



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Пстя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$ ($a \in \mathbb{N}$, $a \leq 9$). Заметим, что $A \mid 101$, но $A \nmid 101^2$, т. о. $B \cdot C \mid 101$ (иначе ABC - не квадрат). Но $C \nmid 101$, т. к. C - двузначное число, тогда $B \mid 101$. Заметим, что B число $\neq 9$ вариантов: 101, 202, ..., 909, но по условию B число хотя бы одну цифру 7, т. о. $B = 707$. Тогда $A \cdot B \mid 11$, но $A \cdot B \nmid 11^2$, тогда $C \mid 11$ (иначе $A \cdot B \cdot C$ - не квадрат). Но из всех двузначных чисел, делящихся на 11 есть только одно, т.е. содержит цифру 7-ю и число 11. Тогда $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11 = a \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 101^2$. Получаем, что наше число является квадратом тогда и только тогда, когда $a = 7$.

Ответ: $\{(7777; 707; 11)\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем условие:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{(x-y)(y+y)},$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+x-y+3}{(x-y)(y+y)}, \quad \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-y)(y+y)}$$

$$(x+y+3 \neq 0, \text{ m.e. } x > 0 \text{ и } y > 0),$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-y)(y+y)}, \text{ где } x \neq y:$$

$$(x-y)(y+y) = xy, xy - 4y + 4x - 16 = xy,$$

$$4x - 4y = 16, x - y = 4.$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4(x^2 + xy + y^2) - 4 \cdot 3xy = 4 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = 4 \cdot (x-y)^2 = \\ &= 4 \cdot 16 = 64. \end{aligned}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a). \sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y,$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y,$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi y - \pi x),$$

$$\cos(2\pi y + \pi) = \cos(\pi y - \pi x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\pi y + \pi = \pi y - \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi y + \pi = \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 1 = y - x + 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2y + 1 = x - y + 2n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 3y + 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

м. о. возможны решения вида $(-y - 1 + 2k; y) | k \in \mathbb{Z}$

и $(3y + 1 - 2n; y) | n \in \mathbb{Z}$. Тогда, это они могут

$$\text{пересекаться: } -y - 1 + 2t = 3y + 1, 4y = 2t - 2,$$

$$y = \frac{t-1}{2}, \text{ м. о. при } y = \frac{1}{2} m, m \in \mathbb{Z} \text{ имеет решение}$$

решение решения.

$$\text{Однако: } y = \frac{1}{2} m, m \in \mathbb{Z}: \left\{ (-y - 1 + 2k; y) | k \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$y \neq \frac{1}{2} m, m \in \mathbb{Z}: \left\{ (-y - 1 + 2k; y) | k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cup \left\{ (3y + 1 - 2n; y) | n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

б). Тo уравнение $x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}$, называемое из а)

рассмотрим, что решения будут пересекаться,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

позволю достаточно лишь рассмотреть
 $(-y - 1 + 2k; y) \mid k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $E(\arccos x) = [0; \pi]$ и $E(\arcsin x) \geq E(-\arcsin x) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,
 поэтому $\arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{x} > -\frac{\pi}{2}$ не включаете тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{y} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}$$

Далее заметим, что $D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1]$, поэтому $x \in \{-7; -6; \dots; 7\}$ и $y \in \{-4; \dots; 4\}$.

При $y \neq 0$: $-y - 1 + 2k \neq 0$, поэтому такое y имеет 8 вариантов $x (-7; -5; \dots; 5; 7)$.

При $y = 0$: $-y - 1 + 2k = 0$, поэтому такое y имеет 5 вариантов $x (-6; -4; \dots; 4; 6)$, т. о. всего $5 \cdot 8 + 4 \cdot 7$ вариантов, кроме $(7; 4)$, поэтому $5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 1 = 40 + 28 - 1 = 67$.

Ответ: 67.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тусов в классе x однодневных классиков ($x \geq 4$ из участников). Требуется найти вероятность:

Всего C_x^4 вариантов раздать билеты, из них нужных C_{x-2}^2 , т.е. 2 билета на Тимо и Васю - 1 вариант и 2 билета оставшиеся.

