МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

1) $A = 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k$, где $k \in \mathbb{N} \cap [1;9]$, 11 и 101 – простые

2) $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot B \cdot C = m^2$, где $m \in \mathbb{N}$

3) $m^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow B \cdot C \,\vdots\, 11 \cdot 101 \overset{C<100}{\Rightarrow} B \,\vdots\, 101$

4) $B = 606$ (единственное трехзначное число, кратное 101, одна из цифр которого равна 6)

5) $\begin{cases} B \cdot C \,\vdots\, 11 \\ B \not\vdots\, 11 \end{cases} \Rightarrow C \,\vdots\, 11$

6) $C = 33$ (единственное двузначное число, кратное 11, одна из цифр которого равна 3)

7) $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot 606 \cdot 33 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot k = m^2 \Rightarrow$
$k = 2 \cdot n^2$, где $n \in \mathbb{N}$ $\overset{k<10}{\Rightarrow} k = 2 \vee k = 8$, т.е.
$A = 2222$ или $A = 8888$

Ответ: (2222; 606; 33); (8888; 606; 33).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow$

$\frac{1}{xy}(x+y+5) = \frac{1}{(x-2)(y+2)}(x+y+5) \underset{y>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} xy = (x-2)(y+2) \Leftrightarrow$

$2x - 2y = 4 \Leftrightarrow x - y = 2$

$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 6xy =$

$= (x-y)^3 + 3xy(x-y-2) \overset{x-y=2}{=} 2^3 = 8$ – единственное возможное значение выражения M

$M = 8$ достигается, например, при $x=3$ и $y=1$

$K = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{5}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3-2} + \frac{1}{1+2} + \frac{5}{(3-2)(1+2)}$

$M = 3^3 - 1^3 - 6 \cdot 3 \cdot 1 = 26 - 18 = 8$

Ответ: $M = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

а) $(\sin\pi x + \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x - \cos\pi y)\cos\pi x \iff$

$2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}(x+y))\cdot\cos(\frac{\pi}{2}(x-y))\cdot\sin\pi x = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}(x+y))\cdot\sin(\frac{\pi}{2}(x-y))\cdot\cos\pi x \iff$

$\left[\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{2}(x+y)) = 0\\ \cos(\frac{\pi}{2}(x-y))\cdot\sin\pi x = \sin(\frac{\pi}{2}(x-y))\cos\pi x\end{array}\right. \iff$

$\left[\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{2}(x+y)) = 0\\ \sin(\pi x - \frac{\pi}{2}(x-y)) = 0\end{array}\right. \iff \sin(\frac{\pi}{2}(x+y)) = 0 \iff x+y = 2k$, где $k\in\mathbb{Z}$

б)] $f(a) = \arcsin a$, тогда $D_f = [-1;1]$, $E_f = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, т.е. $\arcsin a_1 + \arcsin a_2 \geqslant \pi \iff a_1 = a_2 = 1$

- $\arcsin\frac{x}{6}$ определен при $x\in[-6;6]$
- $\arcsin\frac{y}{2}$ определен при $y\in[-2;2]$

Известно, что x и y целые (по усл.), одной четности (п. а)

1.] $\cancel{x}\cdot y = \pm1$, тогда $x\in\{-5;-3;-1;1;3;5\}$ и любые пары из этих чисел подходят. Всего таких пар $(x;y)$: $6\cdot2 = 12$
2.] $y\in\{-2;0;2\}$, тогда $x\in\{-6;-4;-2;0;2;4;6\}$. Из пар вида $(x;y)$ под условие не подходит только пара ~~(2;6)~~ (6;2), т.к. $\arcsin\frac{6}{6} + \arcsin\frac{2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Т.е. всего пар такого вида: $7\cdot3 - 1 = 20$
3. Тогда всего пар $(x;y)$ удовлетворяющих условию: $12 + 20 = 32$

