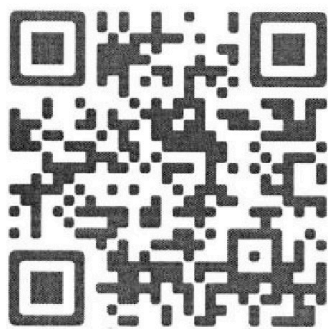




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A \cdot B \cdot C$ - квадрат, $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$

11 и 101 - простые $\Rightarrow B$ делится на 101 $\Rightarrow B = 606$ т.к. содержит
6, C делится на 11 $C = 33 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$

$\Rightarrow a = 2; 8$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

По условию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x-2+y+2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x - y = 2$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = \\ &= 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2 \cdot (x-y)^2 = 8 \end{aligned}$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y - \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi \cdot (x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi k \quad \pi(x-y) = -2\pi x + 2\pi k$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$x-y = 2x + 2k$$

$$y = -x - 2k$$

$$x-y = -2x + 2k$$

$$y = 3x - 2k$$

a) Ответ: $x \in \mathbb{R} \quad y = -x - 2k; 3x - 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $\arcsin \frac{y}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

$$-6.5 \leq y \leq 6 \quad x = -y - 2k \quad x = \frac{-y-2k}{3}$$

1) $y = -2$

$$-6.5 \leq -2 - 2k \leq 6$$

$$-8.5 \leq -2k \leq 4$$

$$k = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

$$-6 \leq \frac{-2-2k}{3} \leq 6$$

$$-20.5 \leq -2k \leq 16$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - кол-во учеников, y - кол-во билетов к ~~концу~~ концу
месяца

в начале вероятность $\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$

в конце вероятность $\frac{4}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{4(y-1)}{x(x-1)}$

$$\frac{4(y-1)}{12} = 6$$

$$y^2 - y - 72 = 0$$

$$(y-9) \cdot (y+8) = 0$$

$$y = 9$$

Ответ: 9.

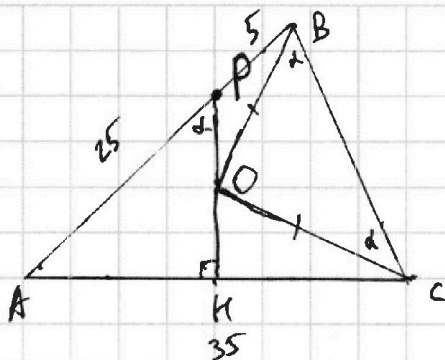


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle OBC = \alpha$. т.к. $OPBC$ - вписанный

$\angle OPB + \angle OCB = 180 \Rightarrow \angle HPO = \alpha$. т.к. смежный

Проведем PO до пересечения с AC .

$PO \perp AC = m. H$

$$\angle BOC = 180 - 2\alpha, \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 90 - \alpha. \Rightarrow \angle PHA = 90^\circ$$

т.о. линия PH - серед. перпендикуляр к $AC \Rightarrow AH = HC = \frac{35}{2}$.

$$\cos \angle BAC = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{\frac{51}{100}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = 52,5\sqrt{51}$$

Ответ: $52,5\sqrt{51}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

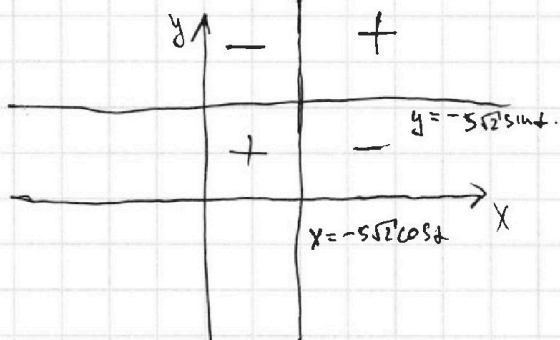
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

