



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

- 1) $A = 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k$, где $k \in \mathbb{N} \cap [1; 9]$, 11 и 101 - простые
2) $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot B \cdot C = m^2$, где $m \in \mathbb{N}$
3) $m^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow B \cdot C : 11 \cdot 101 \xRightarrow{C \leq 100} B : 101$
4) $B = 606$ (единственное трехзначное число, кратное 101, одна из цифр которого равна 6)
5) $B \cdot C : 11 \Rightarrow C : 11$
6) $C = 33$ (единственное двузначное число, кратное 11, одна из цифр которого равна 3)
7) $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot 606 \cdot 33 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot k = m^2 \Rightarrow$
 $k = 2 \cdot n^2$, где $n \in \mathbb{N} \xRightarrow{n \leq 10} k = 2 \vee k = 8$, т.е.
 $A = 2222$ или $A = 8888$

Ответ: (2222; 606; 33); (8888; 606; 33).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1²

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{xy}(x+y+5) = \frac{1}{(x-2)(y+2)}(x+y+5) \stackrel{x>0, y>0}{\Leftrightarrow} xy = (x-2)(y+2) \Leftrightarrow$$

$$2x - 2y = 4 \Leftrightarrow x - y = 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 6xy =$$
$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y-2) \stackrel{x-y=2}{=} 2^3 = 8 \text{ - единственное возможное значение выражения } M$$

$M = 8$ достигается, например, при $x = 3$ и $y = 1$

$$k = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{5}{3-1} = \frac{1}{3-2} + \frac{1}{1+2} + \frac{5}{(3-2)(1+2)}$$

$$M = 3^3 - 1^3 - 6 \cdot 3 \cdot 1 = 26 - 18 = 8$$

Ответ: $M = 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\begin{aligned}
 a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cdot \sin \pi x &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cdot \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 \left[\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) &= 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cdot \sin \pi x &= \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) \cos \pi x \end{aligned} \right. &\Leftrightarrow \\
 \left[\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) &= 0 \\ \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}(x-y)\right) &= 0 \end{aligned} \right. &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \Leftrightarrow x+y = 2k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\delta)] f(a) = \arcsin a, \text{ тогда } D_f = [-1; 1], E_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ т.е. } \arcsin a_1 + \arcsin a_2 \geq \pi \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 1$$

- $\arcsin \frac{x}{6}$ определен при $x \in [-6; 6]$
- $\arcsin \frac{y}{2}$ определен при $y \in [-2; 2]$

Известно, что x и y целые по усл., одной четности (п.а)

1. $] x \cdot y = \pm 1$, тогда $x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ и любой парой из этих чисел подходит. Всего таких пар $(x; y)$: $6 \cdot 2 = 12$
2. $] y \in \{-2; 0; 2\}$, тогда $x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$. Из пар вида $(x; y)$ под условием не подходит только пара $(2; 6)$, т.к. $\arcsin \frac{6}{6} + \arcsin \frac{2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Т.е. всего пар такого вида: $7 \cdot 3 - 1 = 20$

3. Тогда всего пар $(x; y)$ удовлетворяющих условию: $12 + 20 = 32$

Ответ: а) $\{(x; y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x+y = 2k \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
 б) 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

n - количество одиннадцатиклассников,
 k - количество билетов

$p(n, k)$ - вероятность, что двоим выбранным одиннадцатиклассникам достанется билет на концерт

$$p(n, k) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-2)! \cdot (n-2-(k-2))! \cdot n!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)}$$

m - проданных билетов в конце месяца

$$p(n, 4) = p(n, m) \Leftrightarrow \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{m \cdot (m-1)}{n \cdot (n-1)} \Leftrightarrow$$

$$m^2 - m - 72 = 0 \Leftrightarrow (m-8)(m+9) = 0 \stackrel{m \geq 0}{\Leftrightarrow} m = 8$$

