdot B \cdot C = (a \cdot 11 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 11) = k^2, k \in \mathbb{N}.$$

$$A \cdot B \cdot C = (6 \cdot a) \cdot 11^2 \cdot 101^2$$

тогда нужно: $6a$ - квадрат натурального, причем
 $a \in \{1, 2, \dots, 9\} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow A = 6666$

тогда единственная тройка $(A, B, C) = (6666; 202; 33)$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. По условию:

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{\cancel{xy}(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

отсюда

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+2=0 \text{ - невозможно, т.к. } x, y > 0 \\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+x-y-1} \end{array} \right.$$

$$xy = xy + x - y - 1 ; \text{ т.е. } x - y = 1 ; \text{ возведя в куб:}$$

$$(x-y)^3 = 1^3$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 1 ; \text{ т.к. } x-y=1, \text{ то}$$

$$M = (x^3 - y^3 - 3xy = 1)$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \cdot (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$0) \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{\cos(\pi x - \pi y)}{2} - \frac{\cos(\pi x + \pi y)}{2} = \cos^2 \pi x + \frac{\cos(\pi x + \pi y)}{2} + \frac{\cos(\pi x - \pi y)}{2}$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = -2 \cdot \frac{\cos(\pi x + \pi y)}{2}$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi x + \pi y); \cos(-\cos \alpha) = \cos(\pi - \alpha)$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi - \pi x - \pi y)$$

решение:

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x - \pi y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi - \pi x - \pi y) + 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{1-y+2k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = y - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{точка } (x; y) = \left(\frac{1-y+2k}{3}; y \right), k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{либо } (x; y) = (y - 1; y), n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}.$$

$$*) -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -4 \leq y \leq 4,$$

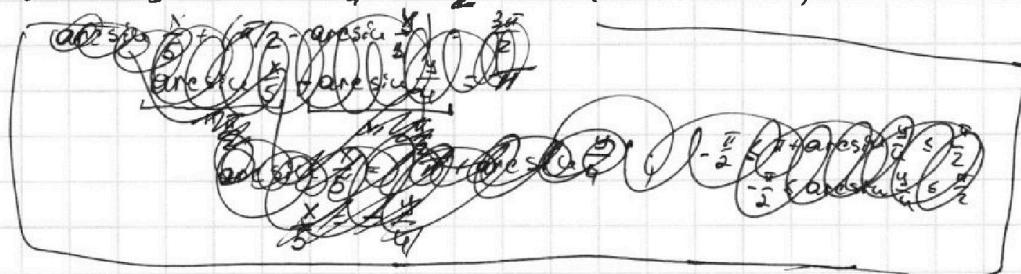
при этом $y, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-5, -4, \dots, 4, 5\}; y \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$

~~Несложно~~ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

\Rightarrow макс сумма $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ криво выполнено (потому)
что всех целых x, y из интервала, при этом $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \neq \frac{3\pi}{2}$

~~Несложно~~

Если: $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ (см. на стр. 2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} & (\text{иск. } \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ а } \arccos \leq \pi) \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi \end{cases} \quad \text{то равенство только в этом случае}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5 \\ \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases} \quad - \text{ не подходит.}$$

• Рассмотрим серию: $(x; y) = (y - 1 + 2k; y)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lll} 1) y = -4: & x = -5 \checkmark & u = 0 \\ y = -3: & x = -4 \checkmark & u = 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ y = 4 & x = 3 \checkmark & u = 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{8 решений} \\ \text{решения} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{ll} 2) y = -4 & x = -3 \checkmark \\ y = -3 & x = -2 \checkmark \\ \dots & \dots \\ y = 4 & x = 5 \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{l} 3) \text{решений} \\ \text{решения} \end{array}$$

• Рассмотрим серию $(x; y) = \left(\frac{1-y+2k}{3}; y \right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ll} ① k=0: & 1-y:3 \Rightarrow y = \{-2; 1; 4\} \\ & x = \{-1; 0; -1\} \quad -3 \text{ реш.} \\ y = -4 & x \neq \checkmark \\ y = -3 & x \neq \checkmark \\ y = -2 & x \neq \checkmark \quad \checkmark \\ y = -1 & \\ y = 0 & \\ y = 1 & \\ y = 2 & \\ y = 3 & \\ y = 4 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} ② k=1 \Rightarrow 3-y:3 \Rightarrow y = \{-3, 0, 3\} \\ x = \{2, 1, 0\} \quad -3 \text{ реш.} \end{array}$$

