

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A, B, C ∈ N

Пусть $A = \overline{aaaa}$, где $a \in \mathbb{N}$ и $a \in \{1; 9\}$

тогда $A = 11 \cdot 101 \cdot a$. Значит, что 11 и 101 - простые числа

По условию задачи $ABC = n^2$, где $n \in N$

значит если ABC делится на какое-то

простое, то ABC делится на квадрат этого

простого. Значит $ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C : 101^2$
 $11 \cdot a \cdot B \cdot C : 101$

~~значит~~ Значит, что $11 \nmid 101$
 $a \nmid 101$, т.к. $a < 101$
 $C \nmid 101$, т.к. $C < 101$ (C -独一无二ное)

значит $B : 101$, B -独一无二ное $\Rightarrow B = \overline{101}$, где $B \in N$, $B \in \{1; 9\}$

Но одна из цифр B равна 1 $\Rightarrow B = 101$

значит $ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot C : 11^2$, т.к.
 $aC : 11$ ~~A~~ : 11

значит, что $a \nmid 11$, т.к. $a < 11$, значит $a : 11$,

значит $C = \overline{cc}$, т.к. C -独一无二ное

Но тогда одна из цифр C равна 5 $\Rightarrow C = 55$

значит $ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot 55 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5 \cdot a : 25$, т.к.

значит $a : 5$, но $a \leq 9$ ~~и~~ и $a > 0 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow A = 5555$ $ABC : 5$

значит существует всего одна группа чисел подгруп задачи
единичные решения $(5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

[N2]

• № упрощено задачи $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ xy=(x-3)(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=(x-3)(y+3) \end{cases}$$

, но $x>0$ и $y>0 \Rightarrow$ это
случай невозможен

значит $xy=(x-3)(y+3)$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x-y = 3$$

~~$y=x-3$~~

$x = y+3$

Тогда $M = x^3 - y^3 - 9xy = \cancel{(y+3)^3 - y^3} - 9y(y+3) =$
 $= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = \boxed{27}$

• Задачами, что $M=27$ являются: $x=4$ и $y=1$

тогда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = 4^3 - 1^3 - 9 \cdot 4 = 4(16-9) - 1 = 28 - 1 = 27 \quad \text{④}$$

ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3

(a) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$$2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

1) ~~\sin~~ $\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1 + \cancel{2k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

2) $\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} + \cos \frac{\pi(-x-y)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} + \cos \frac{(-x-y)\pi}{2} \right)$$

~~$\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0$~~

$$\frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 1 + \cancel{2k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Значит возможные пары:

$(x, 1+2k-x)$	$k \in \mathbb{Z}$
$(x, 3x-1-2k)$	$k \in \mathbb{Z}$

Всего: $(x, 1+2k-x)$ $k \in \mathbb{Z}$
 $(x, 3x-1-2k)$ $k \in \mathbb{Z}$

x -действительное

x -действительное.

0) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \quad (*)$ $x, y \in [-1; 1] \quad x, y \in \mathbb{R}$
 $y \in [-1; 1]$

значения, при которых $\arccos t \leq \pi$, $y \in [-1; 1]$

значит $(*)$ не выполняется, если $\arccos x/4 = \arccos y/9 = \pi$

значит $x/4 = -1$, т.е. $x = -4$ и $y/9 = -1$, т.е. $y = -9$

значения, при которых $\arccos x/4 = \arccos y/9 = \pi$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

L

~~Переделали борцовские джинсы~~ $\begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases}$

Заметим, что x и y разной четности
и при этом есть x одной четности, когда
же y другой четности, т.к.

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases} \leftarrow k \in \mathbb{Z}$$

Эти решения соединяются в первом
встречении, т.к. $x \in \mathbb{Z}$

Значит $y = -x + 1 + 2k$ \leftarrow неравенство можно подобрать
такие четности, чтобы
здесь x

Значит решения можно счесть, сколько и для
четности каких и наоборот из интервалов
 $[-9; 4]$ и $[-9; 9]$ одна четн. пара
значит x : $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 \leftarrow$ это во втором $= 50 + 36 - 1 = 85$
четн. в 1 нер. \leftarrow нач. в первом интервале
в первом интервале во втором интервале

Ответ: а) $\begin{cases} (x, 1+2k-x) \\ (x, 3x-1-2k) \end{cases} \leftarrow k \in \mathbb{Z}$, x -действительное
б) 85

L

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№4 Луиза Глаа и организует гала-концерт.

