



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Пётя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$ ($a \in \mathbb{N}$, $a \leq 9$). Заметим, что $A : 101$, но $A \not\equiv 101^2$, т.о.
 $B \cdot C : 101$ (также $A \cdot B \cdot C$ - не квадрат). Но $C \not\equiv 101$, т.к. C - двузначное число, тогда $B : 101$.
Заметим, что B имеет 9 вариантов: $101, 202, \dots, 909$, но по условию B имеет хотя бы одну цифру 7, т.о. $B = 707$. Тогда $A \cdot B : 11$, но $A \cdot B \not\equiv 11^2$, тогда $C : 11$ (также $A \cdot B \cdot C$ - не квадрат). Но из всех двузначных чисел, делимых на 11 есть только одно, которое содержит цифру 1^ю число 11. Тогда $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11 = a \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 101^2$. Тем самым, то такое число является квадратом тогда и только тогда, когда $a = 7$.

Ответ: $\{(7777; 707; 11)\}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим условие:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)},$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}, \quad \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3 \neq 0, \text{ т.к. } x > 0 \text{ и } y > 0),$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)}, \text{ где } x \neq 4:$$

$$(x-4)(y+4) = xy, \quad xy - 4y + 4x - 16 = xy,$$

$$4x - 4y = 16, \quad x - y = 4.$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4(x^2 + xy + y^2) - 4 \cdot 3xy = 4 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = 4 \cdot (x-y)^2 = \\ &= 4 \cdot 16 = 64. \end{aligned}$$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{a). } \sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y, \\ \sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y &= \cos^2 \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y, \\ -\cos 2\pi y &= \cos(\pi y - \pi x), \\ \cos(2\pi y + \pi) &= \cos(\pi y - \pi x) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\pi y + \pi = \pi y - \pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi y + \pi = \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 1 = y - x + 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2y + 1 = x - y + 2n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 3y + 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

м.о. получены решения вида $(-y - 1 + 2k; y) | k \in \mathbb{Z}$ и $(3y + 1 - 2n; y) | n \in \mathbb{Z}$. Поскольку, эти линии пересекаются: $-y - 1 + 2t = 3y + 1$, $4y = 2t - 2$, $y = \frac{t-1}{2}$, м.о. при $y = \frac{1}{2} m$, $m \in \mathbb{Z}$ имеют пересечение решений.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } y = \frac{1}{2} m, m \in \mathbb{Z}: & \{(-y - 1 + 2k; y) | k \in \mathbb{Z}\}, \\ y \neq \frac{1}{2} m, m \in \mathbb{Z}: & \{(-y - 1 + 2k; y) | k \in \mathbb{Z}\} \\ & \cup \{(3y + 1 - 2n; y) | n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

б). По условию $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$, поэтому из а) понятно, что решения будут пересекаться,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

поэтому достаточно лишь рассмотреть
 $(-y-1+2k; y) | k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $E(\arccos x) = [0; \pi]$ и $E(\arcsin x) = E(-\arcsin x) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,
поэтому $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$ не выполняется тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0, \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1, \\ \frac{y}{4} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 4. \end{cases}$$

Далее заметим, что $D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1]$, поэтому $x \in \{-7; -6; \dots; 7\}$ и $y \in \{-4; \dots; 4\}$.

Тогда $y : 2$: $-y-1+2k \neq 2$, поэтому такие y имеют по 8 вариантов x $(-7; -5; \dots; 5; 7)$.

Тогда $y \not\equiv 2$: $-y-1+2k \equiv 2$, поэтому такие y имеют по 7 вариантов x $(-6; -4; \dots; 4; 6)$, т.е. всего

5 чётных y и 4 нечётных в $\{-4; \dots; 4\}$, т.е.