Ответ: 8 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

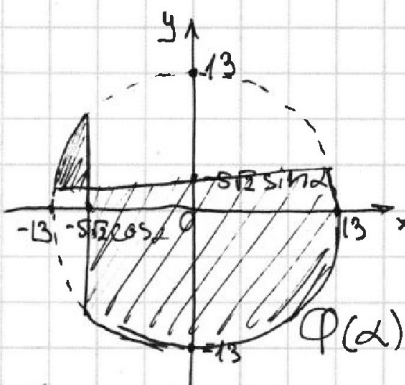
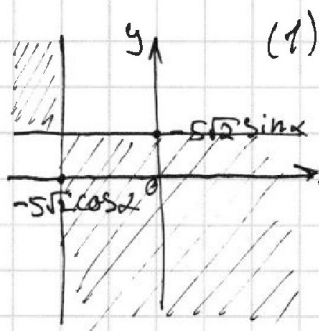
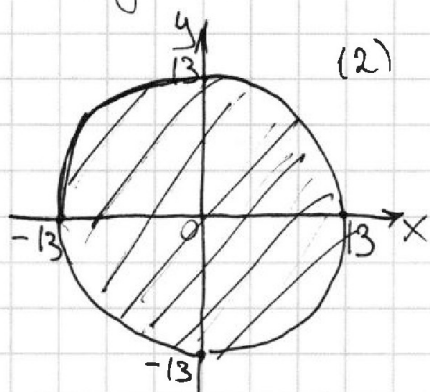
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

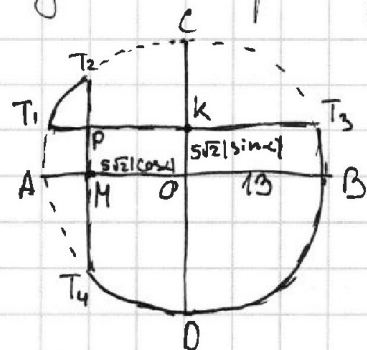
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 (стр 1)

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$



Граница фигуры Φ состоит из двух дуг и двух взаимно перпендикулярных отрезков



T_1, T_2, T_3, T_4 - "вершины" Φ

AB, CD - диаметры окружности, описанной около Φ : $AB \parallel T_1T_3$, $CD \parallel T_2T_4$; O - центр этой окружности

$M = AB \cap T_2T_4$; $K = CD \cap T_1T_3$

$T_1T_3 \parallel AB \Rightarrow \angle AT_1 = \angle T_3B$
 $T_2T_4 \parallel CD \Rightarrow \angle CT_2 = \angle DT_4 \quad \Rightarrow$

$$1) \angle T_1T_2 + \angle T_3T_4 = [\text{длина внешней границы } \Phi] = \angle T_1T_2 + \angle AT_1 + \angle CT_2 + \angle T_3T_4 - \angle T_3B - \angle T_4D = \angle AC + \angle BD = 13\pi$$

[Везде рассмотрим длины меньшей из дуг]

$$2) T_2T_4 = 2\sqrt{OM^2 + OT_4^2} = 2\sqrt{50\cos^2\alpha + 169} \quad \Rightarrow$$

$$T_1T_3 = 2\sqrt{OK^2 + OT_3^2} = 2\sqrt{50\sin^2\alpha + 169} \quad \Rightarrow$$

$$T_1T_3^2 + T_2T_4^2 = 4(169 \cdot 2 - 50(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)) = 4 \cdot 288 = \text{const}$$

$$[BA] = 169 \cdot AB = 50 \quad T_2T_4 + T_1T_3 - \max \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{13 - 5\sin^2\alpha} + \sqrt{13 - 5(1 - \sin^2\alpha)} - \max$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad [x = \sin\alpha, \quad -1 \leq x \leq 1]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

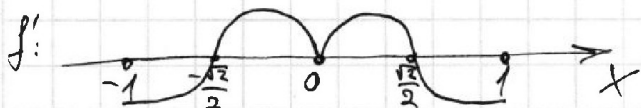
Задача №6 (стр 2)

$$(\sqrt{B-Ax^2} + \sqrt{B-A+Ax^2})' = f'(x) = \frac{-Ax}{\sqrt{B-Ax^2}} + \frac{Ax}{\sqrt{B-A+Ax^2}} > 0 \stackrel{A>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x(\sqrt{B-Ax^2} - \sqrt{B-A+Ax^2}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \wedge B-Ax^2 > B-A+Ax^2 \\ x < 0 \wedge B-Ax^2 < B-A+Ax^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge 2Ax^2 < A \\ x < 0 \wedge 2Ax^2 > A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{\sqrt{B}}{2} \\ 0 > x > -\frac{\sqrt{B}}{2} \end{cases}$$



т.е. $\max f = \max(f(-1); f(\frac{\sqrt{2}}{2}))$

$$f(-1) = \sqrt{169-50} + \sqrt{169} = 13 + \sqrt{119} < 13 + 11 = 24$$

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{169-50 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{169-50+5 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{144} = 24$$