Тогда вероятность ~~попасть~~ в концерт ^{членам} помехе одному человеку на концерт равна $\frac{4}{n}$
а паре людей ^{Пара} помехе на концерт $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$ ^{осталось 3}
^{одного}
Луизе в конце концов денег стало ^{осталась (n-1)} ^{человек}

Тогда аналогично предположив вероятность ^и для, ^и паре помехе на концерт в конце

конца равна $\frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1}$

По условию задачи $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \right) = \frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1}$

$$\frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 3 = x(x-1)$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$\begin{cases} x = 7 & > 4 \\ x = -3 & < 4 \end{cases}$$

значит $x = 7$

значит в конце концов было выделено 7 билетов на концерт

Ответ: 7

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит $f^2(t)$ достигает максимума при $t=2$.

$$f^2(2) = 14 + 2 \cdot \sqrt{7 \cdot 7} = 14 + 14 = 28.$$

Тогда максимум $f(t)$ тоже при $t=2$

и равен $f(2) = \boxed{(\underline{\underline{28}})}$

Значит максимум первообразной $\Phi(t)$ равен

$$M = 3\pi + 2 - f(2) = \boxed{3\pi + \frac{9\sqrt{7}}{2}}$$
 и равен

при $t=2$, т.е. $\sin 2x = 2$
 $\sin^2 x = \frac{4}{2}$.

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: ~~$\frac{3\pi+4\sqrt{7}}{2}$~~ - максимум первообразной.

достигается при $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

I-

I-

I-

I-

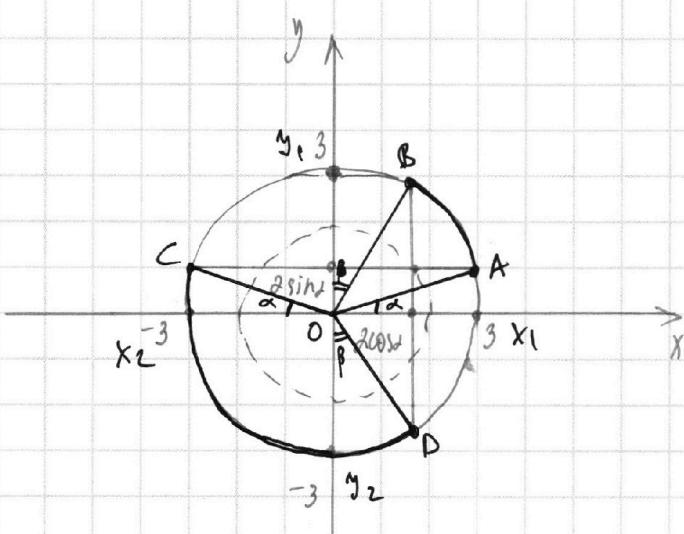


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Тогда периметр $\Phi(\alpha)$ состоит из 4 частей:
2 дуг и 2 отрезков
Посчитаем сумму
длии дуг:

$$\angle AOX_1 = \alpha$$

$$\angle BOY_1 = \beta$$

Тогда $\angle COX_2 = \angle AOX_1 = \alpha$
 $\angle DOY_2 = \angle BOY_1 = \beta$.

Тогда сумма длии дуг $(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) \cdot R + (\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta) R = \pi R$,

где R - радиус окружности, т.е. $R = 3$.

Значит сумма длии дуг равна $\pi R = 3\pi$

Теперь посчитаем сумму длии отрезков AC и BD

Найдем координаты точек, зная, что они лежат на окр. радиусе 3:

$$A(\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}; 2\sin\alpha)$$

$$B(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}; 2\cos\alpha)$$

$$C(-\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}; 2\sin\alpha)$$

$$D(-\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}; 2\cos\alpha)$$

$$\text{Тогда } AC + BD = 2 \cdot (\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}) = \\ = 2 \cdot (\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + \sqrt{5 + 4\sin^2\alpha}) = 2 \cdot (\underbrace{\sqrt{9-t}}_{t=4\sin^2\alpha} + \underbrace{\sqrt{5+t}}_{t=4\sin^2\alpha})$$