③ $k > 1$: ④ ⑤ ⑥

$$⑦ k=2: \quad \begin{array}{ll} u=3 & \\ y=-4 & x=-1 \\ y=-3 & x=4 \quad -2 \text{ реш.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} u=-1: & \\ y=-4 & x=5 \quad -\text{не подходит.} \end{array}$$

$y = \dots$
 $y = 3$
 $y = 4$

\Rightarrow 1) первое решение: $-2 + 0 + 2 = 0$ решение

$$⑧ k=3: \quad \begin{array}{ll} y = -4 & x = -1 \\ y = -3 & x = 4 \\ y = -2 & x = 7 \\ y = -1 & x = 10 \\ y = 0 & x = 13 \end{array} \quad \begin{array}{ll} y = -4 & x = 5 \\ y = -3 & x = 8 \\ y = -2 & x = 11 \\ y = -1 & x = 14 \\ y = 0 & x = 17 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4. Пусть всего n одиннадцатилетних мальчиков, тогда вероятность того что Ремя и Вале обосолюют мяч, равна вероятности того что в коробке из 4-х мячей из них вытащат мяч Ремя и мяч Вале (когда в коробке есть мяч Вале и мяч Ремя)

$$P_0 = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$$

или количество способов вытащить 4-х мячей из n мячей, чтобы раздать мячам

Пусть в коробке мячей было выдернуто x мячей, $x > 4$, $x \in N$. тогда то шанс что скаже вероятность Ремя и Вале получат мяч в коробке выше в коробке мячей:

$$P_x = \frac{\binom{x-2}{n-2}}{\binom{x}{n}}$$

но условие $P_x = 2,5 P_0$, т.е.:

$$\frac{\binom{x-2}{n-2} \cdot x! (n-x)!}{\binom{x}{n} n!} = 2,5 \cdot \frac{2(n-2)!}{2(n-4)! n!} \cdot \frac{12 \cdot (n-4)!}{30}$$

откуда $\frac{30}{(n-3)(n-2)} = 2,5$ получаем, что n может быть равно 4, 5, 8. подходит лишь $n=8$, т.к. $n \geq 6$ никаких мячей не хватит, чтобы удовлетворить условию $(n-x-2) > 0 \Rightarrow n > 5$

$$\text{иначе } \frac{8!}{(8-x)(8-x-1)\dots(8-x-2)} = 1$$

$$\frac{\binom{x-2}{n-2}}{\binom{x}{n}} = 2,5 \cdot \frac{\binom{2}{n-2}}{\binom{4}{n}}$$

$$\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n!} = 2,5 \cdot \frac{(n-2)!}{2(n-4)!} \cdot \frac{24 \cdot (n-4)!}{n!}$$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 2,5 \cdot 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots - (x-2) \cdot (x-5) \cdot x}{1 \cdot 2 \cdots \cdot (x-2)} = 30$$

$$x^2 - x = 30$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -5 - \text{не подр, и.к. } x \in \mathbb{N} \text{ и } x > 4$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Ответ: 6 билеев.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓5.

Penns...
Penns...

DAKO:

D-yeast w, ;

ΔABC-~~oerpage~~;

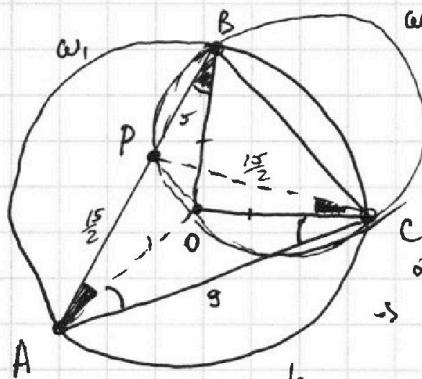
$$\omega_2 \cap AB = P;$$

$$AP = \frac{15}{2}$$

BP = 5

$$AC = 9$$

Название: SABC-?