Ответ: а) $\{(x;y)\,|\,x,y\in\mathbb{R} \wedge x+y = 2k \wedge k\in\mathbb{Z}\}$
б) 32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\exists$ n – количество одиннадцатиклассников,
k – количество билетов
$p(n,k)$ – вероятность, что двоим выбранным одиннадцатиклассникам достанется билет на концерт

$$p(n,k) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!\cdot k!\cdot(n-k)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!\cdot n!} = \frac{k\cdot(k-1)}{n\cdot(n-1)}$$

m – выделили билетов в конце месяца

$$6p(n,4) = p(n,m) \Leftrightarrow \frac{6\cdot 4\cdot 3}{n(n-1)} = \frac{m\cdot(m-1)}{n\cdot(n-1)} \Leftrightarrow$$

$$m^2 - m - 72 = 0 \Leftrightarrow (m-8)(m+9) = 0 \overset{m\geq 0}{\Leftrightarrow} m = 8$$

Ответ: 8 билетов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

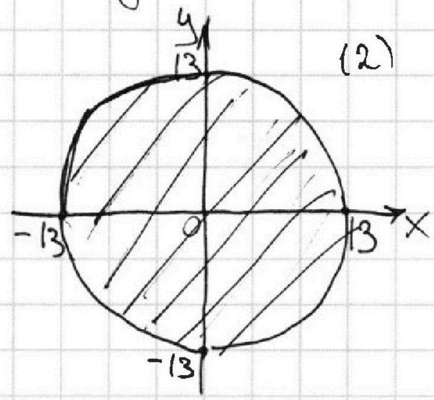
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

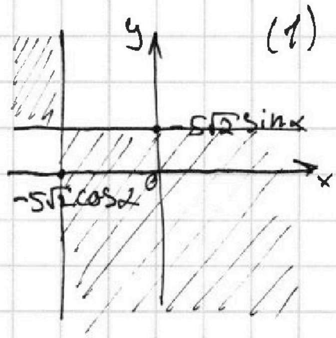
СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

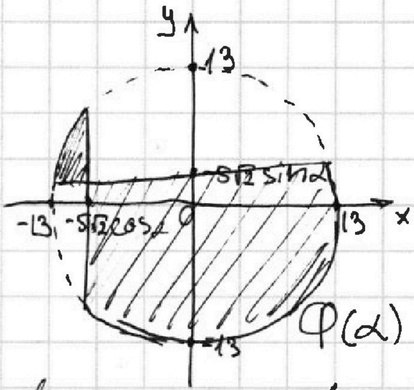
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 (стр 1)

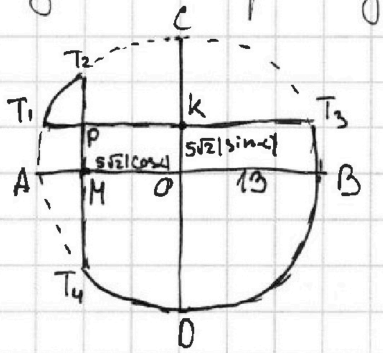
$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0 & (1)\\ x^2+y^2\le 169 & (2)\end{cases}$$







Граница фигуры Φ состоит из двух дуг и двух взаимно перпендикулярных отрезков



T_1, T_2, T_3, T_4 – "вершины" Φ

AB, CD – диаметры окружности описанной около Φ: $AB \parallel T_1T_3$, $CD \parallel T_2T_4$; O – центр этой окружности

$M = AB \cap T_2T_4$; $K = CD \cap T_1T_3$

$$\left.\begin{array}{l} T_1T_3 \parallel AB \Rightarrow \cup AT_1 = \cup T_3B \\ T_2T_4 \parallel CD \Rightarrow \cup CT_2 = \cup DT_4 \end{array}\right| \Rightarrow$$

1) $\cup T_1T_2 + \cup T_3T_4 =$ [длина внешней границы Φ] $=$
$\cup T_1T_2 + \cup AT_1 + \cup CT_2 + \cup T_3T_4 - \cup T_3B - \cup T_4D = \cup AC + \cup BD = 13\pi$

[Везде рассмотрены длины меньшей из дуг]

2)
$$\left.\begin{array}{l} T_2T_4 = 2\sqrt{OM^2+OT_4^2} = 2\sqrt{-50\cos^2\alpha+169} \\ T_1T_3 = 2\sqrt{-OK^2+OT_3^2} = 2\sqrt{-50\sin^2\alpha+169} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$T_1T_3^2 + T_2T_4^2 = 4(169\cdot 2 - 50(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)) = 4\cdot 288 = const$

$]\,B\cancel{A} = 169 ;\ A\cancel{B} = 50$ $\quad T_2T_4 + T_1T_3 - max \Leftrightarrow$