Нам надо найти макс $f(t)$ при $t \in [0; 9]$ $f(t) = \sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}$

$$f'(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{9-t} + \frac{1}{2}\sqrt{5+t} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(9-t)(5+t)}{\sqrt{5+t}} = 14 + \frac{1}{2} \cdot \frac{45 + 4t - t^2}{\sqrt{5+t}}$$

нараховав, берём вину \Rightarrow макс. в вершине $t_0 = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

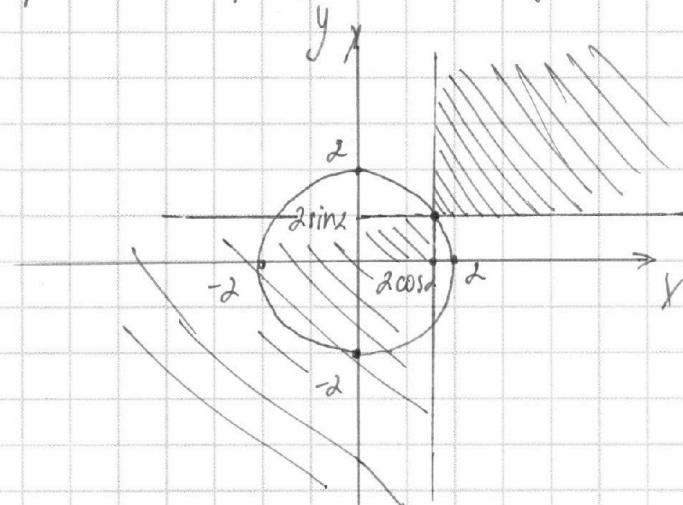
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

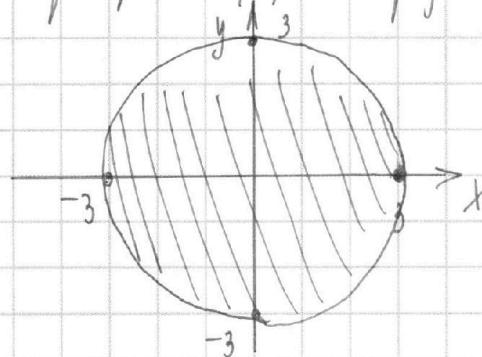
[N6] $\Phi(x)$

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Построим график (1) — замкнутую область.

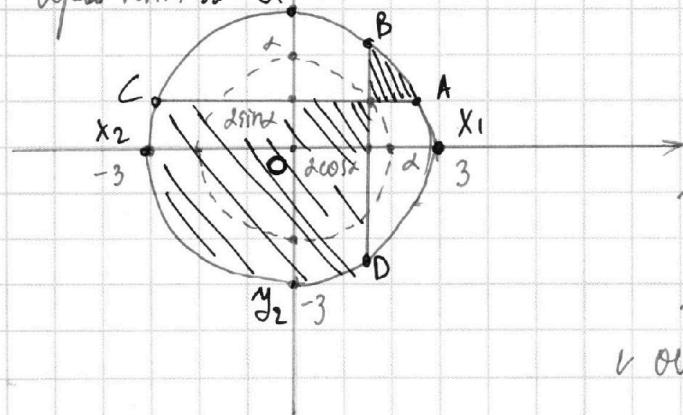


Построим график (2) — круг с центром в $(0, 0)$ радиусом 3



Фигура $\Phi(x)$ — пересечение графиков (1) и (2) :

пунктир хована через них M_1, M_2



Обозначим
некоторые точки:

О — центр окр.

A, B, C, D — точки

пересеч $\Phi(x)$ с

окр

x_1, x_2, y_1, y_2 —

точки пересеч окр

с осями Ox и Oy соответ-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1 $\frac{-2}{45}$ 3-6 $\frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

2.12.