$5 \cdot 8 + 4 \cdot 7$ вариантов, кроме $(7; 4)$, поэтому

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 1 = 40 + 28 - 1 = 67.$$

Ответ: 67.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в классе x одноклассников
($x \geq 4$ из условия). Посчитаем изначальную
вероятность:

Всего C_x^4 вариантов раздать билеты, из них
нужных $4 \cdot C_{x-2}^2$, т.е. 2 билета на Тему и
Васю - 1 вариант и 2 билета оставшимся.

$$\text{Изначальная вероятность: } C_{x-2}^2 : C_x^4 = \\ = \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot (x-1)} = \frac{12}{x(x-1)}.$$

Пусть добавим t билетов ($t \in \mathbb{N}$), тогда
аналогично посчитаем вероятность:

$$C_{x-2}^{2+t} : C_x^{4+t} = \frac{(x-2)!}{(t+2)! \cdot (x-4-t)!} \cdot \frac{(x-4-t)! \cdot (t+4)!}{x!} = \\ = \frac{(t+4) \cdot (t+3)}{x \cdot (x-1)} = 11 \cdot \frac{12}{x(x-1)} \mid \cdot x(x-1) \neq 0$$

$$t^2 + 7t + 12 \geq 11 \cdot 12, \quad t^2 + 7t - 120 = 0 \Leftrightarrow t \in \{-15; 8\}$$

но $t \in \mathbb{N}$, т.о. $t = 8$. Т.е. всего было выдано

$4 + 8 = 12$ билетов.

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

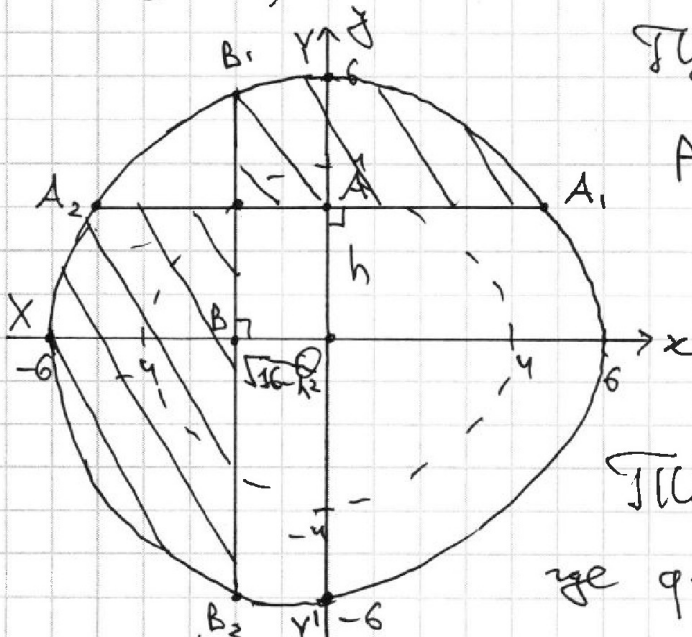
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x^2 + y^2 \leq 36$ определяет круг с центром $O(0; 0)$ и радиусом 6.
 $A(x + y \sin \alpha) \cdot (y - y \cos \alpha) \leq 0$ дает всю плоскость на 4 прямых $x = -y \sin \alpha$ и $y = y \cos \alpha$, две из которых нам интересны.
 Заметим, что пересечение этих прямых $(-y \sin \alpha; y \cos \alpha)$ движется по окружности радиуса 4. Кроме того, в силу симметрии можно рассматривать $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$, тогда $\alpha + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ тоже подойдут.



Пусть $h = \rho(0; p)$, где

p - прямая $y = y \cos \alpha$,
 тогда $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2})$, т.е.

$y \cos \alpha \in (0; 4]$, т.е.

$h \in (0; 4]$.

Тогда $\rho(0; q) = \sqrt{16 - h^2}$,

где q - прямая $x = -y \sin \alpha$,

т.е. h - это окружность радиуса 4 (см. рисунок)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отметим на рисунке некоторые точки для удобства. Для начала рассмотрим на периметр криволинейной части фигуры $\Phi(L)$. Он равен $\widetilde{A_1B_1} + \widetilde{A_2B_2} = \widetilde{A_1Y} + \widetilde{YB_1} + \widetilde{A_2X} + \widetilde{XB_2} = \widetilde{A_1Y} + \widetilde{B_2Y'} + \widetilde{A_2X} + \widetilde{XB_2} = \widetilde{A_2Y} + \widetilde{A_2X} + \widetilde{XB_2} + \widetilde{B_2Y'} = \widetilde{Y'Y'} = 2\pi r = 6\pi$ (как сумма между параллельными прямыми). Итого, периметр криволинейной части всегда равен 6π .