1) Пробеги AO, DO и PC;

и.к. $AO = BO$ кас. падают в.,
 ико $\angle AOB - P / \Delta \Rightarrow \angle BAO = \angle PBO$

2) 4-үзөлшемдік DPBC бары =
 $\Rightarrow \angle PBO = \angle PCO$ (он-се на \overline{PO})

3) Known where; $\triangle AOC$ where P/ σ ($AO = OC =$
 KAK PAGUYURAN w_1 ,) $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \beta$

$$4) \quad u_3(1): \quad \angle BAO = \angle PBO \quad | \quad u_3(2): \quad \angle PBO = \angle PCO \quad | \quad \Rightarrow \angle BAO = \angle PCO = \alpha$$

$$5) \Delta APC: \angle PAC = \angle PAO + \angle OAC = \alpha + \beta \quad / \Rightarrow \quad \angle PAC = \angle PCA \Rightarrow \Delta APC - P/\Delta \Rightarrow \\ \angle PCA = \angle PCO + \angle OCA = \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow AP = PC = \frac{15}{2}$$

$$6) \text{ no m cos gne a APC: } PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos_c PAC$$

$$\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 85 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9 \cdot \cos \angle PAC \Rightarrow \cos \angle PAC = \frac{3}{5},$$

$$*) \cos^2 \angle PAC + \sin^2 \angle PAC = 1 \Rightarrow \sin^2 \angle PAC = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}, \text{ m.k.} \\ \triangle ABC - \text{oerhog}, \text{ m.e. } |\sin \angle PAC| = \frac{4}{5}.$$

5

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45$$

Ouban: 45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{№6. } & \left\{ \begin{array}{l} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 \quad (2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

1. Построим (2) в коорд. Координаты: $x^2 + y^2 \leq 25$ — областей, ограниченные окр-тию с центром в $(0; 0)$ и $R = 5$

2. (1) $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ — множество вершин $(\parallel OY)$ прямых, $x \in [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$
 $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ — множество \neq горизонтальных прямых $(\parallel OX)$, $y \in [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$;

Причем множества пересекают прямые $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$:

$$x^2 + y^2 = 18 \quad (3)$$

Рассмотрим произвольную точку M на окр-ти (3):

к/з ее проходят две прямые: $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \parallel OY$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \parallel OX$;

эти же прямые

высекают на окр-ти (2) 4 дуги;

причем по (6) нам подходит верхние левые дуги и правые дуги.

Левые прямые $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ пересекают окр-ти (2) в точках B и C , а $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ — в т. A и D .

Тогда нам подходит обединение фигур AOB и COD ,

тогда периметр фигуры P равен $4R + R(\angle AOB + \angle COD) = 4R + R(\angle AOB + \angle COD)$

Замечаем, что $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC$ (причем все зависят от положения)

и M на окр-ти (3)

Докажем это: $\angle AOB = \frac{\pi}{2} - \angle QOA - \angle KOB$;

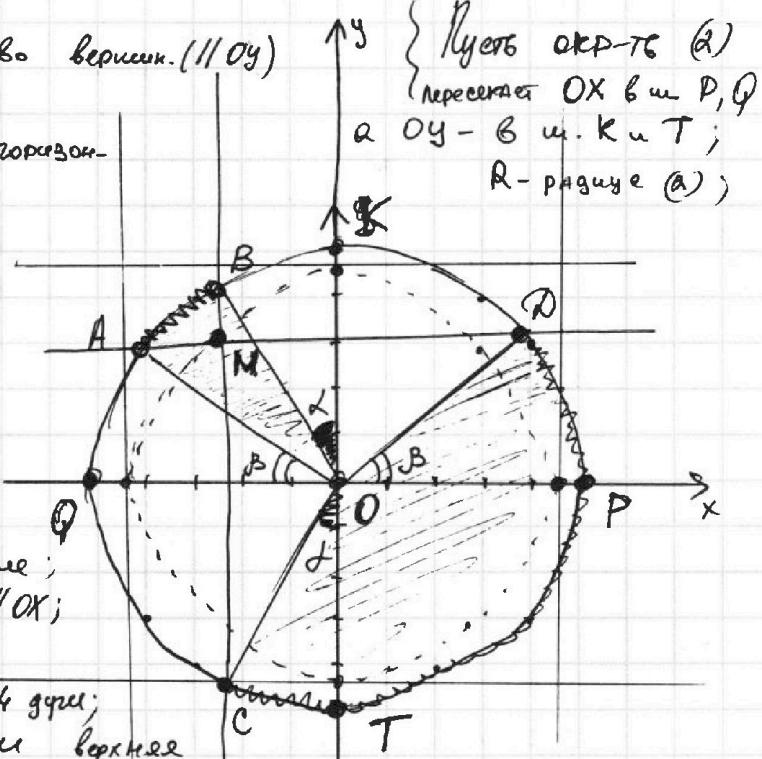
$$\angle COD = \frac{\pi}{2} + \angle DOP + \angle COT;$$