Искомая вероятность: $C_{x-2}^2 : C_x^4 =$

$$= \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot (x-1)} = \frac{12}{x(x-1)}.$$

Тусов добавим t билетов ($t \in \mathbb{N}$), тогда аналогично находим вероятность:

$$C_{x-2}^{2+t} : C_x^{4+t} = \frac{(x-2)!}{(t+2)! \cdot (x-4-t)!} \cdot \frac{(x-4-t)! \cdot (t+4)!}{x!} =$$

$$= \frac{(t+4) \cdot (t+3)}{x \cdot (x-1)} = 11 \cdot \frac{12}{x(x-1)} \quad | \cdot x \cdot (x-1) \neq 0$$

$$t^2 + 7t + 12 = 11 \cdot 12, t^2 + 7t - 120 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-15; 8\}$$

но $t \in \mathbb{N}$, т.о. $t \geq 8$. т.е. всего было раздано $4 + 8 = 12$ билетов.

Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

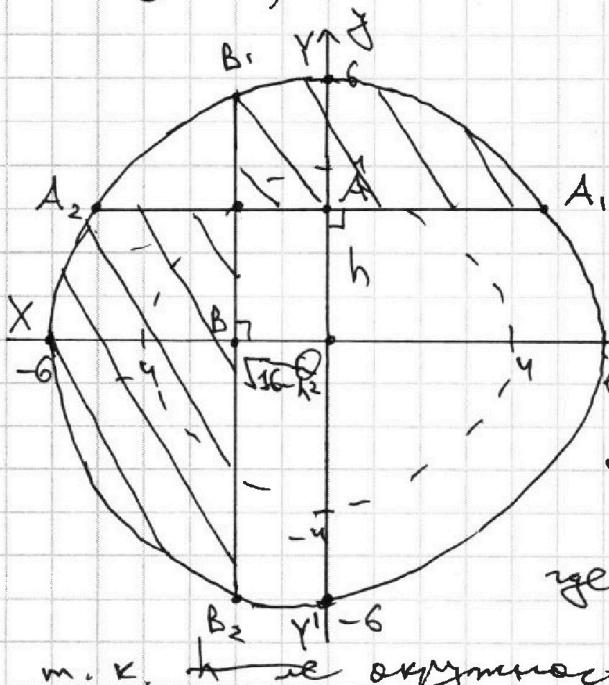
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x^2 + y^2 \leq 36$ описывает круг с центром $O(0; 0)$ и радиусом 6.

$A(x + 4 \sin \alpha) \cdot (y - 4 \cos \alpha) \leq 0$ значит вся плоскость на 4 прямии $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$, где из которых нам интересен $(-4 \sin \alpha; 4 \cos \alpha)$ движущийся по окружности радиуса 4. Кроме того, в силу симметрии можно рассматривать $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$, тогда $\alpha + \frac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$ тоже возможен.



Тогда $\alpha = \beta(0; p)$, где p - прямая $y = 4 \cos \alpha$, тогда $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$, т.е. $4 \cos \alpha \in (0; 4]$, т.е. $h \in (0; 4]$.

Тогда $S(0; q) = \sqrt{36 - h^2}$, где q - прямая $x = -4 \sin \alpha$, м.к. не окружность радиуса 4 (ан.вариант)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