$\sqrt{B - A\sin^2\alpha} + \sqrt{B - A(1-\sin^2\alpha)} - max$

~~$]\,\alpha = \sin x ;\ -1 \le \alpha \le 1$~~ $\quad]\,x = \sin\alpha ,\ -1 \le x \le 1$

Задача №6 (стр 2)

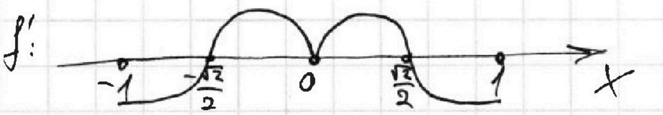
$$\left(\sqrt{B-Ax^2}+\sqrt{B-A+Ax^2}\right)' = f'(x) =$$

$$\frac{-Ax}{\sqrt{B-Ax^2}}+\frac{Ax}{\sqrt{B-A+Ax^2}} > 0 \overset{A>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x\left(\sqrt{B-Ax^2}-\sqrt{B-A+Ax^2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x>0 \wedge B-Ax^2 > B-A+Ax^2 \\ x<0 \wedge B-Ax^2 < B-A+Ax^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \wedge 2Ax^2 < A \\ x<0 \wedge 2Ax^2 > A \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{\sqrt2}{2} \\ 0>x>-\frac{\sqrt2}{2} \end{array}\right.$$



т.е. $\max f = \max\left(f(-1);\ f\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)\right)$

$f(-1)=\sqrt{169-50}+\sqrt{169} = 13+\sqrt{119} < 13+11=24$

$f\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt{169-50\cdot\frac12}+\sqrt{169-50+5\cdot\frac12} = 2\cdot\sqrt{144}=24$

Тогда максимальное значение M равно $\cup T_1T_2 + \cup T_3T_4 + T_1T_3 + T_2T_4) = 13\pi + 24$, которое достигается при $\sin\alpha = \frac{\sqrt2}{2} \Leftrightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ответ: $M = 13\pi + 24$, при $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на страницe. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

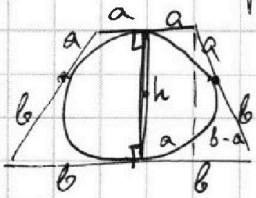
СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №7

1) Усеченная пирамида – правильная =>
все ее боковые грани – равнобокие трапеции,
основания – правильные многоугольники

2) Существует шар, касающийся всех ребер пирамиды
=> боковые грани – ~~в~~ описанные многоугольники



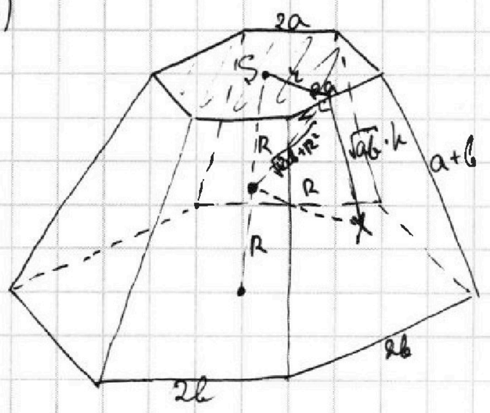
$(a+b)^2 = h^2 + (b-a)^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$

$S_{бп} = n \cdot 2\sqrt{ab}(a+b)$

пл-дь боковой пов-ти

кол-во боковых граней

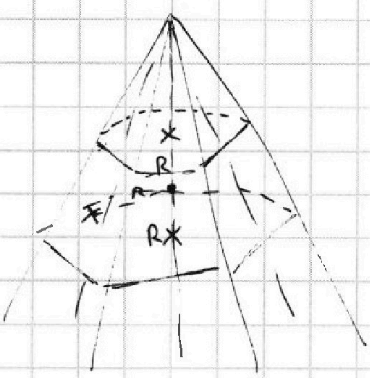
3)



~~$r^2 = R^2 + \sqrt{ab}^2 - R^2 \Rightarrow r = \sqrt{ab}$~~

~~$S = n \cdot a \cdot r = na\sqrt{ab}$~~

~~$\frac{S}{S_{бп}} = \frac{na\sqrt{ab}}{n2\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{a}{2(a+b)}$~~

