



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Так как $A \cdot B \cdot C = n^2$, где n - натуральное, то $A \cdot B \cdot C$ можно представить в виде $p_1^{2d_1} p_2^{2d_2} p_3^{2d_3} \dots p_n^{2d_n}$, где p_1, p_2, \dots, p_n - простые числа, $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ - натуральные числа.

Рассмотрим число A . Это четырехзначное число, состоящее из одинарных цифр, то есть A равно $a \cdot 1111$, где $a \in N$, $a \in [1; 9]$. Заметим, что $1111 = 11 \cdot 101$ ($11, 101$ -простые числа), а значит $A \cdot B \cdot C$ имеет вид $11^{2d_1} \cdot 101^{2d_2} \cdot \dots \cdot p_n^{2d_n}$, то есть $A \cdot B \cdot C$ делится на 11^2 и 101^2 , а значит $(B \cdot C) : 11 ; (B \cdot C) : 101$.

Значит либо B , либо C делится на 101 . Т.к C -двухзначное, то $B : 101$, то есть $B = 101k$, где $k \in N$, $k \in [1; 9]$, т.к B -трехзначное.

Т.к в числе B есть цифра 6 , то $B = 606 = 101 \cdot 6$.

Заметим, что $B : 11$, а $(B \cdot C) : 11$, тогда $C : 11$, а значит $C = 11m$, где m - натуральное, $m \in [1; 9]$, т.к C -двухзначное. Т.к в числе C есть цифра 3 , то $C = 3 \cdot 11 = 33$. Заменим $A \cdot B \cdot C$, имея новые данные: $A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot a \cdot 33 \cdot 606 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2a$. Заметим, что для того, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом ^{наг. числа}, нужно чтобы за было квадратом наг. числа. Т.к $a \in [1; 9]$ получаем

$$\begin{cases} a=2 & (2a=4) \\ a=8 & (2a=16) \\ \boxed{a=1} \\ \boxed{a=2222} \\ \boxed{a>8888} \end{cases}$$

Итог: $(2222; 606; 33)$, $(8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия мы знаем, что $x > 0, y > 0$

Из условия также получаем, что:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

(1)

Тогда:

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

Т.к. $x > 0, y > 0$, то знаменатели никогда не

обращаются в 0, то есть на них можно поделить.

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{(x-2)(y+2) - xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

Т.к. условие (1) учитывает
нули знаменателя ~~все~~ левой
части, то можно написать, что

$$(x-2)(y+2) = xy$$

$$xy - 2y + 2x - 4 = xy$$

$$\begin{cases} y = x-2 \\ y > 0, x > 0 - \text{также} \\ x \neq 2 \text{ т.к. } x \text{ и } y \text{ подходят под условие} \end{cases}$$

Значит, что $y = x-2$, M принимает вид:

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

Значит

Такое значение достигается при $x=3, y=1$: $M = 3^3 - 1^3 - 6 \cdot 3 \cdot 1 = 27 - 1 - 18 = 8$, то есть
8 - единственное возможное значение M. Ответ: (8)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) x, y \in \mathbb{R} \quad (\sin \bar{n}x + \sin \bar{n}y) \sin \bar{n}x = (\cos \bar{n}x - \cos \bar{n}y) \cos \bar{n}x$$

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

$$2 \sin \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} \cos \frac{\bar{n}x - \bar{n}y}{2} \cdot \sin \bar{n}x = 2 \sin \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\bar{n}x - \bar{n}y}{2} \right) \cdot \cos \bar{n}x$$

$$2 \sin \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} \cdot \left(\cos \frac{\bar{n}x - \bar{n}y}{2} \sin \bar{n}x + \sin \frac{\bar{n}x - \bar{n}y}{2} \cos \bar{n}x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{cases}$$

$$2 \sin \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} \cdot \sin \left(\frac{\bar{n}x - \bar{n}y}{2} + nx \right) = 0$$

$$2 \sin \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} \cdot \sin \frac{3\bar{n}x - \bar{n}y}{2} = 0$$

(*)

$$\begin{cases} \sin \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} = 0 \\ \sin \frac{3\bar{n}x - \bar{n}y}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\bar{n}x + \bar{n}y}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\bar{n}x - \bar{n}y}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$x+y=2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y=2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \bar{\pi}; x, y \in \mathbb{Z}$$

Из области определения арксинуса:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Так как $\arcsin \frac{x}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin \frac{y}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то неравенство не выполняется только в двух случаях, когда:

(1) $x+y=2k, k \in \mathbb{Z}$, то есть подходит такие пары (пары решений) x и y , где либо $x: 2$ и $y: 2$, либо $x: 2, y: 1/2$, при этом выполняется условие *. Таких пар $7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 41$

(2) $3x-y=2k$. Заметим, что если пара подходит под (1) то обратная пара подходит под (2) и наоборот тоже, а значит этот случай



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \cdot \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

- пара не подходит.