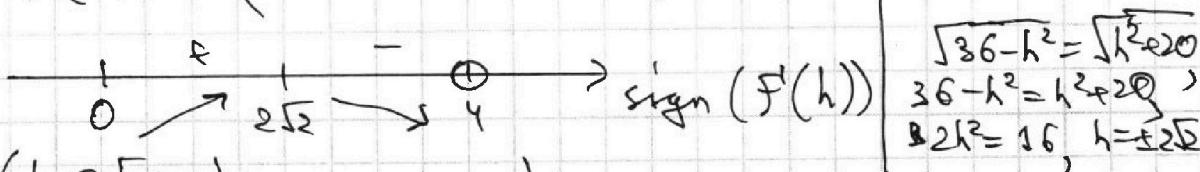
Отмечено на рисунке некоторые точки для удобства. Две наклонные линии на периметре криволинейной части фигуры $\Phi(\lambda)$.
 Он равен $A_1\overline{B_1} + A_2\overline{B_2} = \overline{A_1Y} + \overline{YB_1} + \overline{A_2X} + \overline{XB_2} =$
 $= \overline{A_1Y} + \overline{B_2Y'} + \overline{A_2X} + \overline{XB_2} = \overline{A_2Y} + \overline{A_2X} + \overline{XB_2} + \overline{B_2Y'} =$
 $= \overline{YY'} = 2\pi r_{\text{ст}} \quad \overline{AY} = \frac{1}{2} \overline{A_1A_2} \in \overline{A_2Y}; \quad \overline{BY} = \overline{B_2Y'} \text{ как дуга между параллельными линиями}. \quad \text{П.о. периметр криволинейной части фигуры } \Phi(\lambda) \text{ равен } 2\pi r = 6\pi.$

Теперь пусть $f(h)$ — функция периметра криволинейной части фигуры от h :

$$f(h) = |A_1A_2| + |B_2B_1| \geq 2|AA_1| + 2|BB_1| = \text{uz } 4OA_A,$$

$$= 2\sqrt{36-h^2} + 2\sqrt{36-16+h^2} = 2\left(\sqrt{36-h^2} + \sqrt{h^2+20}\right) \text{ и } 4OB_B,$$

$$f'(h) = 2 \cdot \left(\frac{-2h}{2\sqrt{36-h^2}} + \frac{2h}{2\sqrt{h^2+20}} \right) = \frac{2h(\sqrt{36-h^2} - \sqrt{h^2+20})}{\sqrt{h^2+20} \cdot \sqrt{36-h^2}}$$



$(h \in [0; 4] \text{ см. рисунок})$

$$\begin{cases} \sqrt{36-h^2} = \sqrt{h^2+20} \\ 36-h^2 = h^2+20 \\ 32h^2 = 16, h = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

П.о. наибольший периметр при $h = 2\sqrt{2}$:

$$f(2\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{28} + \sqrt{28}) = 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{7} = 8\sqrt{7}, \text{ а наименьший периметр } 8\sqrt{7} + 6\pi.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В этом случае $h = 2\sqrt{2}$ и $\sqrt{16-h^2} = 2\sqrt{2}$, т. о. $\alpha = \frac{\pi}{4}$
(или из $\triangle OAA_2$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Тогда, что
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $8\sqrt{7} + 6\pi$;

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

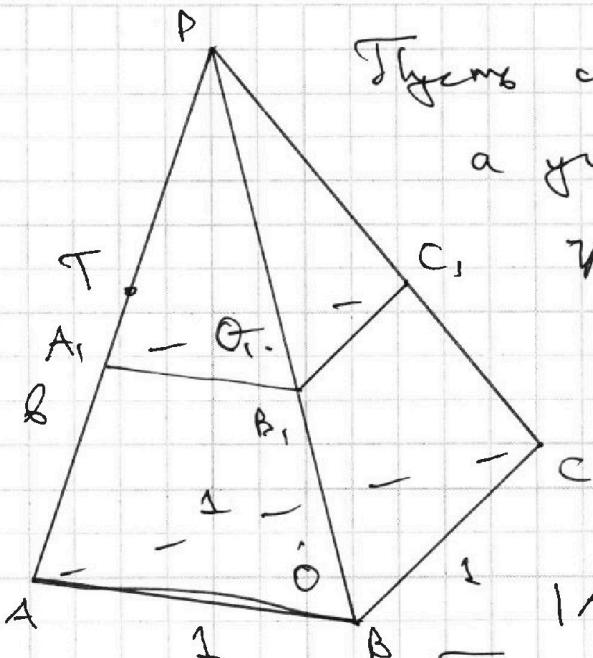


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Третья сторона основания 1,
а угол наклона боковой