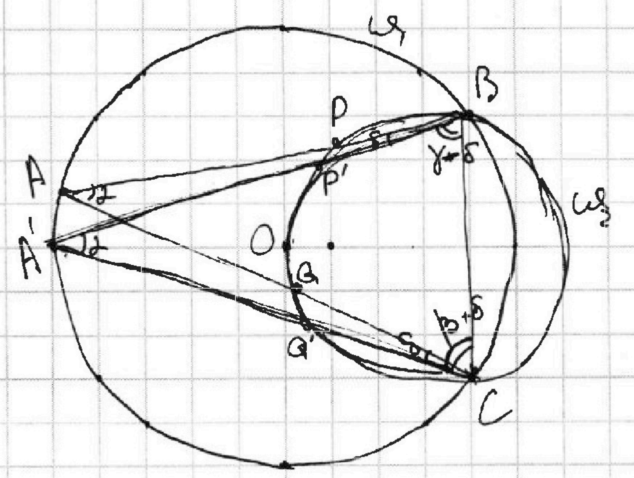


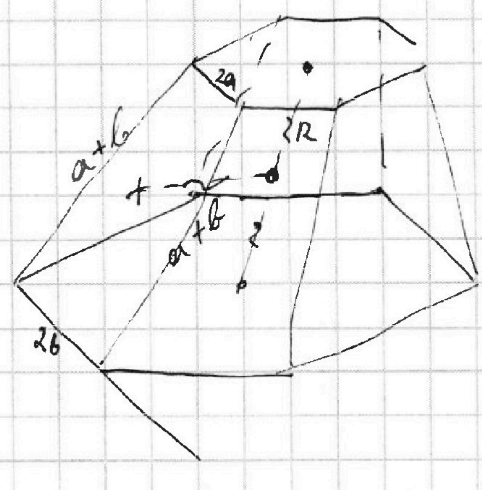
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\geq 0$ $\qquad 1^2+50=51$

$h=\sqrt{(a+b)^2-(b-a)^2}=2\sqrt{ab}$

$\int\frac{1}{2}r^2 d\varphi$

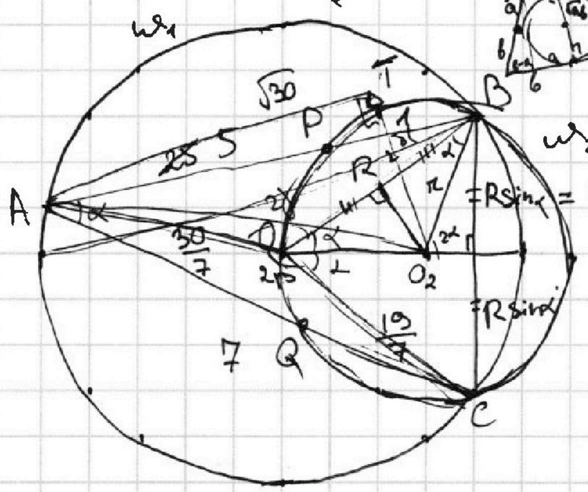
$$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}=\frac{(n-2)!\cdot 4!(n-4)!}{2!(n-4)!\cdot n!}=\frac{4\cdot 3}{n(n-1)}=\frac{12}{n(n-1)}$$

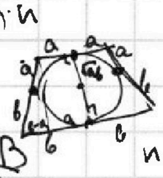
$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}=\frac{(n-2)!(n-k)!k!}{(k-2)!(n-k)!\cdot n!}=\frac{k\cdot(k-1)}{n(n-1)}=\frac{6\cdot 12}{n(n-1)}$$

$k=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-$

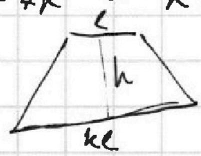
$$k^2-k-72=0 \iff (k+8)(k-9)=0 \iff k=9$$

$S=\sqrt{ab}(a+b)\cdot n$





$5\cdot 6=7k \Rightarrow k=\frac{30}{7}$



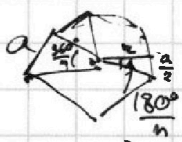
$S=\frac{1}{2}hl(k+1)$

$=R\sin\alpha=r\cdot\sin 2\alpha=2r\sin\alpha\cos\alpha$

$R=2r\cos\alpha$

$$S_{obc}=\frac{R\cdot R\cdot 2R\sin\alpha}{4r}=\frac{R^3\sin\alpha}{R/\cos\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha$$