можно не рассматривать

Пара $(6; 2)$ была получена в случае ①, укажем новый исключаем, а всего пар $41 - 1 = 40$.

Ответ: 40.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У Домашними

Множество однодневных классиков было X . ~~Всего~~

Рассмотрим ситуацию в параллельном мире, где было выбрано 4 билета. Кол-во вариантов выдать

4 билета на X человек равно C_X^4 . Кол-во вариантов выдавать билеты Петя, Вася и еще двум тогда равно

C_{X-2}^{4-2} , что это то же самое, что выбрать 2 человека из

$(X-2)$ человек. Тогда вероятность, что Петя и Вася получат на параллельном мире билета равна $\frac{C_{X-2}^2}{C_X^4} = P_1$.

Пусть теперь выбрано n билетов на X однодневных классиков.

Тогда кол-во вариантов выдать n билетов на X человек равно C_X^n , а кол-во вариантов выдать $(n-2)$ билета на $(X-2)$ человек C_{X-2}^{n-2} (2 билета ушли Петя и Васи).

Тогда теперь вероятность равна $P_2 = \frac{C_{X-2}^{n-2}}{C_X^n}$. (Считаем, что $n > 4$).

Из условия известно, что:

$$P_1 = P_2$$

$$6 \cdot \frac{C_{X-2}^2}{C_X^4} = \frac{C_{X-2}^{n-2}}{C_X^n}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \cdot \frac{\frac{(x-2)!}{(x-4) \cdot 2!}}{\frac{x!}{(x-4) \cdot 4!}} = \frac{\frac{(x-2)!}{(x-2)(n-2)!}}{\frac{x!}{(x-n)! \cdot n!}}$$

$$6 \cdot \frac{(x-2)! \cdot 4!}{x! \cdot 2!} = \frac{(x-2)! \cdot n!}{(n-2)! \cdot x!}$$

$$6 \cdot \frac{4!}{2!} = n(n-1)$$

$$6 \cdot 4 \cdot 3 = n(n-1)$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$D = 1 + 72 \cdot 4 = 289$$

$$\boxed{n = \frac{1+17}{2} = 9}$$

$$\boxed{n = \frac{1-17}{2} = -8 \text{ (не подходит, } n > 4)}$$

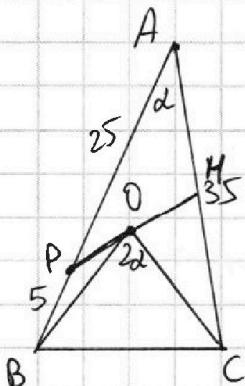
Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



дано:
 $\triangle ABC$ - о/у

w_1 - описанная окр. $\triangle ABC$, центр O .

w_2 - описанная окр. $\triangle BDC$, $w_2 \cap AB = P$

$$AP = 25, BP = 5, AC = 35$$

$\exists \angle BAC = \alpha$. Т.к. $\angle BAC$ - вписанный на
участок BC , т.к. $\angle BOC = 2\alpha$.
($\angle BDC$ - центральный на
участке BC)

$BO = OC$ как радиусы описанной
окружности w_1 ,

$$\triangle BOC - p/15^\circ; \angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

В окружности w_2 :

$$\angle OPB + \angle BCO = 180^\circ \text{ (отмечен на хорде } BO \text{ с разных сторон)}$$

$$\angle OPB = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle APO = 180^\circ - \angle OPB = 90^\circ - \alpha \text{ (наименьший)} \angle$$

$\exists PO \cap AC = H$; б) $\triangle APH$:

$$\angle PHA = 180^\circ - \angle APO - \angle BCO = 90^\circ \Rightarrow \triangle APH - r/y$$

~~доказать~~ $O \in PH$, $PH \perp AC \Rightarrow PH$ - серединный
перпендикуляр
AC

(O - точка серединных пер. $\triangle ABC$)

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

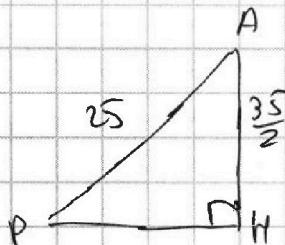
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Значит } AH = \frac{AC}{2} = \frac{35}{2}$$

