



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины трапеции) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{d d d d}, \text{ где } d - \text{цифра от } 0 \text{ до } 9 \Rightarrow (d; 11) = 1 \\ (d; 101) = 1$$

$$A = 1111 \cdot d = 101 \cdot 11 \cdot d$$

$\uparrow$   
число

значит  $C \geq 101$ , т.е. число  $C \geq 101$  - не будет.

$$\text{но } A \cdot B \cdot C \text{ -квадрат} \Rightarrow B \div 101$$

$$B = 101 \cdot k, \text{ если } k \geq 10, \text{ то } B \text{ не трёхзнач} \Rightarrow 1 \leq k \leq 9$$

но  $B$  содержит  $\overline{d}$ , а  $101 \cdot k = \overline{k0k}$ , если  $k$ -цифра  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow k = 7 \Rightarrow \boxed{B = 707} \Rightarrow B \div 11$$

$$A \div 11, \text{ но } A \div 11^2 \Rightarrow C \div 11 \Rightarrow C = 11 \cdot l, \text{ если } l \geq 10,$$

$$\text{то } C \text{-трёхзнач} \Rightarrow 1 \leq l \leq 8 \Rightarrow C = \overline{lll}, \text{ но}$$

$$C \text{ содержит } \overline{d} \Rightarrow \cancel{\overline{lll}} \Rightarrow l = 1 \Rightarrow \boxed{C = 11}$$

Итак:  $A \cdot B \cdot C = (101 \cdot 11 \cdot d) \cdot (101 \cdot 7) \cdot (11 \cdot 7) =$   
 $= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 \cdot d \Rightarrow A \cdot B \cdot C \text{ -квадрат} \Leftrightarrow d = 1$   
 т.е.  $d \leq 9$ , то  $d$ -цифра  $d = 1, 4, 5$ .

Ответ:  $(1111; 707; 11)$

$$\text{Итак, } A \cdot B \cdot C = (101 \cdot 11 \cdot d) \cdot (101 \cdot 7) \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot d$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \text{ -квадрат} \Leftrightarrow 7 \cdot d \text{ -цифра} \Leftrightarrow d = 7$$

$$\text{Ответ: } (7777; 707; 11)$$

A            B            C

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k(x; y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$k(x-4; y+4) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{(y+4)+(x-4)+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$k(x; y) = k(x-4; y+4)$$

" "

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

значит, что т.к.  $x, y \geq 0$  то  $x+y+3 > 0 \Rightarrow$  можно

делить  $\delta y$   
на обе части

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)}$$

" "

можно не следить за тем, что делаем,  
т.к. в дальнейшем  $k(x; y)$  и  
 $k(x-4; y+4)$  определены

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

" "

$$x = y+4$$

" "

$$M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = (y^3 + 12y^2 + 48y + 64) - y^3 - 12y^2 - 48y =$$

$$\boxed{M=64}$$

$$\text{Ответ: } \boxed{M=64}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p=60 \Rightarrow \{x=7; y=4\}$$

тогда  $x+y$ , что  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  все пары  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  удовлетв. равенству из а)

Чтобы  $(x, y)$  удовл. нер. ви и.и.з., что  $(x, y)$

удовл. ОДЗ:  $\begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$  также,  $x \neq 7$   
 $y \neq 4$   
 $\text{и } (x, y) \neq \{7, 4\}$

$x$  может принимать 15 значений,  $y = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  всего  $15 \cdot 9 = 135$  изд. упорядоченных пар  
и 1 пара лишних  $(x, y)$

~~Одн. из~~ 134



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a)  $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}\delta = \operatorname{ctg}\alpha \end{array} \right.$

$$(\sin\beta - \sin\alpha) \cdot \cos\beta = (\cos\beta + \cos\alpha) \cdot \cos\alpha$$

$$\sin^2\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos^2\beta + \cos\alpha \cos\beta$$

$$(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = 0$$

$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\beta = -(\alpha - \beta) \\ 2\beta = \pi - (\alpha - \beta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\beta = -(\alpha - \beta) + 2\pi k \\ 2\beta = \pi - (\alpha - \beta) + 2\pi n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta + \alpha = 2\pi k \\ \beta + \alpha = \pi + \pi(2n+1) \end{array} \right. \Rightarrow \beta + \alpha = \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Итого, } \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \pi l \Leftrightarrow \boxed{\alpha + \beta = \pi l}, l \in \mathbb{Z}$$