Теперь пусть $F(h)$ — функция периметра некриволинейной части фигуры от h :

$$F(h) = |A_1A_2| + |B_1B_2| \geq 2|AA_1| + 2|BB_1| = 2\sqrt{36-h^2} + 2\sqrt{36-16+h^2} = 2(\sqrt{36-h^2} + \sqrt{h^2+20})$$

$$F'(h) = 2 \cdot \left(\frac{-2h}{2\sqrt{36-h^2}} + \frac{2h}{2\sqrt{h^2+20}} \right) = \frac{2h(\sqrt{36-h^2} - \sqrt{h^2+20})}{\sqrt{h^2+20} \cdot \sqrt{36-h^2}}$$

$\begin{array}{c} \text{+} \\ 0 \quad \nearrow \quad 2\sqrt{2} \quad \searrow \quad 4 \end{array} \rightarrow \text{sign}(F'(h))$
 $\left. \begin{array}{l} \sqrt{36-h^2} = \sqrt{h^2+20} \\ 36-h^2 = h^2+20 \\ 2h^2 = 16, h = \pm 2\sqrt{2} \end{array} \right\}$

Итого, наибольший периметр при $h = 2\sqrt{2}$:

$$F(2\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{28} + \sqrt{28}) = 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{7} = 8\sqrt{7}, \text{ а полный периметр } 8\sqrt{7} + 6\pi.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В этом случае $h = 2\sqrt{2}$ и $\sqrt{16 - h^2} = 2\sqrt{2}$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$
(или $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Следовательно, что
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $8\sqrt{2} + 6\pi$;
 $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.



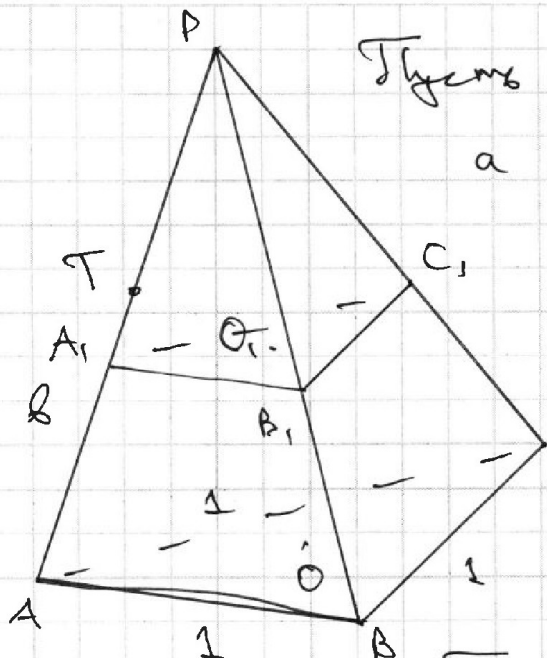
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть сторона основания 1,
а угол наклона боковой
гранн α , тогда

$$r_{\text{вн}} = r_{\text{вн}} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2};$$

$$|PO| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tan \alpha;$$

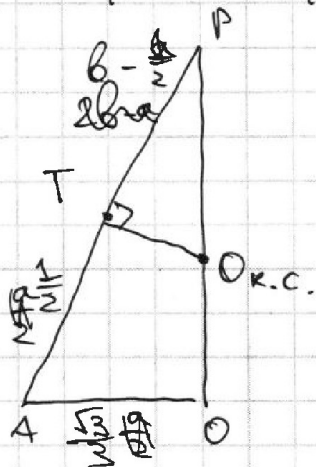
$$|AP| = \sqrt{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{4}} = b;$$

Проекцией "каркасной сферы"