$45 + 2 - 1 = 46$

$\pi r^2 (5-t)(5+t)$

$9-t = 5+t$

$t = 2$

$7. 7+45$

$t = 2$

$2.$

14

49

$a+b = 3$

2.1

4

$2.2.$

1.3

$x_1 = 2\cos\alpha$

$y_1 = \sqrt{g-4\cos^2\alpha}$

$x_2 = 2\sin\alpha$

$y_2 = \sqrt{g-4\sin^2\alpha}$

$x^2 + y^2 = g$

$2\sin\alpha$

$x^2 + y^2 = g$

$y^2 = g - 4\sin^2\alpha$

$= 5 + 4\cos^2\alpha$

$\alpha = \arctan \frac{x_1}{y_1} = \frac{\arctan \frac{x_1}{y_1}}{2\sin\alpha}$

$\beta = \arctan \frac{x_2}{y_2} = \frac{\arctan \frac{x_2}{y_2}}{2\cos\alpha}$

$P = 2y_2 + 2x_2 + \cancel{\frac{\beta-\alpha}{2\sin\alpha}} \cancel{\frac{\beta-\alpha}{2\cos\alpha}} \cancel{(3-2)R} +$

$= \cancel{\pi} (\cancel{\frac{\beta-\alpha}{2}} R + \cancel{\frac{\beta-\alpha}{2}} R) = \pi R + 2y_2 + 2x_2 = 6\pi +$

$+ 2y_2 - 2x_1$

$= 2(\sqrt{g-4\cos^2\alpha} + \sqrt{g-4\sin^2\alpha}) + G\pi =$

$\cancel{\pi} \sqrt{g-4\cos^2\alpha} + \sqrt{5+4\cancel{\cos^2\alpha}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть $A = \overline{aaaa}$, где $a \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$ [1; 9]

Тогда $A = 11 \cdot 101 \cdot a \Rightarrow A : 11 \text{ и } A : 101 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \text{ не } \vdash 11 \text{ и } A \text{ не } \vdash 101, \text{ то } A \text{ не } \vdash 11^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \text{ не } \vdash 11^2 \text{ и } A \text{ не } \vdash 101^2$$

$$x+y = -1 \Rightarrow y = -x-1$$

$$\frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + x^3 + 9(x^2 + x)}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{6x^2 + 6x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \sqrt{9-t} + \sqrt{5+t}$$

3. Вспомог д.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{matrix} ab \\ bc \\ ac \end{matrix}$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a+b}$$

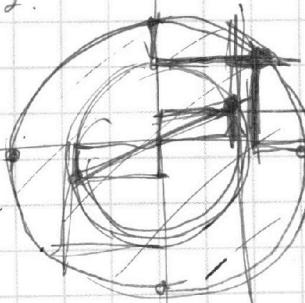
$$a+b + \sqrt{ab} \leq 0.48.$$

$$9-t+5+t+$$

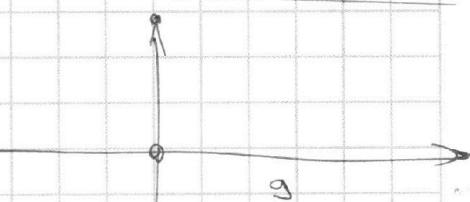
$$\Phi(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right.$$

$$x \cdot y > 2 \text{ неравн}$$

$$\begin{cases} x > 2\cos\alpha \\ y > 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases}$$



$$\cos \frac{x}{y} = \cos \pi = \frac{x}{4}$$



$$14 + 2(\sqrt{9-t} + \sqrt{5+t})$$

$$\begin{aligned} x &\in [-4; 4] & -y &\in [4; -2] \\ y &\in [-9; 9] & \end{aligned}$$

$$\arccos(-1) = -\pi$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$g + 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N1) $a \neq 0$ $A = \overline{aaaa}$ $a = a - \overline{1111} =$
 $B = \overline{\cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$ $= a \cdot 11 \cdot 101$
 $C = \overline{\cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$
 $ABC = n^2 \Rightarrow ABC : a^2 \Rightarrow \begin{cases} B : a \\ C : a \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} B : 11 \\ C : 11 \end{cases}$ $1100 + 11 = 1111$

1) $C : 11 \rightarrow C = 55$ (1)
 ~~$a \neq 0 \rightarrow B : a$~~

1.1) $a = 5 \Rightarrow C : a = 5555 \cdot 55 \cdot B = 5^2 \cdot 11^2 \cdot 101 \cdot B \Rightarrow B : 101 \rightarrow B = 101$