и к. $AO \parallel QP$, то из-за равенства: $\angle AOD = \angle ODP \Rightarrow \angle QOA = \angle DOP = \angle B$

$$\angle OCT = \angle ODP$$

$$\angle COT = \angle BOK = \angle D$$

$(AO = OD = OP = OT = R)$ \rightarrow но это и кратко
 вспомог. равенства $\angle A = \angle D$ $\angle C = \angle P$ $\angle B = \angle O$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \quad / \Rightarrow \angle AOB + \angle COD = \pi$$

$$\angle COD = \frac{\pi}{2} + \alpha + \beta$$

Тогда периметр фигуры $\text{PP}(x)$ равен:

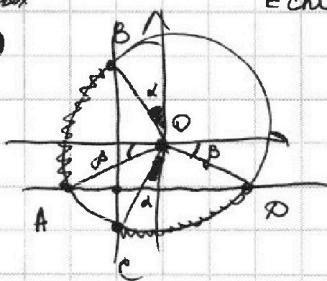
$$4R + R(\angle AOB + \angle COD) = 4R + \pi R;$$

$$R = 5 \text{ (из (2))}$$

$$\Rightarrow M = 20 + 5\pi \text{ при любом } \alpha.$$

~~Будет проверяться~~

Решение



Если A и B находятся по разные стороны от ОX:

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \quad / \Rightarrow \angle AOB + \angle COD = \pi$$

$$\angle COD = \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha$$

Аналогично, если A, B или C, D находятся по разные стороны от ОY

Ответ: $20 + 5\pi$; $\alpha \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

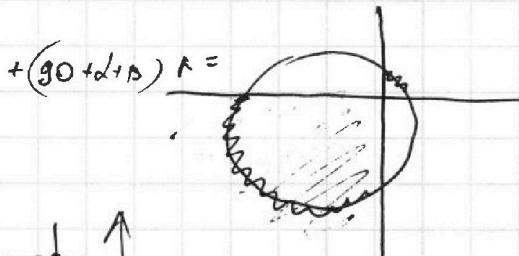
 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

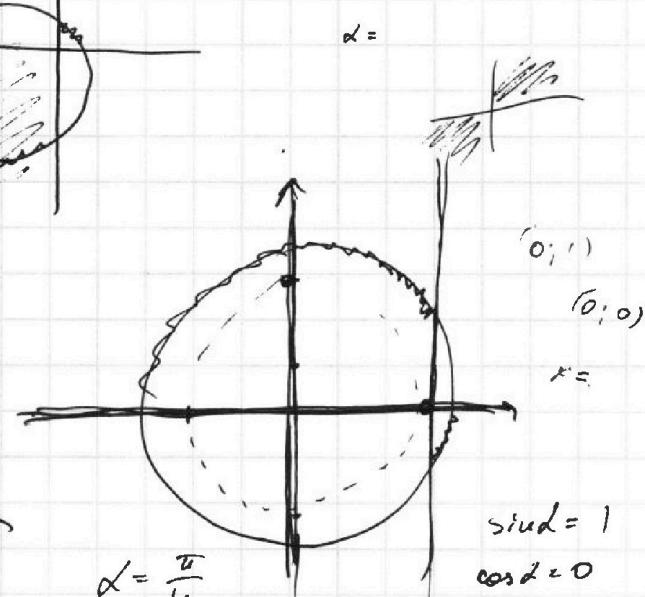
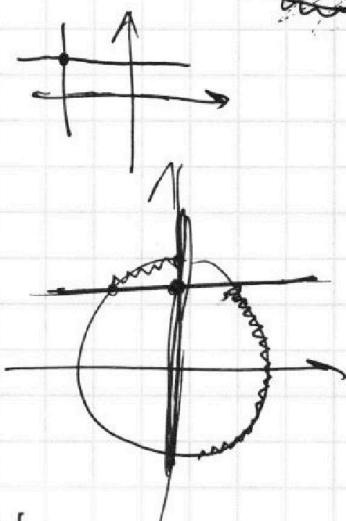
$$(90 - \alpha - \beta) \pi + (90 + \alpha + \beta) \pi =$$