Тогда максимальное значение M равно $U_1 T_2 + U_3 T_4 + T_1 T_3 + T_2 T_4 = 13\pi + 24$, которое достигается при $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha \in \{\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$

Ответ: $M = 13\pi + 24$, при $\alpha \in \{\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

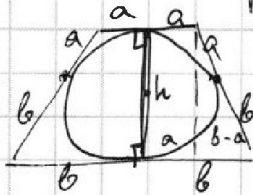
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №7

1) Усеченная пирамида - правильная $\Rightarrow$
все ее боковые грани - равнобокие трапеции,
основания - правильные многоугольники

2) Существует шар, касающийся всех ребер пирамиды
 $\Rightarrow$ боковые грани - ~~описанные~~ многоугольники

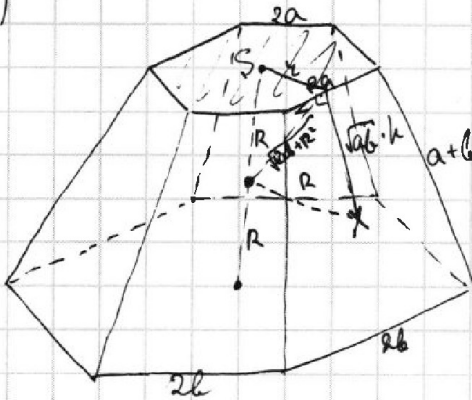


$$(a+b)^2 = h^2 + (b-a)^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$S_{\text{бок}} = n \cdot 2\sqrt{ab}(a+b)$$

п-го боковой пов-ти кол-во боковых граней

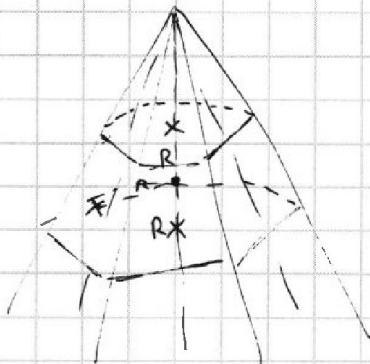
3)



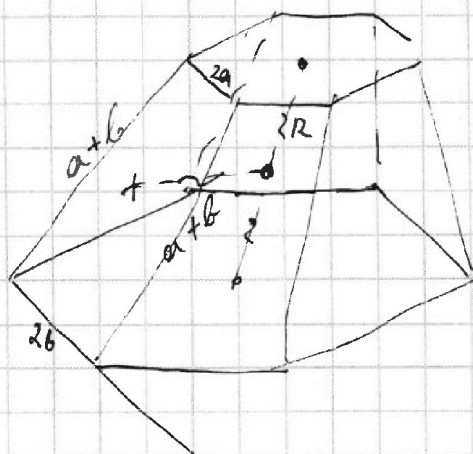
$$z^2 = R^2 + \sqrt{ab}^2 - R^2 \Rightarrow z = \sqrt{ab}$$

$$S = n \cdot a \cdot z = n a \sqrt{ab}$$

$$\frac{S}{S_{\text{бок}}} = \frac{n a \sqrt{ab}}{n 2 \sqrt{ab} (a+b)} = \frac{a}{2(a+b)}$$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$1^2 + 50 = 51$$

$$h = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2} = 2ab$$

$$\int_2^1 x^2 dx$$

$$\frac{C_{n-2}^k}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot 4! \cdot (n-4)!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot (n-k)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot (n-k+2)! \cdot n!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n(n-1)} = \frac{6 \cdot 12}{n(n-1)}$$