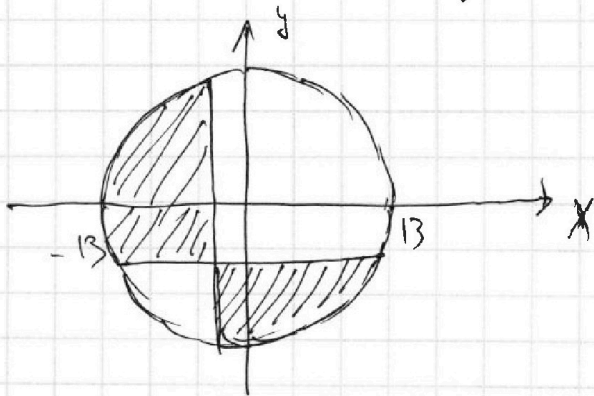
Рассмотрим 2-е неравенство, его решение это круг с центром $(0;0)$ и радиусом 13

Рассмотрим 1-е неравенство, нули неравенства $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$

$$y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$$



$\Rightarrow$ решение системы состоит из макс.



Угол между прямыми $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ и $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ сумма дуг равна $180^\circ \Rightarrow$ в сумме их длин всегда 13π



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

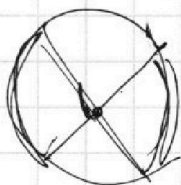
Всего = 13

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

1. $AB \perp CE$
 $PM \perp AB$
 $PN \perp BA$

30°



$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

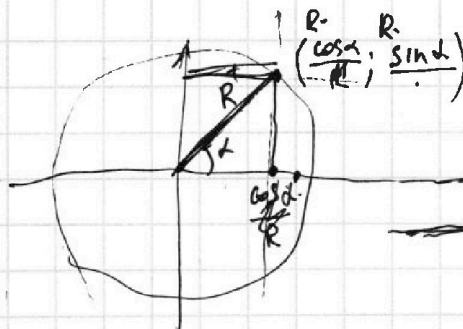
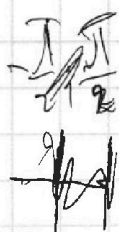
$$xy = xy - 2y + 2x - 4 \quad x = y + 2$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$2y - x = x - y = 2$$

$$y = -2 \quad x = -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$$

$$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = 2 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = 2 \cdot (x-y)^2 = 8$$

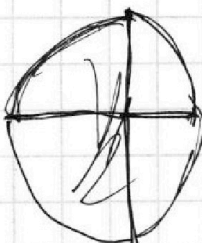


$$x \in (-6; 6)$$

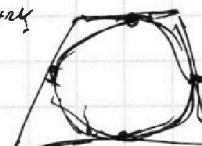
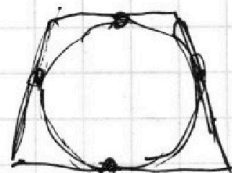
$$y \in (-2; 2)$$

$$y = 2$$

$$x = y + 2$$



$$-6 \leq x \leq 6 \quad -2.5 \leq y \leq 2$$



$$-6 \leq -2 + 2k \leq 6$$

$$-2.5 \leq k \leq 4$$

к 7 знам.

$$-6 \leq -1 + 2k \leq 6$$

$$-2.5 \leq k \leq 3.5$$

к 8 знам

$$-6 \leq 2k \leq 6 \quad -6 \leq 2k + 1 \leq 6$$

$$-3.5 \leq k \leq 3 \quad -3.5 \leq k \leq 2.5$$

к 9 знам



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A \cdot B \cdot C = \text{квадрат}$

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$\Rightarrow B = \overline{606} = 6 \cdot 101$$

$$C = \overline{33} = 3 \cdot 11$$

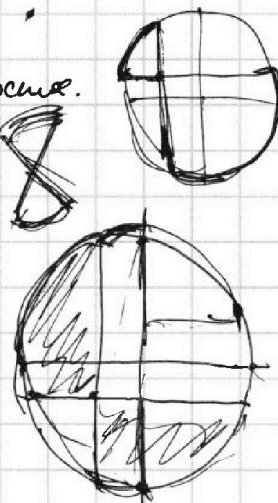
$$(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$$

$$1111 = 11 \cdot 101 =$$

11 101 - простые.