$AO_2^2=30+r^2$ $\qquad \cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

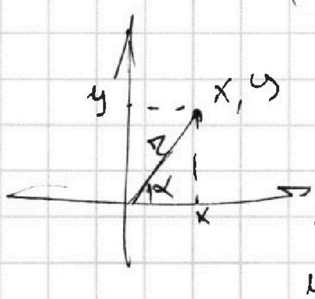
$36=AB^2=2R^2(1+\cos 2\gamma)=4R^2\cos^2\gamma$ $\qquad S=p\cdot r$ $\qquad \frac{a}{2r}=\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

$49=AC^2=2R^2(1+\cos 2\beta)$ $\qquad r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$

$AB=2R\cos\gamma\ \sin\gamma$ $\qquad p=\frac{1}{2}na$

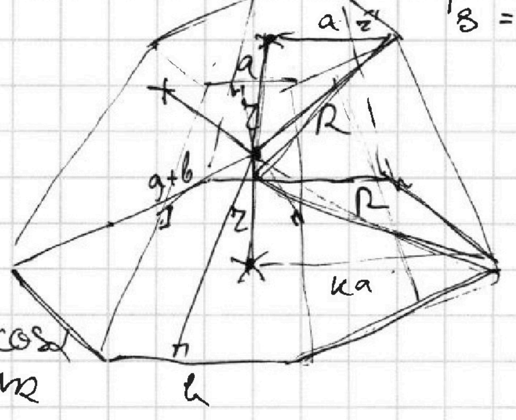
$AC=2R\cos\beta\ \sin\beta$ $\qquad S=\frac{1}{4}na^2\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$

$BC=2R\sin\alpha$



$x=r\cos\alpha$

$y=r\sin\alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x = r\cos\alpha$

$(r\cos\alpha + 5\sqrt{2}\cos\alpha)$

$\begin{cases} \cos\alpha(r+5\sqrt{2})^2\sin\alpha \le 0 \\ 0 \le r \le 13 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y = -5\sqrt{2}\sin\alpha \\ x > \dots \wedge y < \dots \\ x < \dots \wedge y > \dots \end{cases}$

$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$(a+b)^2$

$\cos\alpha\sin\alpha \le 0 \Leftrightarrow$

$\sin 2\alpha \le 0$

$\alpha \in [-\pi; 0]$

$\alpha = 0$

$\cos\alpha = 1 \quad \sin\alpha = 0$

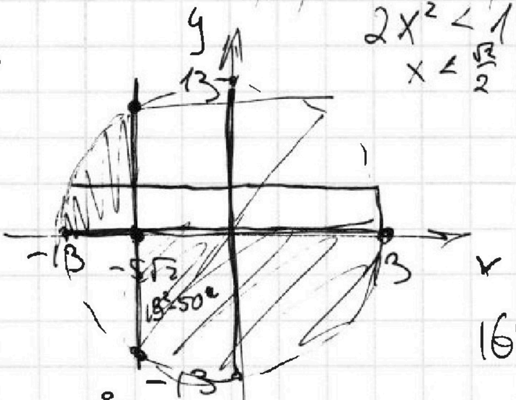
$A - Bx^2 > A - B + Bx^2$

$2x^2 < 1$

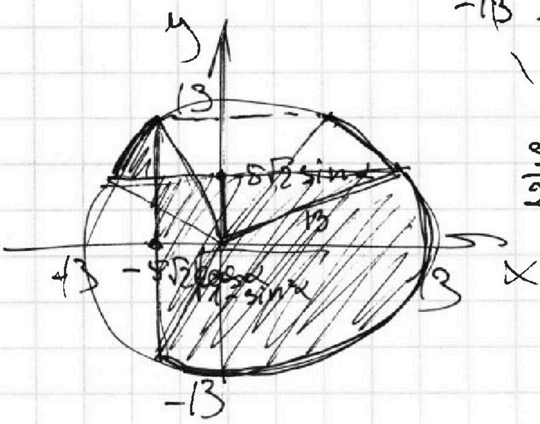
$x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$(x+5\sqrt{2})\,y \ge 0 \Leftrightarrow$