В \triangle PAH:



$$\cos \angle PAH = \frac{35}{2 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7}{10}$$

|||

$$\sin \angle PAH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PAH} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S_{\triangle ABC} = AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \sin \angle BAC = (25+5) \cdot 35 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{525\sqrt{51}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{525\sqrt{51}}{10}$$

I-

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Периметр симметрии $\phi(B)$:

$$P = L(\cup AB) + L(\cup CD) + AC + BD.$$

$\cup AB, \cup CD \subset 180^\circ$

Заметим, что $\angle AOB = \frac{\cup AB + \cup CD}{2} = 90^\circ$, т.к.

$\cup AB + \cup CD = 180^\circ$, то есть:

$$L(\cup AB) + L(\cup CD) = \frac{L_{\text{окружн}}}{2} = \text{const.}$$

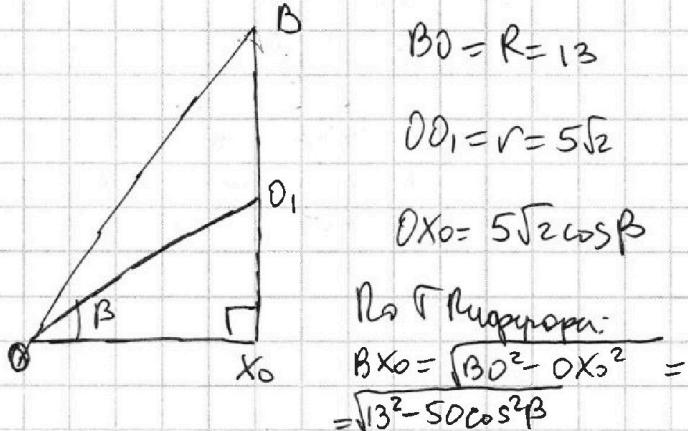
окружн - длина окр,
окр. круг из ② из условия.

То есть, при изменении $\angle(B)$, $L(\cup AB) + L(\cup CD)$ не изменяется; $L(\cup AB) + L(\cup CD) = \frac{2\pi \cdot 13}{2} = 13\pi$

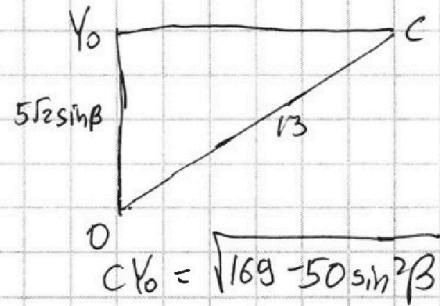
Рассмотрим $AC \cap BD$, $AC \parallel ox$; $BD \parallel oy$.

$$\begin{aligned} AC &= 2CY_0 \\ BD &= 2BX_0 \end{aligned}$$

Рассмотрим $\triangle BOX_0$:



Аналогично в $\triangle CY_0O$:



$$\text{Тогда } AC + BD = 2\sqrt{169 - 50\cos^2\beta} + 2\sqrt{169 - 50\sin^2\beta}$$

Найдем максимальное значение $AC + BD$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(AC+BD) > 0 \Rightarrow AC+BD$ максимальное, когда $(AC+BD)^2$ максимальное.

$$(AC+BD)^2 = 4(169 - 50\cos^2\beta + 169 - 50\sin^2\beta) + 8\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 \sin^2\beta - 169 \cdot 50 \cos^2\beta} + 50^2 \sin^2\beta \cos^2\beta$$

$$= 4(2 \cdot 169 - 50) + 8\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + 25^2 \sin^2\beta}$$

максимально, когда $\sin^2\beta$ максимальна

$$\sin^2\beta \in [0; 1].$$

\downarrow

$$\sin^2\beta = 1$$

~~$(AC+BD)^2_{\max} = 28 \cdot 169 - 250 + 8\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50}.$~~

$(AC+BD)^2$ максимальное, когда $\sin^2\beta = 1$, значит

$(AC+BD)$ максимальное, когда $\sin\beta = 1$.

$$\sin^2\beta = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\beta = 1 \\ \sin 2\beta = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\beta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}}$$

При таких значениях $(AC+BD)$ максимальны, значит M -максимально.

$$(AC+BD)_{\max} = 2\sqrt{169 - 50 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{169 - 50 \cdot \frac{1}{2}} = 4\sqrt{169 - 25} = 4\sqrt{44} = 4 \cdot 12 = 48$$