стороны 2, тогда

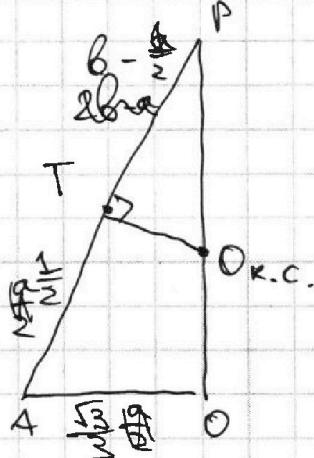
$$r_{obn} = r_{osn} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle}{2} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle}{2};$$

$$|PO| = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} \angle;$$

$$|AP| = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \angle}{4 \cdot 3} + \frac{1}{3}} = b;$$

Треугольник „каркасной схемы“

из узлов на $\triangle APB$ с внешней вписанной окружностью, тогда если T -вершина касания, то $|PT| = |AP| - \frac{|AC|}{2} = b - \frac{1}{2}$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} \text{N} \\ \sqrt{z} \end{array}$$

$$\sqrt{3}$$

$$-y - 1 + 2t = 3y + 1, \quad 4y = 2t - 2, \quad y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = \frac{t-1}{2},$$

$$y=2; \quad -2-1+2k = -3+2k$$

+2n

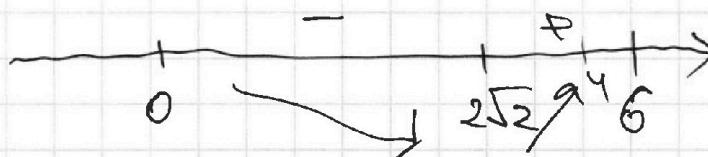
$$-\frac{3}{2}+2k$$

$$\frac{5}{2}-2n,$$

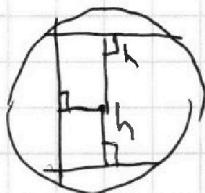
$$h \uparrow \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{36-h^2}$$

$$\leftarrow \sqrt{16-h^2} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{20+h^2}$$

$$f(h) \approx \frac{-eh}{2\sqrt{36-h^2}} + \frac{eh}{2\sqrt{12+20}} = \frac{h(\sqrt{h^2+20} - \sqrt{36-h^2})}{\sqrt{36-h^2} \cdot \sqrt{h^2+20}},$$



$$h=0 \quad \text{u} \quad h=6$$



$$\frac{2 \arccos \frac{h}{6}}{2\pi} \cdot 2\pi =$$

$$= 2\pi \cdot \arccos \frac{h}{6}$$

$$2\pi \cdot \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6}$$

12 аркос

$$\arccos \frac{h}{6} + \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6}{12\pi} =$$

$$= 6 \arccos \frac{h}{6} + 6 \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6} - 3\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(2) = 2 \cdot \sqrt{36-h^2} + 2 \sqrt{20+h^2} + 6 \operatorname{acos} \frac{h}{6} + 6 \operatorname{acos} \frac{\sqrt{36-h^2}}{6}$$

$$- 3\pi$$

$$f'(h) = \frac{2 \cdot (-2h)}{2 \cdot \sqrt{36-h^2}} + \frac{2 \cdot 2h}{2 \sqrt{20+h^2}} - 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{36}}} -$$