1.2) $a \neq 5 \rightarrow B : a, B : 5, B : 1$

$ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \Rightarrow B : 101 \rightarrow B = 101$
 $C : 11 : a \Rightarrow C = 55 \rightarrow a = 5$

(N2) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

~~$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$~~ $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$

$\sin((\alpha \pm \beta) \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}) - \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) =$
 $\sin y \cdot \cos x + \cos x \sin y - \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = 2 \cos x \sin y$

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y - \sin x \cos y + \cos x \sin y =$
 $= 2 \cos x \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

~~$2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$~~

$\sin x \sin y = \cos(-) - \cos(+)$
 $\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x \cdot \cos \cdot \cos =$

$\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi(y-x)}{2} - \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi(y-x)}{2} + \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} - \cos(+) + \cos(-) \right)$

$2 \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0$
 $\cos \cos - \sin \sin + \cos \cos + \sin \sin$

$\frac{\pi(3x-y)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
 $3x - y = \pm 1 + 4k \Rightarrow y = \pm 3x + 1 + 4k$

$x \in \mathbb{Z}$ $3x \pm 1 - 4k \quad k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(N2) \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy - ? \quad 3 \cancel{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \cancel{x-3} \cancel{y+3}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = y^3 + 27y^2 + 27y - y^3 - (y-y=3) \Rightarrow x=y+3$$

$$-9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y - y^3 - 27y = 0 \quad \text{OK}$$

$$(N4) \quad h - n \text{ кн.} \quad 5 \text{ ибн.}$$

4 ибн. > 4 ибн.

$$3,5 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1} \Rightarrow \frac{7}{2} \cdot 4 \cdot 3 = x^2 - x$$

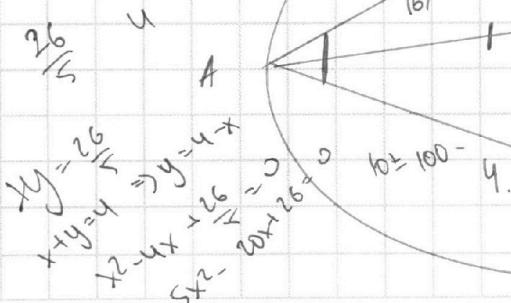
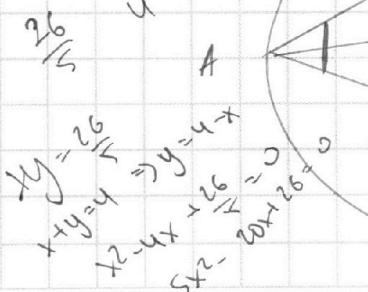
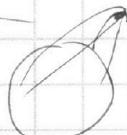
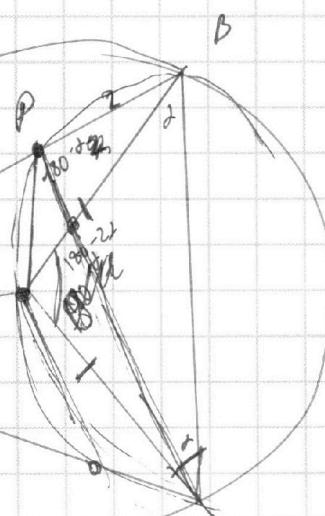
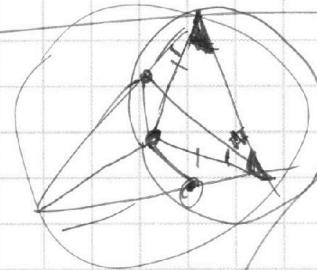
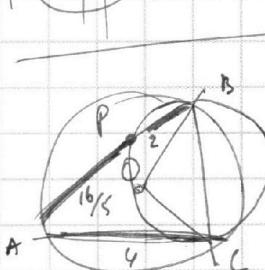
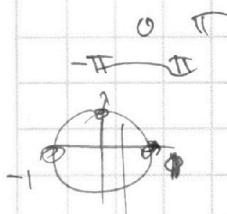
ответ: 7.

$$42 = x^2 - x \\ x^2 - x - 42 = 0 \quad \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2}$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 7 \quad \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(3.8)

$$0 \pi \quad \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{q} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{q} \neq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x/q = x - q \\ y/q = y - q \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 2 3 4 5 6 7