$(\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2})$

$$M_{\max} = L(\cup AB) + L(\cup CD) + (AC+BD)_{\max} = 13n + 48 \quad \text{длёт: } 13n + 48^\circ$$

Достигается при $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{при } \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

неравенство

(2) 2 уравнение - это круг с центром $(0, 0)$ и радиусом

$$13. (\sqrt{169})$$

(1) 1 неравенство - это парабола, ограничивающая двумя прямыми $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$, $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$. Для того, чтобы

было удобнее рассматривать это неравенство, нужно

$$\beta = \bar{\pi} + \alpha$$

~~β~~, тогда прямые, ограничивающие область

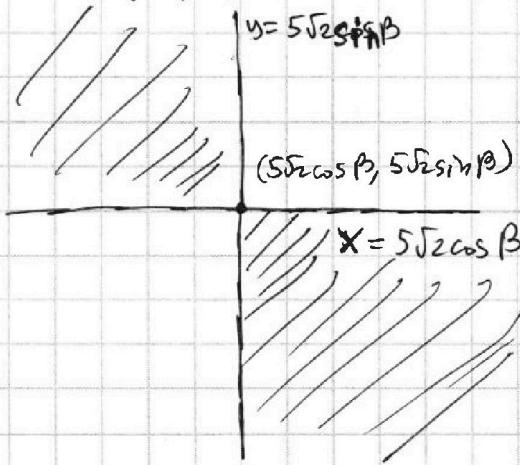
решения неравенства: $x = 5\sqrt{2}\cos\beta$, $y = 5\sqrt{2}\sin\beta$. Эти

прямые пересекаются в точке $(5\sqrt{2}\cos\beta, 5\sqrt{2}\sin\beta)$ под

прямым углом, решением же неравенства являются

левая верхняя и правая нижняя части относительно

точки пресечения (графическая модель ниже).



Решение неравенства (1)
при $\beta = \bar{\pi} + \alpha$.



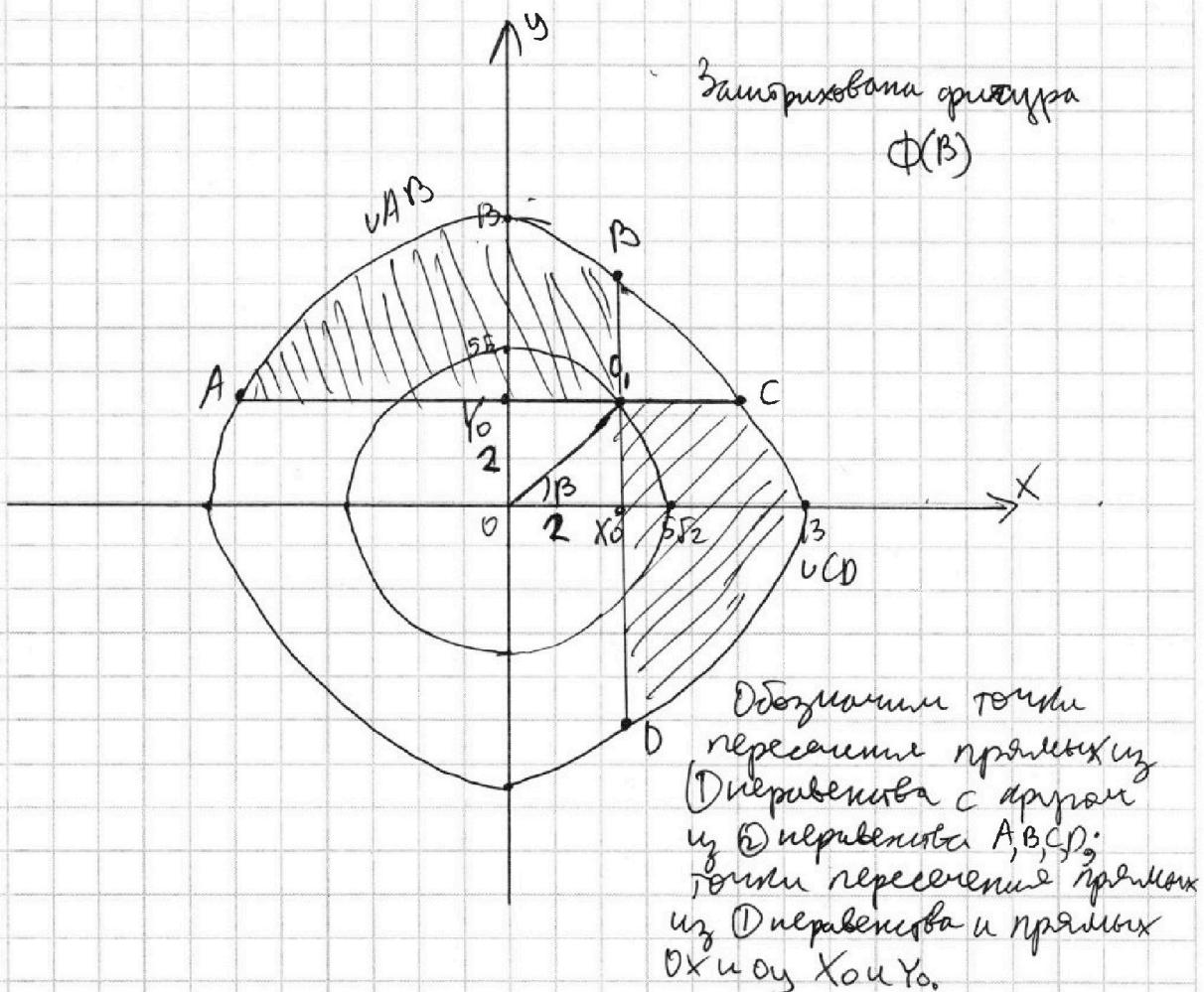
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметил, что координаты точек пересечения этих прямых $(5\sqrt{2}\cos\beta, 5\sqrt{2}\sin\beta)$, то есть точка пересечения (назовем её Q_1) лежит на гипотенузе окружности радиуса $5\sqrt{2}$, а ~~на~~ на ней ей соответствует угол β . Получаем гипотезу графическую. Проверим?