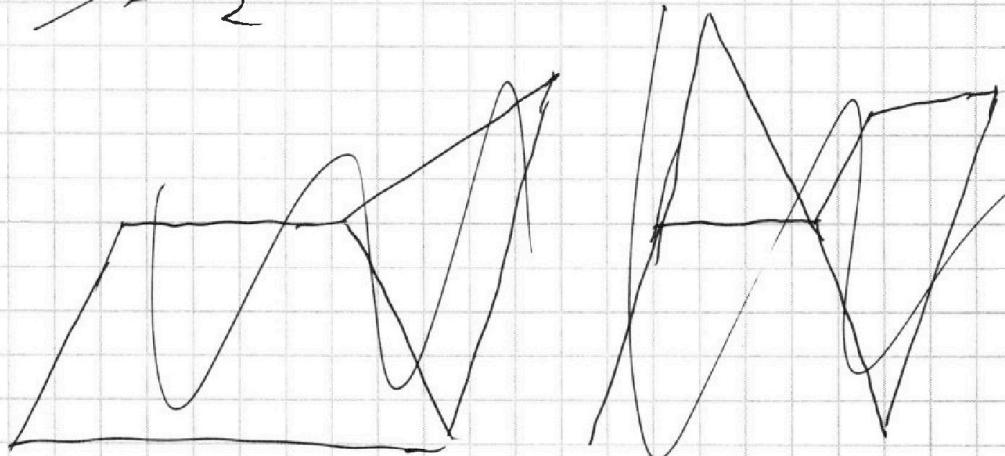
$$- 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1-2h}{\sqrt{1-\frac{16-h^2}{36}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{36-h^2}} =$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{20+h^2}} - \frac{2h}{\sqrt{36-h^2}} - \frac{6}{\sqrt{36-h^2}} + \frac{6h}{\sqrt{20+h^2} \cdot \sqrt{36-h^2}} =$$

=

$$6 \operatorname{acos} \frac{1}{6} + 6 \operatorname{acos} \frac{\sqrt{36-h^2}}{2} + 3\pi + 3\pi - 6 \operatorname{acos} \frac{h}{6}$$

$$- 6 \operatorname{acos} \frac{\sqrt{36-h^2}}{2}$$



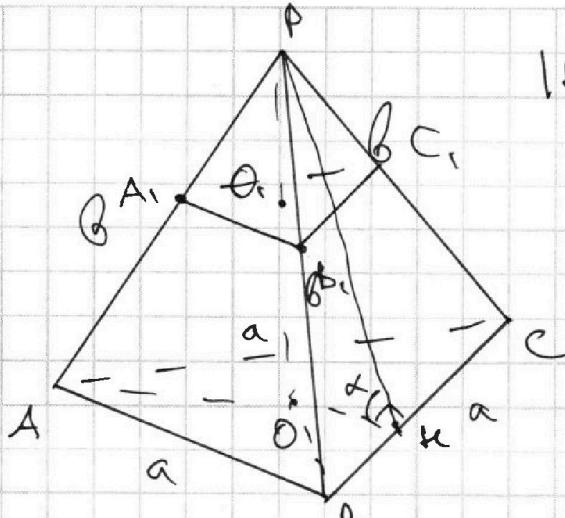


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

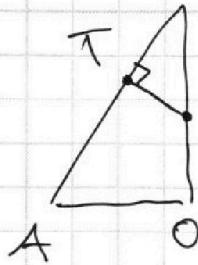
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$



$$\begin{aligned}|KO| &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad a = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|PK| &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} \\ r &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{aligned}h &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\ R &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{3} + r^2}\end{aligned}$$

$$R = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 - 2\cos^2 \pi y = -\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y),$$

$$\cos(2\pi y + \pi) = \cos(\pi x - \pi y),$$

$$\begin{cases} 2\pi y + \pi = \pi x - \pi y + 2\pi k, \\ 2\pi y + \pi = \pi y - \pi x + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\pi y + 1 - 2k = x, \\ y = -x - 1 + 2k, \\ x = -y - 1 + 2k, \end{cases}$$

$$3y + 1 + 2k = -y - 1 + 2t, \quad y = -2 + 2(t - k),$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n,$$

5). $E(\arccos x) = [0; \pi]$, $E(\arcsin x) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] = E(-\arcsin x)$.