$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \alpha} = AB$

$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R = 2PB$

$\frac{y}{\sin \beta} = 4 \Rightarrow \sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = 90^\circ$

$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{16/5}{\sin \delta} = 4 \Rightarrow \sin \delta = \frac{13}{10}$

$90 + \beta - 2\beta + \alpha = 90 - \delta + \alpha$

$\frac{R}{\sin \delta} = \frac{PB}{\sin \alpha}$

$\frac{BC}{\cos \beta} = 2R$

$\frac{AB}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{BC}{\cos \beta} = 2R = \frac{2PB \sin \beta}{\sin \alpha}$

$\frac{AB}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = 2PB$

$PB \cdot \cos \beta \cdot R = BC \cdot AC$

$\frac{AB}{4R} = \frac{\sin \alpha}{R} = 1$

$\frac{PC}{\sin \alpha + \beta} = \frac{PB}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

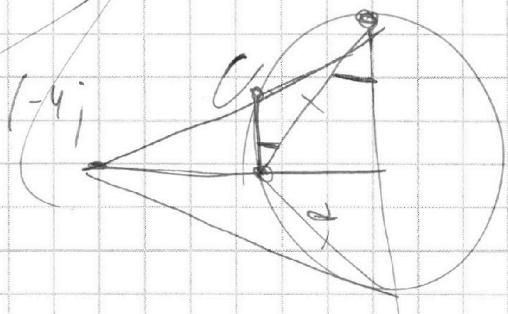
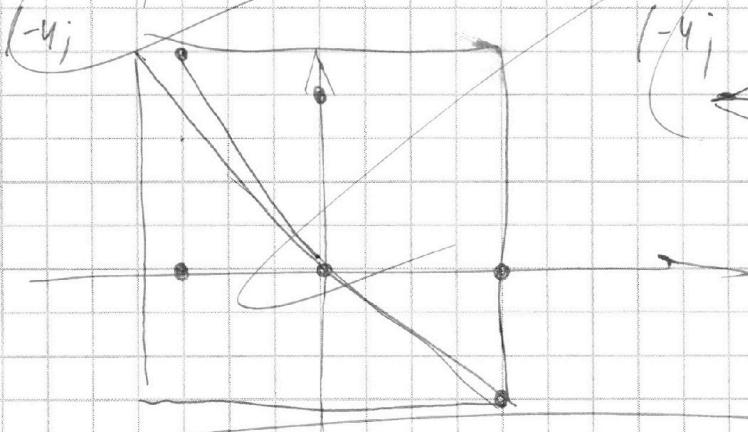
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

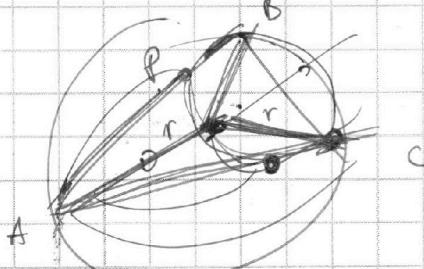
Перед решух возможные значения x : $\begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1) \quad x = -4 & \quad y = 4 + 2k - x = 5 + 2k \\ & \quad y = 3x - 1 - 2k = -13 - 2k \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Получим решения:

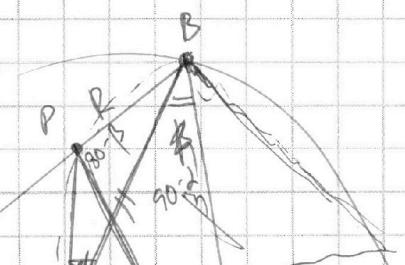


$$\frac{16}{5} : \frac{26}{5} = \frac{4 \cdot 26}{25} \quad PQ \parallel OC$$



$$\frac{1}{\sin^2 \alpha/2} = \frac{2 \cos \alpha/2}{2 \sin \alpha/2 \cdot \cos \alpha/2}$$

$$\Rightarrow PB = R$$



$$\frac{PB}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \Rightarrow R = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot BC$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha/2} = 2R = \frac{2 \sin \beta}{\sin \alpha} BC \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha/2} = \frac{2 \sin \beta}{\sin \alpha \sin \alpha}$$