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6(x-2)! \cdot 4!}{2! \cdot x!} = \frac{(x-2)!}{x!} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$$

$$72 = n(n-1)$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

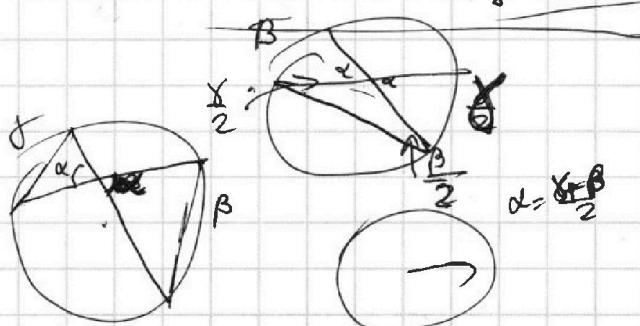
$$1+4 \cdot 72$$

$$\sqrt{D} = 17$$

$$\frac{1 \pm 17}{2} \rightarrow \textcircled{9} \textcircled{X}$$

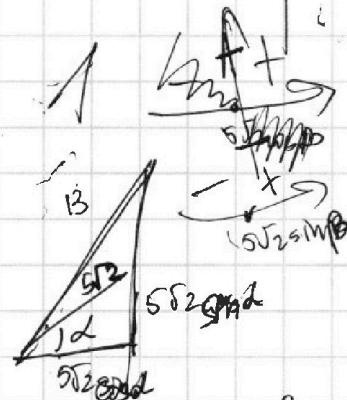
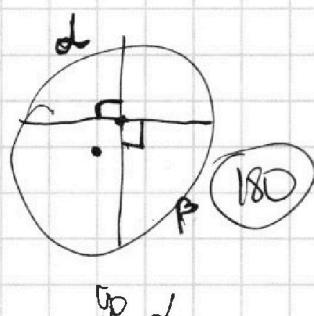
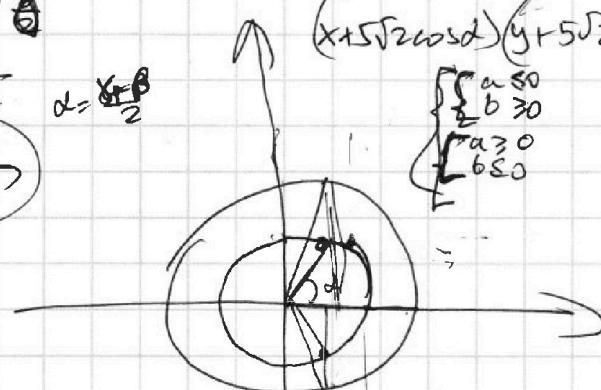
$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} \\ \cancel{288} \\ 289 \\ \cancel{x^2} \\ 17 \\ \hline \cancel{289} \\ 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 17 \\ \times 14 \\ \hline 70 \end{array}$$



$$(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} a=50 \\ b=30 \\ a=30 \\ b=50 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha &\leq 0 \\ x &\leq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y &\geq -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2}\sin\alpha &\\ -5\sqrt{2}\cos\alpha & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13^2 - 50\cos^2\alpha &= (a + 5\sqrt{2}\sin\alpha)^2 \\ 169 - 50 &= a^2 + 10\sqrt{2}a\sin\alpha + 50\sin^2\alpha \end{aligned}$$