Несложное: $\begin{cases} \arccos \frac{x}{2} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 1, x = 2, \\ \frac{y}{4} = 1, y = 4 \end{cases}$

$$(\sin 4\pi - \sin 7\pi) \cdot \sin 4\pi = (0 - 0) \cdot 0 = 0,$$

$$(\cos 4\pi + \cos 7\pi) \cdot \cos 4\pi = (1 - 1) \cdot 1 = 0,$$

2). $(y; (3y+1-2k; y))$, $x \in \{-7; \dots; 7\}$, $y \in \{-4; \dots; 4\}$

$$y = -4: x = -12 + 1 + 2t = -11 + 2t, \quad \left\{ \begin{array}{l} (-7; -4) \\ (-5; -4) \\ (-3; -4) \\ (-1; -4) \end{array} \right\} 8$$

$$y = -3: x = -9 + 1 + 2t = -8 + 2t,$$

$$(-6; -3), (-4; -3), (-2; -3), (0; -3), -7$$

$$y = -2: (-7; -2) - 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{N}^1 \\ A = \overline{xxxx} &= x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101, \\ C \neq 101, B: 101, B = 101 \cdot y &\quad \text{простое простое} \\ y = 7, B = 707, &= 7 \cdot 101 \\ A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot x \cdot C & \end{aligned}$$

- 1). $x = 11$, $x = 7$: $C : 11 \Rightarrow C = 11;$
- 2). $x \neq 7$: $C \geq 77$ - нет ($7777; 707; 11$).

$$\begin{aligned} \text{N}^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} &= \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+x} + \frac{3}{16}, \quad (x-y)(y+x) = \\ \cancel{\frac{xy}{x+y}} + \cancel{\frac{3}{xy}} &= y+x \\ \frac{x+y+3}{xy} &= \frac{y+x+x-y+3}{(x-y)(y+x)}, \quad x+y+3 > 0, \quad | x+y \\ x-y &= xy + 4x - 4y - 16, \quad x-y = 4 \\ x^2 - y^2 - 12xy &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ = 4 \cdot (x^2 + xy + y^2) - 12xy &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x^2 - 2xy + y^2) \\ = 4 \cdot (x-y)^2 &= 4 \cdot 16 = 64. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ \hline 1112 \end{array}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+x+x-y+3}{(x-y)(y+x)}, \quad x+y+3 > 0, \quad | x+y$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16, \quad x-y = 4$$

$$x^2 - y^2 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4 \cdot (x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 4 \cdot (x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64.$$

N³

$$\sin^2 \alpha_{xy} - \sin \alpha_{xy} \cdot \sin \beta_{xy} = \cos^2 \alpha_{xy} + \cos \alpha_{xy} \cdot \cos \beta_{xy},$$

$$\sin^2 \alpha_{xy} - \cos^2 \beta_{xy} = \sin \alpha_{xy} \cdot \sin \beta_{xy} + \cos \alpha_{xy} \cdot \cos \beta_{xy},$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N₃

$$y = -1: (-6; -1) \dots -2$$

$$y = 0: (-2; 0) - 8$$

$$y = 1: ?$$

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 40 + 28 = 68,$$

$$y = 2: 8$$

$$y = 3: ?$$

$$y = 4: ?$$

$$y: 2 \Rightarrow \begin{cases} -x - 1 + 2k \neq 2, \\ 3y + 1 + 2k \neq 2, \end{cases} \quad y: 2 \Rightarrow \begin{cases} 3y + 1 + 2k \neq 2, \\ -y - 1 + 2k \neq 2, \end{cases}$$

✓ 4

Система x одинак... , тогда получаем:

C_x^4 - всего, хороших: $1 \cdot C_{x-2}^2$

$$A_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{32}{x(x-1)};$$

$$A_2 = \frac{C_{x-2}^{2+t}}{C_x^{4+t}} = \frac{(x-2)!}{(t+2)! \cdot (x-4-t)!} \cdot \frac{(4+t)! \cdot (x-4-t)!}{x!} =$$

$$= \frac{(t+4) \cdot (t+3)}{x \cdot (x-1)} = 31 \cdot \frac{32}{x \cdot (x-1)}, (t+4)(t+3) = 31 \cdot 32,$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