$$6 \cdot 3 \cdot a = k^2$$

$$a = 2; 8$$



№1 $A \cdot B \cdot C$ - квадрат. $\Rightarrow A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$

101 - простое $\Rightarrow$ В $\overline{606}$ ^{содержится} 101, С ^{содержит} 11 $C = 33$ $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$

$$a = 2; 8$$

$$\text{Ответ: } (2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$$

№2

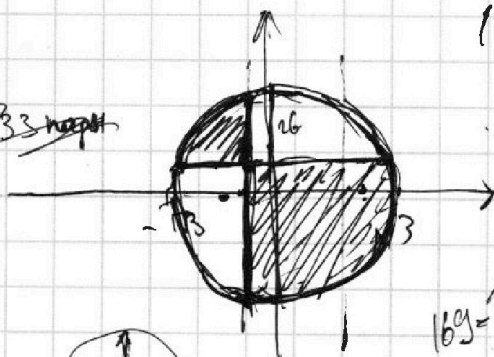
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$13 \cdot 5$$

$$65 \text{ пар}$$

$$3 \cdot 7 + 26 = 33 \text{ пар}$$

$$y = x/2k$$

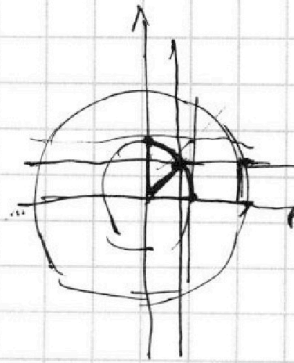


$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) = 50$$

$$\text{гипотенуза } L = 2\sqrt{2} \cdot 16$$

$$169 = 50 = \frac{169}{2\sqrt{13}}$$

$$16 + 2\sqrt{13}$$



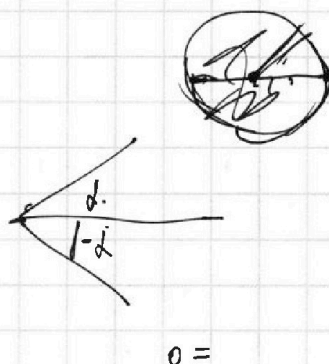
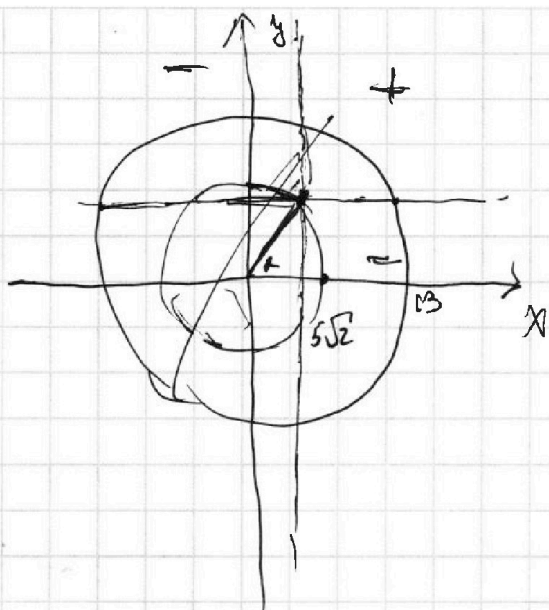


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin \frac{\sqrt{5}}{6} + \arcsin \frac{4}{5} < \pi$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x = \sin^2 \pi x \cdot \cos \pi x - \sin \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$x=y$$

$$\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi k$$

$$x-y = 2x + 2k$$

$$\pi(x-y) = -2\pi x + 2\pi k$$

$$x \rightarrow y = -x + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$a). \text{ Ответ: } x \in \mathbb{R}; y = -x + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = -2x + 2k$$

$$y = 3x + 2k$$