Очевидно, что  $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$

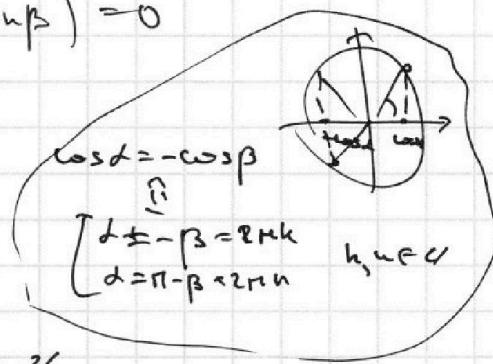
5)  $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{7} > -\frac{\pi}{2}$  ( $\dagger$ )

$$\text{так как } \arcsin \frac{y}{7} + \arccos \frac{y}{7} = \frac{\pi}{2}; -\arcsin \frac{y}{7} = \arccos \frac{y}{7} - \frac{\pi}{2}$$

$$(\dagger) \Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{7} > 0$$

$$\text{ОДЗ: } \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x}{7} \right| \leq 1, \left| \frac{y}{7} \right| \leq 1 \\ x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{array} \right.$$

но т.к.  $\arccos x$  принимает значение от  $0$  до  $\pi$ ,  
то  $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{7} \geq 0$   $\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} = 0, \arccos \frac{y}{7} = 0$



l, n in Z

l, n in Z



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из равенств

$$P_1 = 11 \cdot P_0 ;$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 11 \cdot \frac{12}{n(n-1)} \quad (=) \quad k(k-1) = 12 \cdot 11 \\ k = 12 \text{ и } k = -11 \text{ - норав}$$

$$k > 0 \Rightarrow k = 12$$

12 лет

~~Ответ~~ Ответ: 12 лет (на 8 летнее, так как в исходе)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача n одиннадцати классиков  
 есть  $\binom{n}{4}$  способов раздать n медалей  
 4 бинета. При этом есть ровно  $\binom{n-2}{2}$   
 тех способов, при которых бинет будет и  
 я Г, и у В, т.к. мы можем считать, что  
 Г и В или уже дали бинет, а оставшимся  
 2 распределенным между n-2 медалью скажем.  
 что, удачливая вероятность равна  
 на компьютер (с учётом равномерного выбора  
 начального бинета) =  $\frac{P_+}{P_{\text{вс}}^2} = \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{4}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} =$   
 $= \frac{12}{n(n-1)} = P_0$

Задача n помните ~~старое~~ это выражение для  
 $k \geq 4$  бинетов. Аналогично, вероятность  $P_{\text{н}} V$   
 этого выражения для  $P_1 = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$   
 $P_1 = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}}{\frac{n!}{n!(n-k)!}} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{n! \cdot (k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 \cos \angle = 1 \Rightarrow \cos \angle = \frac{11}{16} \Rightarrow \sin \angle = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} \quad (\angle < \frac{\pi}{2})$$

$$\sin \angle = \sqrt{\frac{16^2 - 11^2}{16^2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 27}}{16} = \frac{3}{16} \cdot \sqrt{15}$$

$$AC = 22, AB = 24 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \angle = \\ = \frac{22 \cdot 24}{2} \cdot \frac{3}{16} \cdot \sqrt{15} = \frac{11 \cdot 3}{2} \cdot 3 \sqrt{15} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

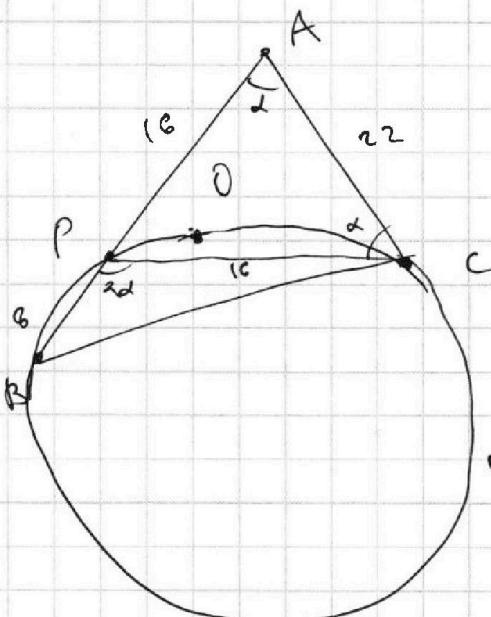
$$\text{Ответ: } \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



△ABC - остроуг.

||

т. о. внутри △ABC

$$\angle BOC = 2 \angle BAC \text{ (чевраль.)}$$

||

$$\angle BPC = 2 \angle BAC = 2 \angle PAC$$

||

ω₂ △APC - равнобедр.