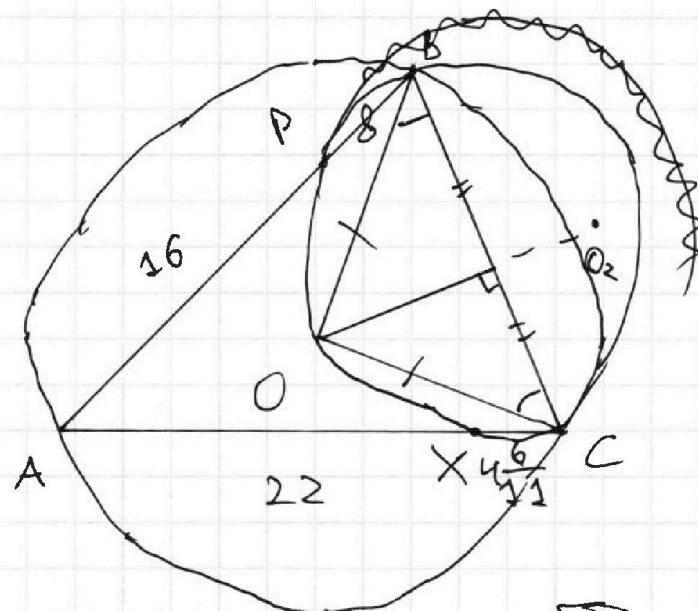
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + 7t + 12 = 11 \cdot 12, t^2 + 7t - 120 = 0, t \in \{-15; 8\}$$

$$t = 8$$

$$\sqrt{5}$$

$$22 \cdot 28 = 121 \cdot 4 = \\ = 484$$



$$\text{cm. } A = 16 \cdot 24 = 8 \cdot 48 =$$

$$= 4 \cdot 96 = 384$$

$$22 \cdot (22 + x) = 384,$$

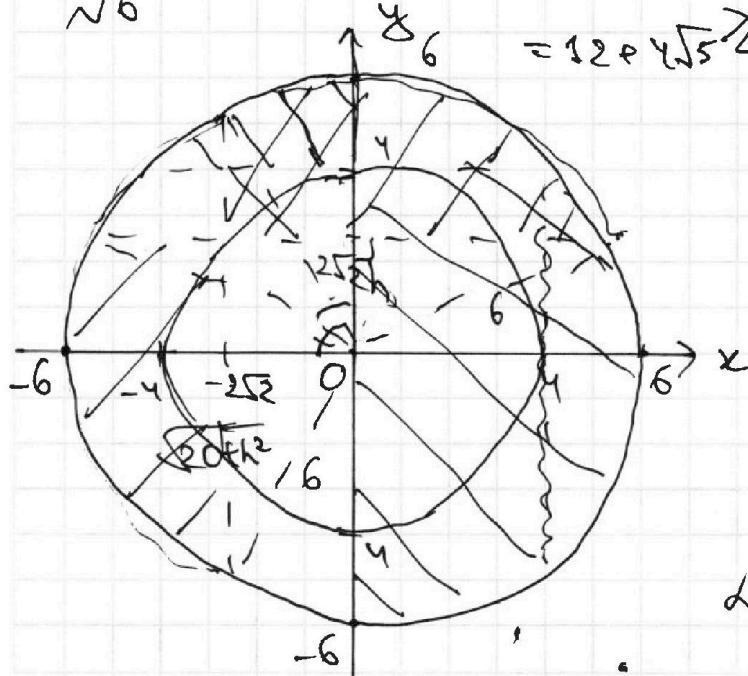
$$11 \cdot (22 + x) = 192,$$

$$22 + x = \frac{192}{11},$$

$$x = \frac{192}{11} - 22 =$$

$$= \frac{384 - 484}{22} = -\frac{100}{22} = -\frac{50}{11}$$

$$\sqrt{6}$$



$$x \geq -4 \sin \alpha, \\ y \leq 4 \cos \alpha,$$

$$x \leq -4 \sin \alpha, \\ y \geq 4 \cos \alpha,$$

$$\alpha = 0; 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; 3 + \sqrt{5} \geq 2\sqrt{2},$$

$$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]: 8 + 6\sqrt{5} \geq 28, \\ 3\sqrt{5} \geq 20, 3 \geq 2\sqrt{5}$$