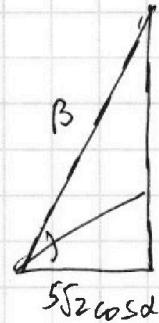
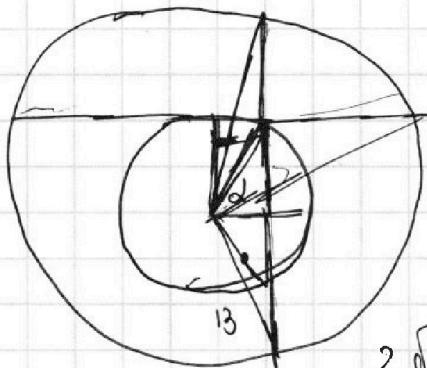
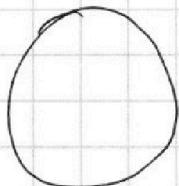


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2\sqrt{13^2 - 50^2 \cos^2 \alpha} +$$

$$+ 2\sqrt{13^2 - 50^2 \sin^2 \alpha} =$$

~~$$2\sqrt{13^2 - 50^2 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{13^2 - 50^2 \sin^2 \alpha} = b$$~~

~~$$\cancel{2\sqrt{13^2 - 50^2 \cos^2 \alpha}}$$~~

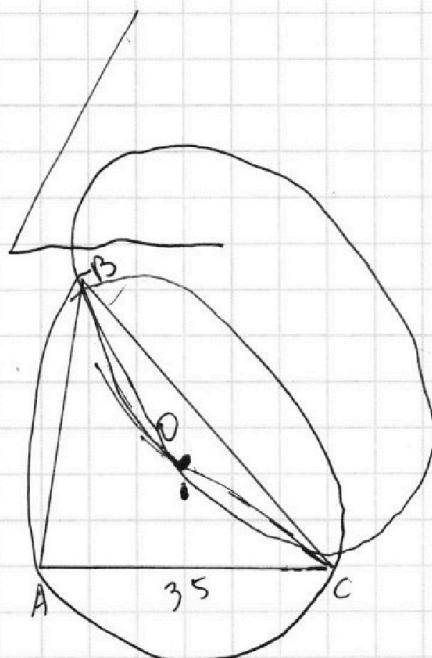
$$4(13^2 - 50 \cos^2 \alpha) + 4(13^2 - 50 \sin^2 \alpha) +$$

$$+ 8\sqrt{13^2 - 50^2 \cos^2 \alpha}\sqrt{13^2 - 50^2 \sin^2 \alpha} = b^2$$

$$813^2 - 4 \cdot 50 + 8\sqrt{13^2 - 50 \cdot 13(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} +$$

$$+ 50 \cdot$$

⑥ вправильне ~~X~~ походорешить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \begin{matrix} 1111 \\ 2222 \\ 3333 \\ 4444 \\ 5555 \\ 6666 \\ 7777 \\ 8888 \\ 9999 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 2222 \\ 3333 \\ 4444 \\ 5555 \\ 6666 \\ 7777 \\ 8888 \\ 9999 \end{array} \begin{array}{l} \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} \\ \frac{7}{11} \\ \frac{8}{11} \\ \frac{9}{11} \end{array} \begin{array}{l} 111 \\ 101 \\ 1101 \\ 110101 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 111 \\ 101 \\ 1101 \\ 110101 \end{array}$$

$$101 \quad \cancel{2} \cancel{3} \cancel{8} \quad \cancel{2} \cancel{3} \cancel{6}$$

$$B = 606$$

$$H \cdot 101$$

$$C = \overline{36} / \overline{23}$$

$$36$$

$$101$$

$$101$$

$$202$$

$$303$$

$$404$$

$$505$$

$$606$$

$$707$$

$$808$$

$$909$$

$$A = 1 \cdot 11 \cdot 101$$

$$a = 11 \cdot 101$$



~~363~~

$$363 \quad C: 11$$

$$C: 3$$

~~C = 33~~

$$\begin{array}{r} 22 \\ 33 \\ \hline 99 \\ 88 \\ 77 \\ 66 \\ 55 \\ 44 \\ 33 \\ 22 \\ 11 \end{array}$$

$$A = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$$B = 101 \cdot 6$$

$$C = 3 \cdot B = 101 \cdot 3$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot a$$

$$3^2 \cdot 2 \cdot a$$

$$\begin{array}{l} 2a = 8 \\ a = 4 \\ a = 8 \\ a = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ y \neq -2 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