$$\rightarrow 180\pi$$



$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\alpha =$$



$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(x - 3\sqrt{2})g \leq 0$$

18

$$\sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 1$$

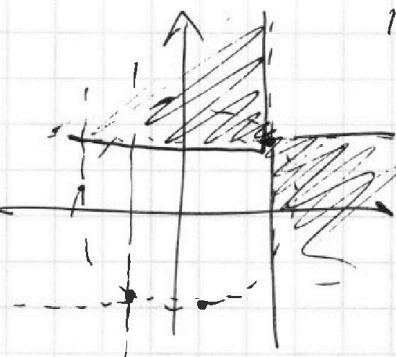
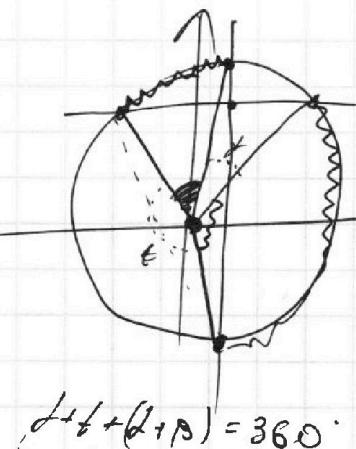
$$x(y - 3\sqrt{2}) \leq 0$$

(x10)

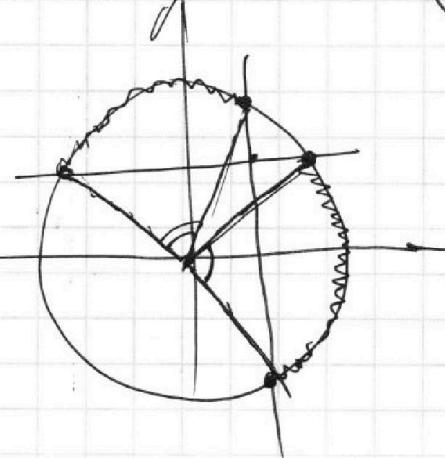
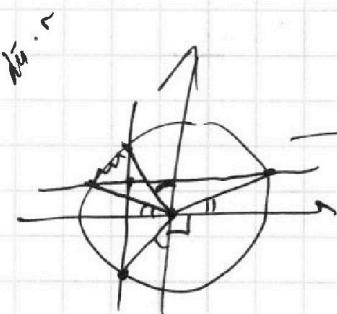
I

$$\frac{2\pi r}{2\pi} \cdot d =$$

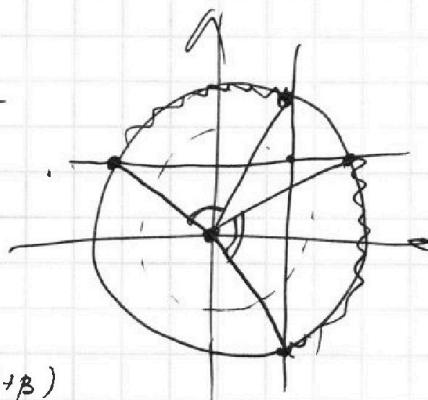
$$= rd$$



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\pi(\alpha + \beta)$$

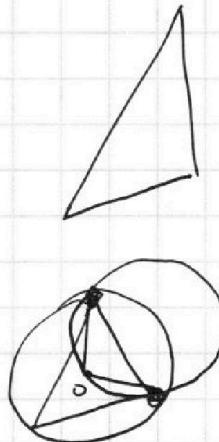
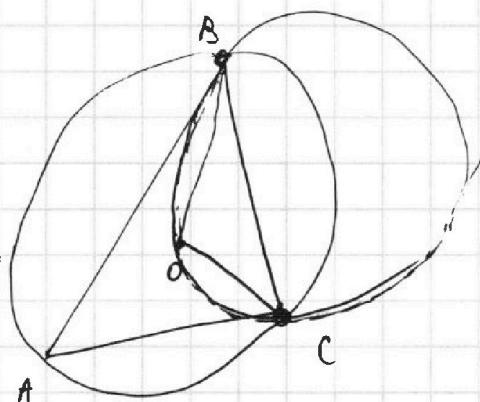