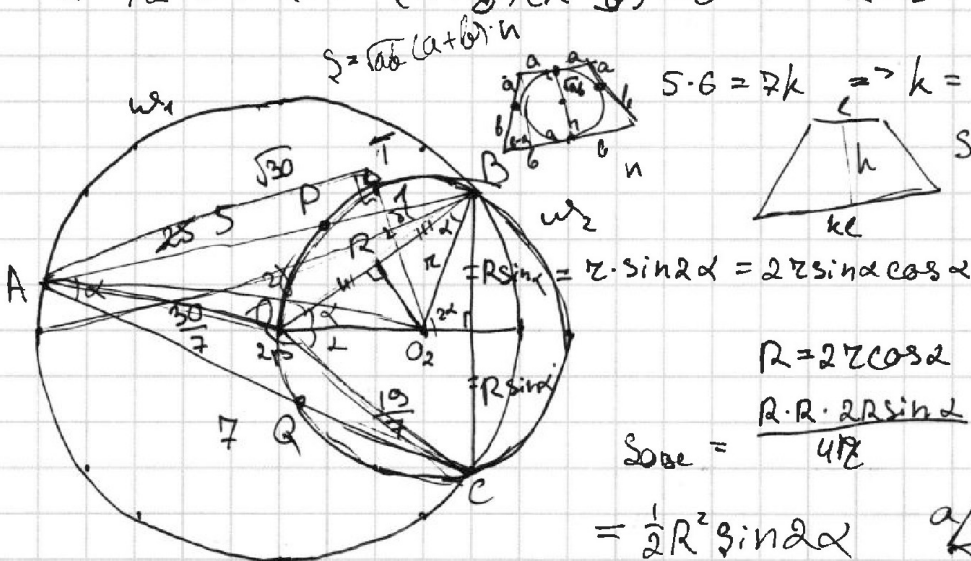
$$h = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$$

$$k^2 - k - 72 = 0 \Leftrightarrow (k+9)(k-8) = 0 \Leftrightarrow k = 9$$

$$S = \frac{1}{2}ab(a+b) \cdot n$$

$$5 \cdot 6 = 7k \Rightarrow k = \frac{30}{7}$$

$$S = \frac{1}{2}h \ell (k+1)$$



$$R = 2z \cos \alpha$$

$$S_{\text{об}} = \frac{R \cdot R \cdot 2R \sin \alpha}{4R} = \frac{R^3 \sin \alpha}{R \cos \alpha}$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$$



$$AO_2^2 = 30 + z^2$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$36 = AB^2 = 2R^2(1 + \cos 2\gamma) = 4R^2 \cos^2 \gamma$$

$$49 = AC^2 = 2R^2(1 + \cos 2\beta)$$

$$AB = 2R \cos \gamma \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$AC = 2R \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}$$

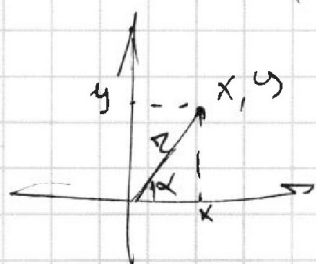
$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$S = p \cdot z' \quad \frac{a}{2z} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$z = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

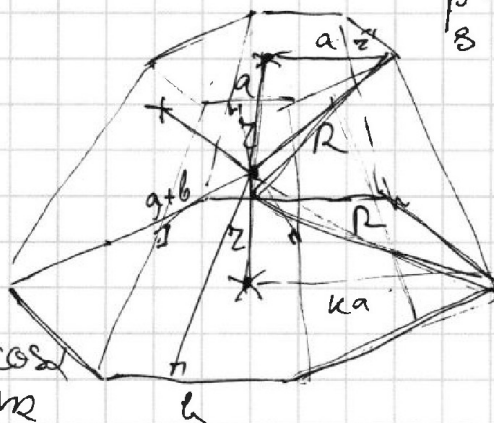
$$p = \frac{1}{2}na$$

$$S = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$



$$x = z \cos \alpha$$

$$y = z \sin \alpha$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = r \cos \alpha$$

$$(r \cos \alpha + 5\sqrt{2} \cos \alpha)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha (r + 5\sqrt{2}) \sin \alpha \leq 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 13 \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha \sin \alpha \leq 0 \Leftrightarrow$$

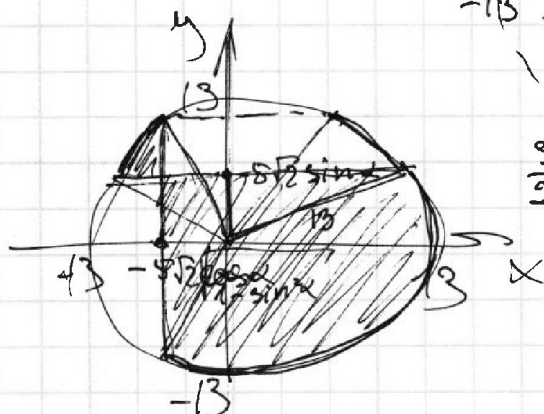
$$\sin 2\alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-\pi; 0]$$

$$\alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 1 \quad \sin \alpha = 0$$