~~(x \neq 2)~~

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \quad (u+x+5=0)$$

$$xy = (x-y)(y+2) \quad xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy$$

$$2y = 2x - 4$$

$$y = x - 2$$

~~(x-2)y~~

$$x^3 - (x-2)^3 - 6(x-2)x$$

&

$$x^3 - (x^3 - 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 4x - 8) - 6x^2 + 12x$$

$$x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin nx + \sin ny) \sin px = (\cos nx - \cos ny) \cos px$$

$$2 \sin \frac{nx+ny}{2} \cos \frac{px-ny}{2} \sin px = -2 \sin \frac{nx+ny}{2} \sin \frac{px-ny}{2} \cos px$$

$$2 \sin \frac{nx+ny}{2} \left(\cos \frac{px-ny}{2} \sin px + \sin \frac{px-ny}{2} \cos px \right) = 0$$

$$2 \sin \frac{nx+ny}{2} \cdot \sin \left(px + \frac{nx-ny}{2} \right) = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ \hline 15 \end{array}$$

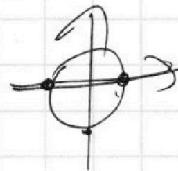
$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 5 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 5 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 5 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\sin \left(\frac{nx+ny}{2} \right) \sin \left(\frac{px-ny}{2} \right) = 0$$

$$\begin{array}{l} x+y=2k \\ \frac{nx+ny}{2}=nk \end{array}$$



$$(69 - 50 \cos^2 \alpha + 169 - 50 \sin^2 \beta)$$

$$4(2 \cdot 169 - 50 \alpha +$$

$$2 \sqrt{169 - 50 \cos^2 \beta}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 &\leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{aligned}$$

$$-6x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

и ненул. зв.

$$\begin{array}{ccccccc} -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{12} \end{array}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}$$



$$x+y=2k$$

$$-9 \leq 2k \leq 8$$

$$x+y=$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \end{array}$$

$$6 \cdot \frac{(x-2)!}{x!} = 4$$

$$x \dots$$

$$\binom{2}{x-2} \text{PB}_n$$

$$+ 8 \sqrt{169^2 - 50 \cdot 169 \sin^2 \beta - 50 \cdot 169 \cos^2 \beta - 2000 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}$$

$$6 \frac{(x-2)! \cdot 4!}{2! \cdot x!}$$

$$n \cdot \frac{\binom{n-2}{x-2}}{\binom{n}{x}}$$

$$x-2 \dots \binom{2}{x-2} \frac{(x-2)!}{(x-2+n-2)! \cdot (n-2)!}$$

$$x \cdot \frac{\binom{0}{x-2}}{\binom{n}{x}} = \frac{\binom{n-2}{x-2}}{\binom{n}{x}} \frac{x!}{(x-n)!} \frac{\binom{2}{x-2}}{\binom{n}{x}} \frac{x!}{(x-n)! n!} \frac{(x-2)! \cdot n!}{(6-2)!} \frac{x!}{(x-n)! n!} \frac{(x-2)! \cdot n!}{(6-2)!}$$

$$\frac{n}{4} - n \quad \frac{n}{4} - \frac{n}{4} = \frac{3n - n^2}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отмьтете крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