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

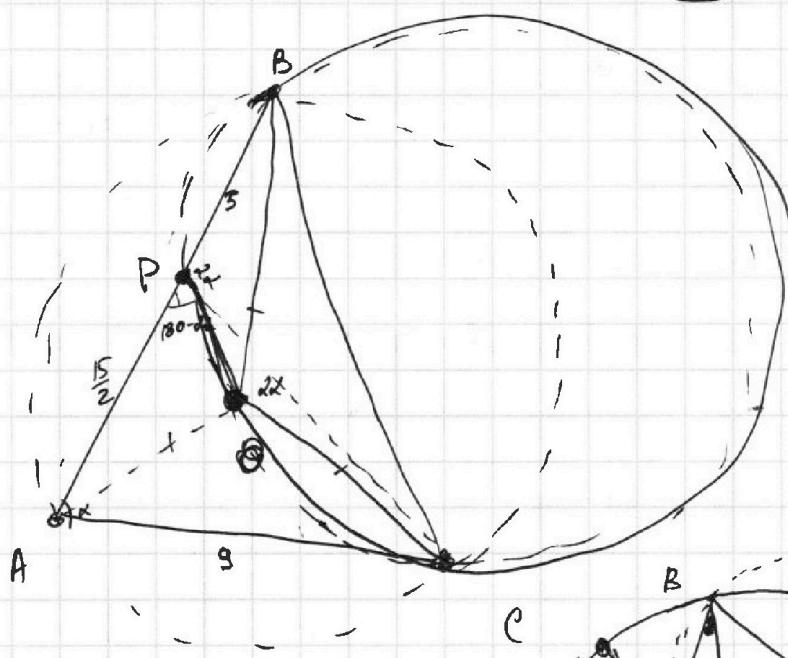
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$15 \cdot 9 \text{ resp} = 135$$

$$\cos = \frac{g \cdot g}{15 \cdot g} = \frac{g}{15}$$

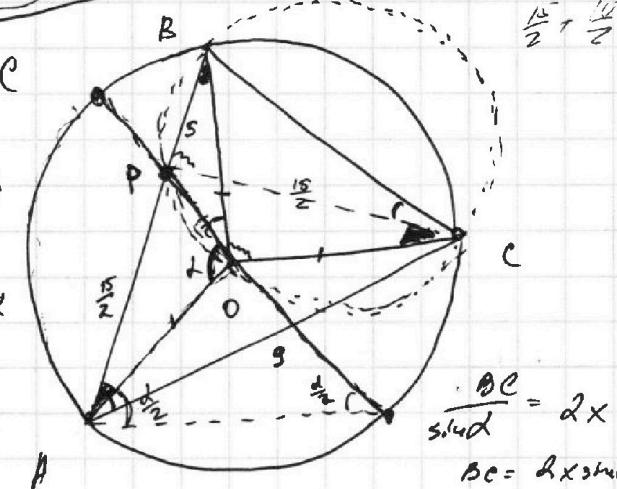


$$\begin{aligned}1 - \cos 2\alpha &= \\1 - (2\cos^2\alpha - 1) &\sim \\1 - (1 - 2\sin^2\alpha) &\sim \\2\sin^2\alpha &\end{aligned}$$

$$\frac{15}{2} + \frac{10}{2}$$

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2 + g^2 - 2 \cdot \frac{25}{2} \cdot g \cdot \cos\alpha = 25^2 - 2 \cdot 25 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{625}{4} \cdot 81 - 25 \cdot 9 \cos \alpha = 2x^2(1 - \cos 2\alpha) \sim \\ \sim 2(2x \sin \alpha)^2$$



$$BC = 2x \text{ stud}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x)(1-x)(x-a) \cdots (x-n)$$

$$\frac{ijj'(s-y)}{jy} = \textcircled{e}$$

$$\frac{i^n i^{(n-k)}}{i!} = \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} I - R &= X \\ \partial x = -1 + x + y + \Delta u \\ \partial x &= x + y + \Delta u \end{aligned}$$

$$x'; i = \beta$$

$$y \in h^{-1}(e^z, e^w)$$

$$Q \in \mathbb{R}^{3 \times \frac{2}{5}} \quad \text{for } n = 11 \Rightarrow 7$$