$$(x + 5\sqrt{2}) y \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \leq 0 \wedge x \geq -5\sqrt{2} \\ y \geq 0 \wedge x \leq -5\sqrt{2} \end{cases}$$



$$13^2 - 50 \sin^2 \alpha +$$

$$+ 13^2 - 50 \cos^2 \alpha = 2 \cdot 169 - 50$$

$$170 \cdot 2 - 2 = 338$$

$$338 - 50 = 288$$

$$(\sqrt{A - Bx^2} + \sqrt{A - B(1 - x^2)})' = \frac{-Bx}{\sqrt{A - Bx^2}} + \frac{Bx}{\sqrt{A + Bx^2 - B}} = Bx \cdot \frac{\sqrt{A - B + Bx^2} + \sqrt{A - Bx^2}}{\sqrt{\cdot} \cdot \sqrt{\cdot}}$$

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x > \dots \wedge y < \dots \\ x < \dots \wedge y > \dots \end{cases}$$

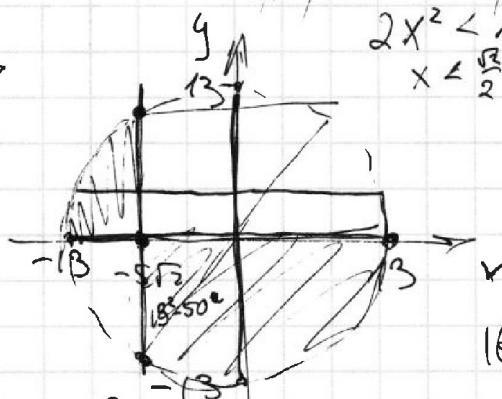
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$(a+b)^2$$

$$A - Bx^2 > A - B + Bx^2$$

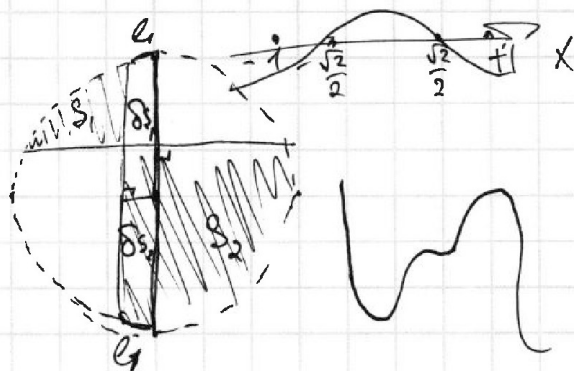
$$2x^2 < 1$$

$$x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$169 - 25 = 144$$

$$\frac{s}{2} = s_1 + \delta s_1 + s_2 + \delta s_2 > s_1 + s_2$$



$$50 + 22 = 72$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1110 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N}_7[1, 9] \quad \text{и} \quad 1111 \mid 11$$

$$B = \overline{abc}, \quad a=6 \wedge b=6 \wedge c=6$$

$$C = \overline{de}, \quad d=3 \wedge e=3$$

$$101 \mid 101$$

$$3, 5, 7, 11$$

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arccos \frac{x}{2} + \arccos \frac{y}{2} > 0$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$A \cdot B \cdot C = 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot k$$

$$B : 101$$

$$B = 606$$

$$C : 11$$

$$C = 33$$

$$2k$$

$$x=3, y=1$$

$$k=2$$

$$k=8$$

$$\frac{2k}{6} = \frac{k}{3}$$

$$(2222; 606; 33) : (8888; 606; 33)$$

$$\frac{1}{(x-2)(y+2)} (y+x+5)$$

$$k_{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = k(x-2; y+2) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$y(x-2)(y+2) + x(x-2)(y+2) + 5(x-2)(y+2) =$$

$$= xy(y+2) + xy(x-2) + 5xy$$

$$xy^2 - 2y^2 + 2xy - 4y + x^2y - 2xy + 2x^2 - 4x + 5xy - 10y + 10x$$

$$(x-2)(y+2)(y+x+5) = xy(x+y+5)$$

$$\begin{cases} x+y+5=0 \\ 2x-2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$= (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 6xy = (x-y)^3 + 3xy(x-y-2) = 8$$

$$= (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + 6xy = \frac{(x+y)^3}{-5} - 3xy \frac{(x+y+2)-2y^3}{-3}$$