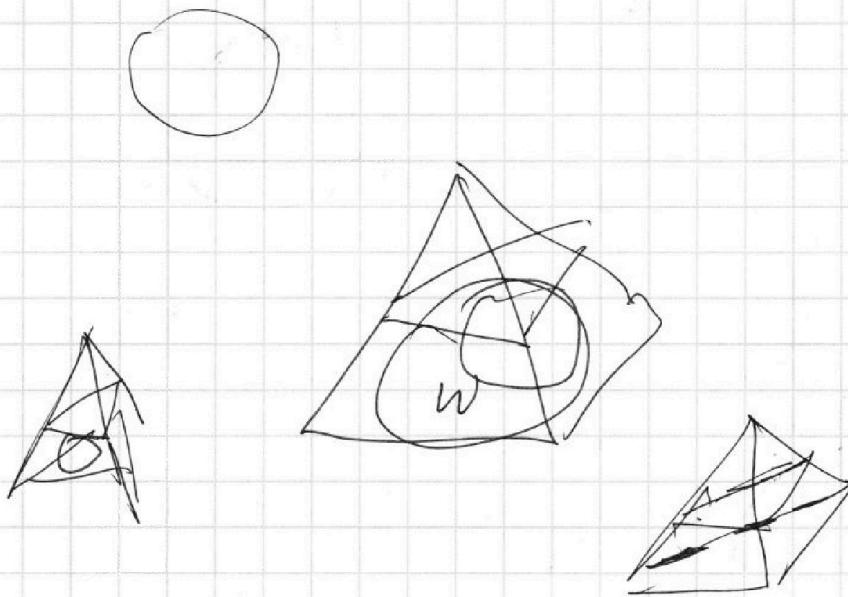
5

6

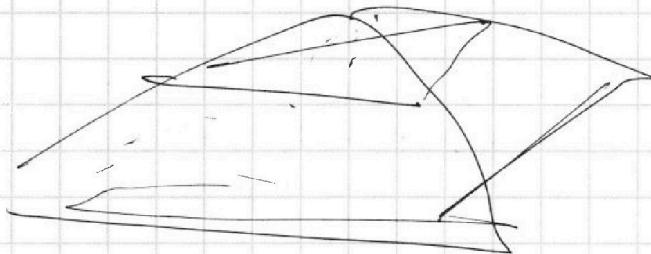
7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$R_i + r_w$



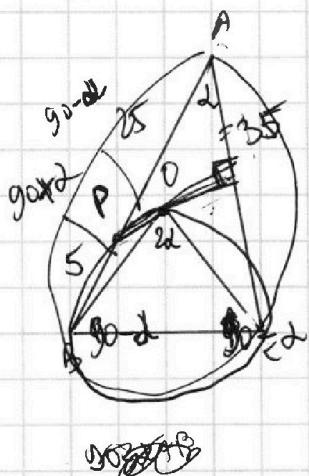
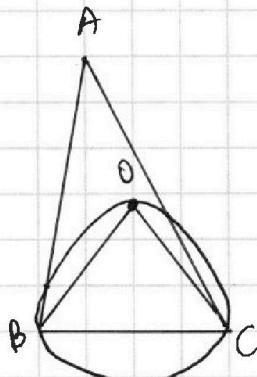
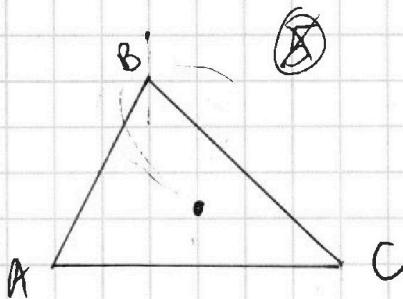


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



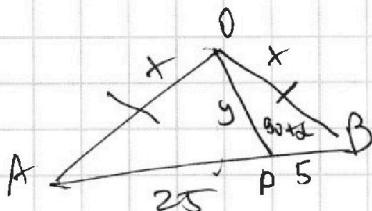
$$\begin{aligned} 180 - 2\alpha &= 90^\circ \\ 180 - (6\alpha - 2) &= 90 + \alpha \end{aligned}$$

$$180 - (10 + \alpha) = 90 - \alpha$$

$$10\alpha = 5$$

$$\begin{aligned} 25 \times OP^2 &= 2.5 \cdot OP \cos(90 + \alpha) = -\sin \alpha \\ &= 25^2 + OP^2 - 2 \cdot 25 \cdot OP \cos(90 - \alpha) \\ &\quad \text{or} \end{aligned}$$

$$2 \cdot 5 \sin \alpha + 2 \cdot 25 \sin \alpha OP = 25^2 - 25$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h^2 s &= \frac{1}{2} 25 OP \sin(90 + \alpha) \\ \frac{1}{2} h^2 s &= \frac{1}{2} 25 OP \sin(90 - \alpha) \\ 5 &= 25 + x^2 - 2 \cdot 25 \cos \alpha \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

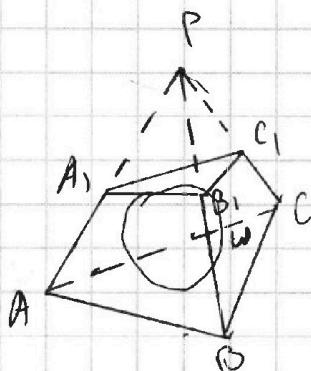
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!