5'7" ♀ (8-9) (c-n) (b-w)

$$) \quad z = x^{\frac{1}{n}} \quad \frac{z^n - 1}{z - 1} = x$$

$$237' \text{ } 70 + 6 - x - 1 = 236$$

$$((b_2 + x_2) - \underline{y}) \cos = x \text{ で } \cos$$

$$= (h_{42} + x_{42}) \cdot 800 - x_{mp} \cos 30^\circ$$

$$\frac{z}{\sin z} = -2\pi$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)] = \frac{1}{2} [1 - \cos(2(x+y))] = \frac{1}{2} [1 - (\cos 2x \cos 2y - \sin 2x \sin 2y)]$$

$$x_1 = 100 \cdot 50\% + x_2 = 50\% = 50\% \text{ of } x_1 + x_2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A - \text{abc} \quad \text{aaa} : 11$$

101.11

202.11

303.11

404.11

505.11

606.11

707.11

808.11

909.11

$$B - \overline{abc}; \quad \overline{d2e}; \quad \overline{k+2}$$

$$a - 101 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$C - \overline{35}; \quad \overline{q3}$$

$$A \cdot B \cdot C = a^2$$

$$\begin{array}{r} < 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} < 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$B : 101$$

$$C = 503$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$6.111 \cdot (01 \cdot 11 \cdot 8)$$

~~A-101.11.~~

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy - ?$$

$$y+1+x-1$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy$$

$$(x-y)((x+y)^2 - xy) - 3xy$$

$$x(x^2 - 3xy)$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times (x-y) + (x-y) \cos \alpha \\ -(x-y) \cos \alpha + (x-y) \cos \alpha \end{array}$$

$$(x+y+2) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-1)(y-1)} \right) = 0$$

$$x+y = -2$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-1) + y(y-1)}$$

$$\begin{cases} x+y = -2 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

$$xy + x^2y - xy - y^2 = xy - y^2 = (x-y)y = (x-y)x$$

$$2x$$

$$x-y = -1$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 =$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = 1$$

$$x^2 = y^2 + 5y = 0$$

$$x = 1 - my - m$$

$$1 = (x-m)y \quad my = -m$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

$$D = (x-m)y$$

$$= x + y - 2 - x - y -$$

$$= (1-x)(x-y)$$

$$x^2 \\ 1 + 2x - 2 - x^2$$

$$x^2 \\ = x + 2x - 2 - x^2$$

$$x^2 \\ = x^2$$

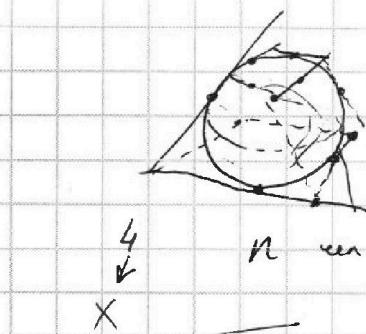


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$6666 \quad | \quad \begin{matrix} 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$1111 \quad | \quad \begin{matrix} 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{r} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$C_n^4$$

$$C_{n-2}^2$$

$$\frac{(n-2)!}{2(n-4)!} \cdot \frac{1^2 (n-4)!}{n!}$$

$$C_n^{n-2}$$

$$C_n^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$n-2 = x^2$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$



$$1 - 30$$

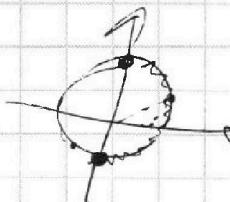
$$\alpha = \arcsin \frac{y}{r} + \arcsin \frac{y}{R} = \pi$$

$$\alpha - \beta = \pi$$

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{r} + \arccos \frac{y}{R} = \pi$$

arccos, arcsin



$$\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

$$\sin(\pi \alpha)$$