из условия на $\triangle APC$ является вписанная

окружность, тогда если T-точка касания,

$$\text{то } |AT| = 2|AP| - \frac{|AC|}{2} = b - \frac{1}{2}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-y-1+2t=3y+1, \quad y=2t-2, \quad y=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}=\frac{t-1}{2},$$

$$y=2: -2-1+2k=-3+2k$$

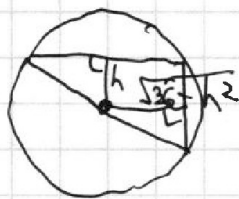
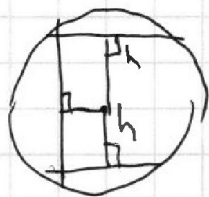
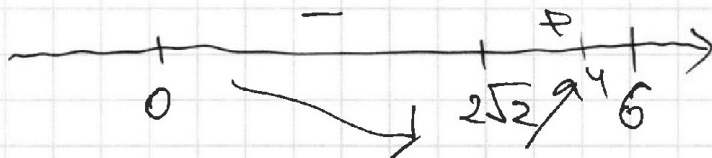
$$-\frac{3}{2}+2k$$

$$h \uparrow \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{36-h^2}$$

$$\leftarrow \sqrt{16-h^2} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{20+h^2}$$

$$f'(h) = \frac{-2h}{2\sqrt{36-h^2}} + \frac{2h}{2\sqrt{20+h^2}} = \frac{h(\sqrt{h^2+20}-\sqrt{36-h^2})}{\sqrt{36-h^2} \cdot \sqrt{h^2+20}},$$

$$h=0 \text{ и } h=6$$



$$\frac{2 \arccos \frac{h}{6} \cdot 2\pi r}{2\pi} =$$

$$= 12 \cdot \arccos \frac{h}{6}$$

$$12 \cdot \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6}$$

$$12 \arccos$$

$$\frac{\arccos \frac{h}{6} + \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6} - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \cdot 12\pi =$$

$$= 6 \arccos \frac{h}{6} + 6 \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6} - 3\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot \sqrt{36-h^2} + 2\sqrt{20+h^2} + 6 \arccos \frac{h}{6} + 6 \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{6}$$

$- 3\pi$

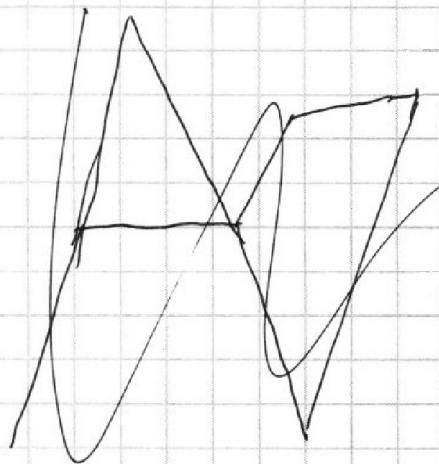
$$f'(h) = \frac{2 \cdot (-2h)}{2 \cdot \sqrt{36-h^2}} + \frac{2 \cdot 2h}{2\sqrt{20+h^2}} + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{36}}} -$$

$$- 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1-2h}{\sqrt{1-\frac{16-h^2}{36}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{16-h^2}} =$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{20+h^2}} - \frac{2h}{\sqrt{36-h^2}} - \frac{6}{\sqrt{36-h^2}} + \frac{6h}{\sqrt{20+h^2} \cdot \sqrt{16-h^2}} =$$

$=$

$$6 \arccos \frac{h}{6} + 6 \arccos \frac{\sqrt{36-h^2}}{2} + 3\pi + 3\pi - 6 \arccos \frac{h}{6} - 6 \arccos \frac{\sqrt{16-h^2}}{2}$$