$$\text{т. ч. } \angle BPC = \angle PAC + \angle ACP$$

$$2d = d + \angle ACP$$

||

$$\angle ACP = d \Rightarrow AP = PC = 16$$

помимо 2 т. исходных доказательств

△ABC и △BPC:

$$1) BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha \Leftrightarrow 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cos \alpha$$

$$2) BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cos 2d = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cos 2d$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cos \alpha = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

решение квадратные уравнения  $\alpha = 0 \text{ либо } \alpha = 180^\circ$  (подходит первое)

$$12^2 + 11^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11 \cos \alpha = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 \cos^2 \alpha + 2 \cdot 4 \cdot 8$$

$$(128 \cos^2 \alpha - 264 \cos \alpha + 144) + 21 - 16 - 64 + 64 = 0$$

$$(128 \cos^2 \alpha - 264 \cos \alpha + 144) = 0$$

P - и △APC: он равнобедр с верх P  $\Rightarrow AP \cdot \cos \alpha =$   
 $= \frac{AC}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

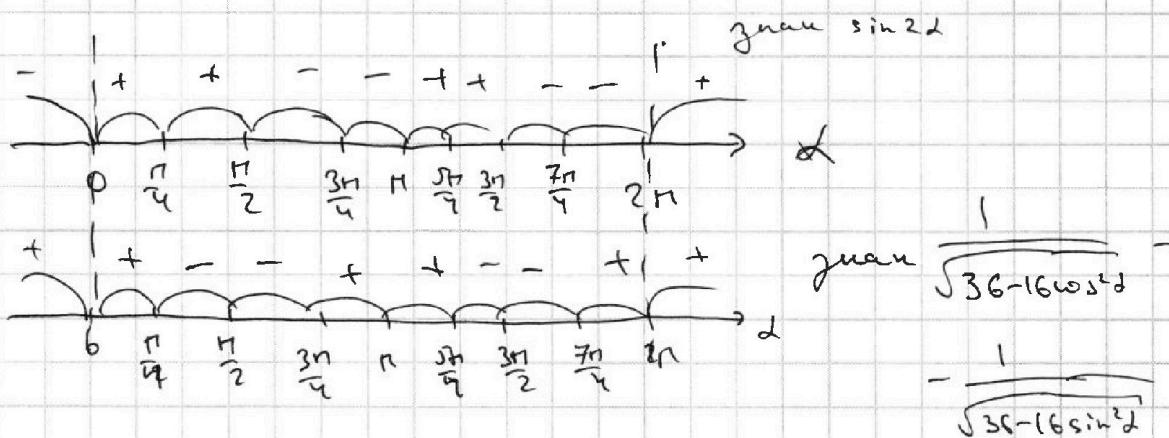
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin 2d = 0 \Leftrightarrow 2d = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

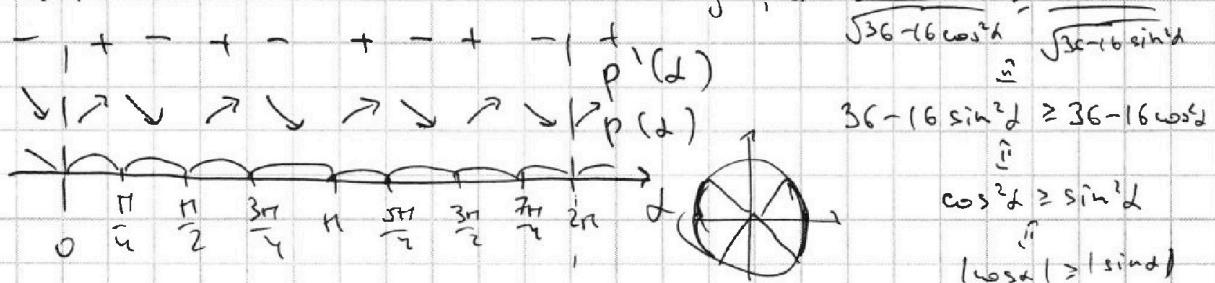
$$d = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$d = \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

отметим на промежутке  $[0; 2\pi]$  все нули  
функции и покажем, каким образом знако:



итого:



значит все точки зига

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad (k \in \mathbb{Z})$  - конечные значения

$$\text{при этом } P\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right) = 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + 6\pi$$

$$\begin{cases} P_{\max} = 8\sqrt{7} + 6\pi \\ d_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{other}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