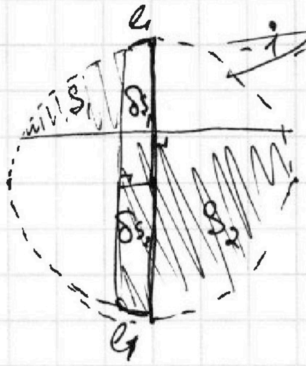
$\left[\begin{array}{l} y \le 0 \wedge x \ge -5\sqrt{2} \\ y \ge 0 \wedge x \le -5\sqrt{2} \end{array}\right.$

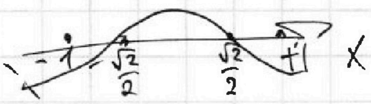


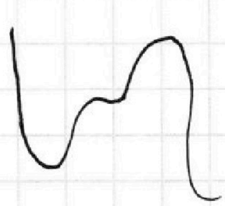
$169 - 25 = 144$



$\frac{S}{2} = S_1 + \delta S_1 + S_2 + \delta S_2 > S_1 + S_2$







$13^2 - 50\sin^2\alpha +$

$+13^2 - 50\cos^2\alpha = 2\cdot169 - 50$

$170\cdot2 - 2 = 338 \qquad 50 + 22 = 72$

$338 - 50 = 288$

$\left(\sqrt{A - Bx^2} + \sqrt{A - B(1-x^2)}\right)' = \frac{-Bx}{\sqrt{A-Bx^2}} + \frac{Bx}{\sqrt{A+Bx^2-B}} = Bx\cdot\frac{-\sqrt{A-B+Bx^2}+\sqrt{A-Bx^2}}{\sqrt{\cdot}\,\sqrt{\cdot}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = 1111 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}, [1, 9]$ и $1111 | 11$, $101 | 101$ $3, 5, 7, 11$

$B = \overline{abc}$, $a = 6 \wedge b = 6 \wedge c = 6$

$C = \overline{de}$, $d = 3 \wedge e = 3$

$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{y}{2} < \pi$

$\arccos\frac{x}{2} + \arccos\frac{y}{2} > 0$

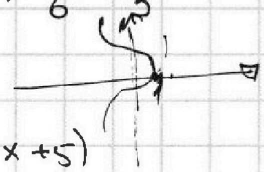
$A = 11 \cdot 101 \cdot k$ $\quad A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot k$

$B \vdots 101$ $\quad B = 606$

$C \vdots 11$ $\quad C = 33$

$2k$ $\quad k = 2$ $\quad \frac{2k}{6} = \frac{k}{3}$

$x = 3, y = 1$ $\quad k = 8$



$(2222; 606; 33)$; $(8888; 606; 33)$

$= \frac{1}{xy}(y + x + 5)$ $\quad = \frac{1}{(x-2)(y+2)} \cdot (y + x + 5)$

$k(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = k(x-2; y+2) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$M = x^3 - y^3 - 6xy$

$y(x-2)(y+2) + x(x-2)(y+2) + 5(x-2)(y+2) =$

$= xy(y+2) + xy(x-2) + 5xy$

~~$xy^2 - 2y^2 + 2xy - 4y + x^2y - 2xy + 2x^2 - 4x + 5xy - 10y + 10x$~~

$(x-2)(y+2)(y + x + 5) = xy(x + y + 5)$

$\left[\begin{array}{l} x + y + 5 = 0 \\ 2x - 2y - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = -5 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$

$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$

$= (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 6xy = (x-y)^3 + 3xy(x - y - 2) = 8$

$= (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 6xy = \underbrace{(x+y)^3}_{-5^3} - 3xy\underbrace{(x+y+2)}_{-3} - 2y^3$

~~$xy(-3x - 3y -$~~

$9.15xy - 2y^3 = y(45x - 2y^2)$

$\boxed{\begin{array}{l} \sin\frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \Leftrightarrow \\ x + y = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array}}$

$(\sin\pi x + \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x - \cos\pi y)\cos\pi x$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{2}(x+y)} \cos\frac{\pi}{2}(x-y) \sin\pi x = \cancel{\sin\frac{\pi}{2}(x+y)} \sin\frac{\pi}{2}(x-y) \cos\pi x$

$\cos\frac{\pi}{2}x \cos\frac{\pi}{2}y \sin\frac{\pi}{x} + \sin\frac{\pi}{2}x \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2}y \sin\frac{\pi}{x} = \sin\frac{\pi}{2}x \cos\frac{\pi}{2}y \cos\pi x - \sin\frac{\pi}{2}y \cos\frac{\pi}{2}x \cos\frac{\pi}{x}$