$$9.15xy - 2y^3 = y(45x - 2y^2)$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(x+y) = 0 \Leftrightarrow x+y=2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x = \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}y \sin \frac{\pi}{2}x + \sin \frac{\pi}{2}x \frac{1}{2}(\sin \frac{\pi}{2}y \sin \frac{\pi}{2}x - \sin \frac{\pi}{2}x \cos \frac{\pi}{2}y \cos \frac{\pi}{2}x)$$

$$\cos \frac{\pi}{2}y (\cos \frac{\pi}{2}x \sin \frac{\pi}{2}x - \cos \frac{\pi}{2}x \sin \frac{\pi}{2}x) = \cos \frac{\pi}{2}y \sin \frac{\pi}{2}(y-x)$$

$$\sin \frac{\pi}{2}y (\sin \frac{\pi}{2}x \sin \pi x + \cos \frac{\pi}{2}x \cos \pi x) = \sin \frac{\pi}{2}y \cos \frac{\pi}{2}(y-x)$$

$$\cos \frac{\pi}{2}y \sin \frac{\pi}{2}(y-x) - \sin \frac{\pi}{2}y \cos \frac{\pi}{2}(y-x) = \sin(\frac{\pi}{2}(y-x) - \frac{\pi}{2}y) = \sin \frac{\pi}{2}x = 0$$

$$x=2k$$



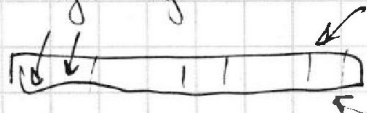
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n -одинадцатиклассников



48 билетов

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$\frac{6 \cdot (n-2)(n-3) \cdot \frac{1}{2}}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \frac{1}{24}} = \frac{72}{n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4) \cdot \dots \cdot (n-2-(k-2)+1)k!}{k(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (k-2)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(k-2)!(n-k+2)!} = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n-k+1)} = \frac{72}{n(n-1)}$$

$$k(k+1) = 72(n-k+1+1)(n-k+1)$$

$$4R^2(1-\cos^2\alpha) = 85 - 42\cos\alpha$$

$$4R^2\cos^2\alpha - 42\cos\alpha + 85 - 4R^2 = 0$$

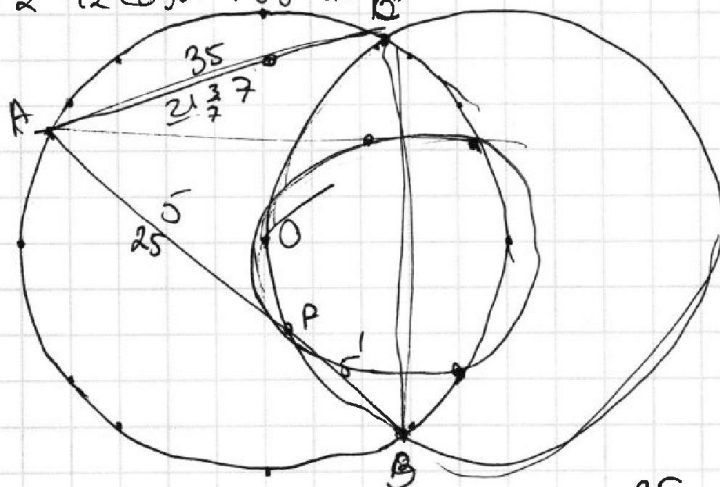
$$35^2 = 7^2 \cdot 5^2$$

$$25 \cdot 30 = 5^3 \cdot 6$$

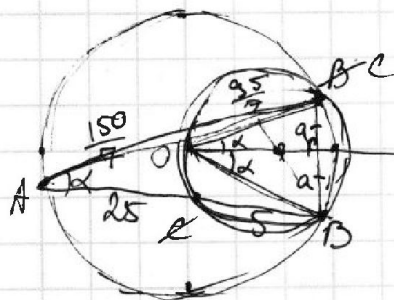
$$35k = 25 \cdot 30$$

$$k = \frac{150}{7} = \frac{147+3}{7} = 21\frac{3}{7}$$

$$\cos\alpha = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 4R^2(85 - 4R^2)}}{4R^2}$$



$$\frac{abc}{4R} = \frac{6 \sin\alpha}{2}$$



$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 7 \\ \hline 35 \\ 21 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$245 - 150 = 95$$

$$a = R \sin\alpha$$

$$\frac{4R^2 \sin^2\alpha}{a^2} = \frac{30^2}{a^2} + \frac{35^2}{c^2} - \frac{30 \cdot 35 \cos\alpha}{bc}$$

$$\frac{36 + 49}{85} - 42\cos\alpha$$