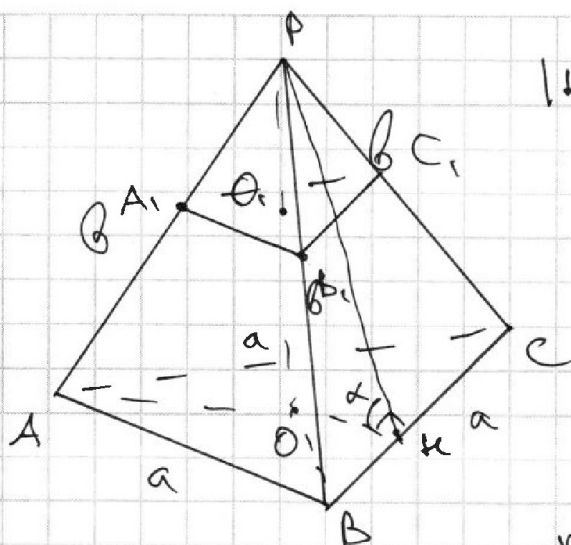


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



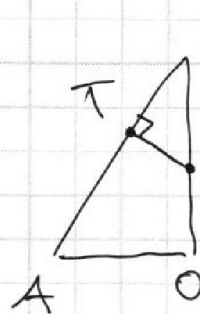
$$|KO| = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad a=1,$$

$$|AK| = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{a}{2} - a = b - \frac{a}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 - 2\cos^2 \pi y = -\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y),$$

$$\cos(2\pi y + \pi) = \cos(\pi x - \pi y),$$

$$\begin{cases} 2\pi y + \pi = \pi x - \pi y + 2\pi k, \\ 2\pi y + \pi = \pi y - \pi x + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 1 - 2k = x, \\ y = -x - 1 + 2k, \\ x = -y - 1 + 2k, \end{cases}$$

$$3y + 1 + 2k = -y - 1 + 2t, \quad 4y = -2 + 2(t - k), \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n,$$

$$\delta). E(\arccos x) = [0; \pi], \quad E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] = E(-\arcsin x).$$

$$\text{Не подходит: } \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0, \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = 1, x = 7, \\ \frac{y}{4} = 1, y = 4, \end{cases}$$

$$(\sin 4\pi - \sin 7\pi) \cdot \sin 4\pi = (0 - 0) \cdot 0 = 0,$$

$$(\cos 4\pi + \cos 7\pi) \cdot \cos 4\pi = (1 - 1) \cdot 1 = 0,$$

$$1). (y; (3y + 1 - 2k; y), \quad x \in \{-7; \dots; 7\}, \quad y \in \{-4; \dots; 4\}$$

$$y = 4: y = -4: x = -12 + 1 + 2t = -11 + 2t, \quad \begin{pmatrix} -7; -4 \\ -5; -4 \\ -3; -4 \\ -1; -4 \end{pmatrix} \Bigg\} 8$$

$$y = -3: x = -9 + 1 + 2t = -8 + 2t, \quad (-6; -3), (-4; -3), (-2; -3), (0; -3), -7$$

$$y = -2: (-7; -2) - 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$y = -1: (-6; -1) \dots - 7$$

$$y = 0: (-7; 0) - 8$$

$$y = 1: 7$$

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 40 + 28 = 68,$$

$$y = 2: 8$$

$$y = 3: 7$$

$$y = 4: 8$$

$$y: 2 \Rightarrow \begin{cases} -x - 1 + 2k: 2, \\ 3y + 1 + 2k: 2, \end{cases} \quad y: 2 \Rightarrow \begin{cases} 3y + 1 + 2k: 2, \\ -y - 1 + 2k: 2, \end{cases}$$

№4

Пусть x единиц..., тогда изначально:

$$C_x^4 - \text{всего, хороших: } 1 \cdot C_{x-2}^2$$

$$A_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{12}{x(x-1)};$$

$$A_2 = \frac{C_{x-2}^{2+t}}{C_x^{4+t}} = \frac{(x-2)!}{(t+2)! \cdot (x-4-t)!} \cdot \frac{(4+t)! \cdot (x-4-t)!}{x!} =$$

$$= \frac{(t+4) \cdot (t+3)}{x \cdot (x-1)} = 11 \cdot \frac{12}{x(x-1)}, \quad (t+4)(t+3) = 11 \cdot 12,$$