$\cos\frac{\pi}{2}y(\cos\frac{\pi}{2}x \sin\pi x - \cos\pi x \sin\frac{\pi}{2}x) = \cos\frac{\pi}{2}y \sin\frac{\pi}{2}(y-x)$

$\sin\frac{\pi}{2}y(\sin\frac{\pi}{2}x \sin\pi x + \cos\frac{\pi}{2}x \cos\pi x) = \sin\frac{\pi}{2}y \cdot \cos\frac{\pi}{2}(y-x)$

$\cos\frac{\pi}{2}y \sin\frac{\pi}{2}(y-x) - \sin\frac{\pi}{2}y \cos\frac{\pi}{2}(y-x) = \sin(\frac{\pi}{2}(y-x) - \frac{\pi}{2}y) = -\sin\frac{\pi}{2}x = 0$

$x = 2k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4

n-одиннадцатиклассников

4 билета

$$6\cdot\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}=\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$\frac{6\cdot(n-2)(n-3)\cdot\frac{1}{2}}{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\frac{1}{24}}=\frac{72}{n(n-1)}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)\cdot\ldots\cdot(n-2-(k-2)+1)\,k!}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(k-2)!}$$

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\qquad C_{n-2}^{k-2}=\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}=\frac{(n-2)!}{n!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{(k-2)!(n-k+2)!}=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)}=\frac{72}{n(n-1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{21\pm\sqrt{441-4R^2(85-4R^2)}}{4R^2}$$

$$k(k+1)=72(n-k+1+1)(n-k+1)$$

$35^2=7^2\cdot5^2$

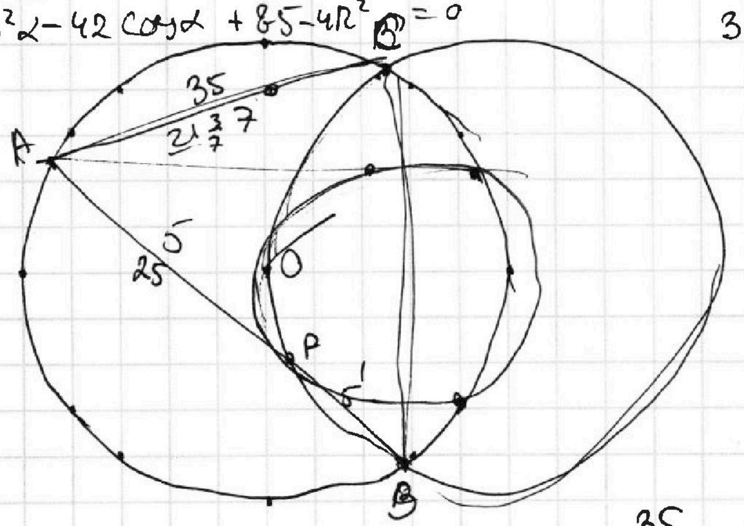
$25\cdot30=5^3\cdot6$

$4R^2(1-\cos^2\alpha)=85-42\cos\alpha$

$4R^2\cos^2\alpha-42\cos\alpha+85-4R^2=0$

$35k=25\cdot30$

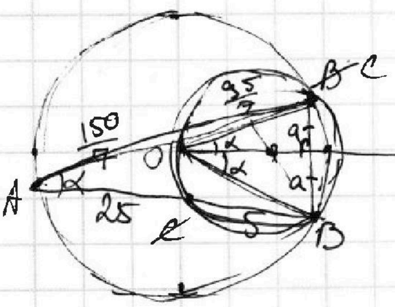
$k=\frac{150}{7}=\frac{147+3}{7}=21\frac{3}{7}$



$$\frac{abc}{4R}=\frac{bc\sin\alpha}{2}$$

$245-150=95$

$$\begin{array}{r}\times\ 35\\ 7\\ \hline 35\\ 21\ \ \\ \hline 245\end{array}$$



$a=R\sin\alpha$

$$\underbrace{4R^2\sin^2\alpha}_{a^2}=\underbrace{30^2}_{b^2}+\underbrace{35^2}_{c^2}-30\cdot35\cos\alpha$$

$$\underbrace{36+49}_{85}-42\cos\alpha$$