длины  
 $\Rightarrow$  сумма длины равна  $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6 = 6\pi$

2. найдем  $DE + BC$  как функцию от  $\alpha$ :

из  $\triangle MOC$ :  $MC^2 = OC^2 - MC^2 \Rightarrow OM^2 = 36 - 16\cos^2\alpha$

$$MC = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

аналогично  $DN$ :

$$DN = \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} \Rightarrow DE = 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

что мы хотим максимизировать

$$2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} + 2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha} + 6\pi = P(\alpha),$$

$P(\alpha)$  = периметр  $\varphi(\alpha)$

$$P'(\alpha) = \frac{2}{2\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} \cdot (-32\cos\alpha) \cdot (-\sin\alpha) +$$

$$+ \frac{2}{2\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} \cdot (-32\sin\alpha) \cdot \cos\alpha + 0$$

$$P'(\alpha) = \frac{32\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} - \frac{32\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{32\sin\alpha(6\sin^2\alpha)}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} - \frac{32\sin\alpha(6\cos^2\alpha)}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}}$$

вспомним, что  $\alpha \in [0; \pi]$ :

$$\frac{1}{\sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}} \approx \frac{1}{\sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}} \Leftrightarrow 36 - 16\cos^2\alpha = 36 - 16\sin^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

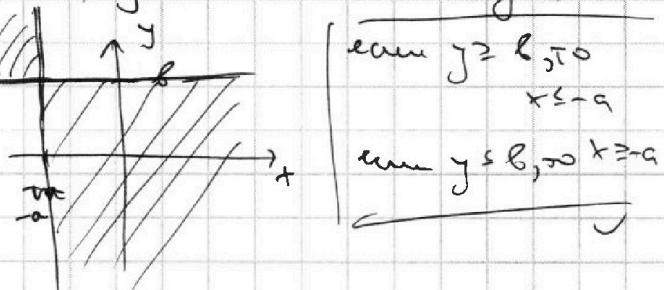
Давайте решать задачу графически, чистотрассное  
решение системы вносится ~~в~~ тью:

2-е уравнение:  $x^2 + y^2 = 36$  - круг с центром  $O(-10, 0)$

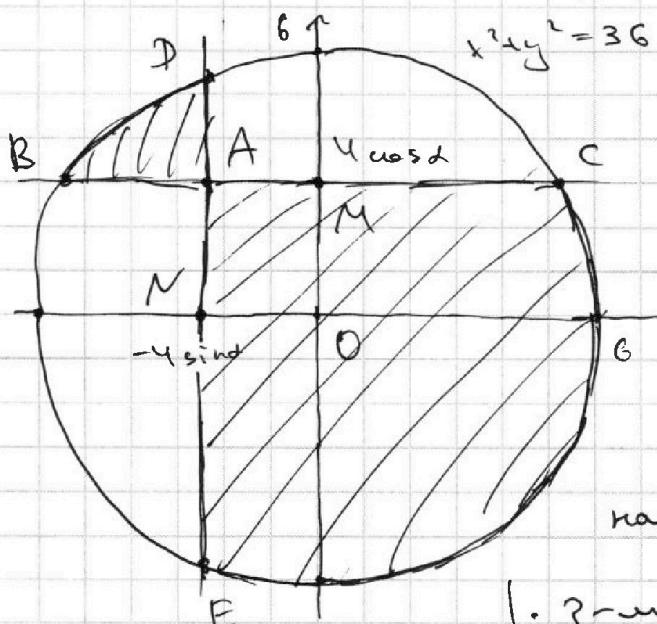
и радиусом 6:

а ГМТ т.  $(x; y)$ :  $(x+a)(y-b) \leq 0$  выполняет

следующим образом:



Тогда где данное  $\lambda$ :



фигура  $\varphi(\lambda)$  замкн.

понятно, что при изменении  $\lambda$  т. A будет двигаться по окр с центром в O и радиусом  $\sqrt{16 \cos^2 \lambda + 16 \sin^2 \lambda} = 4$

наибольший периметр  $\varphi(\lambda)$  с

1. з-и, что сумма диаметров

дуг BD и CE постоянна, т.е.

$\angle DAB = \angle CAE = 30^\circ = \frac{\widehat{BD} + \widehat{CE}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{CE} = 180^\circ \Rightarrow$  сумма дуг будет равна наибольшим диаметрам



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{тогда } \frac{a}{2} = d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)$$

$$a = 2d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)$$

]) л- гипотенуза  $\sqrt{A_1} \Rightarrow A_1 A_2 = (k+1)l$

$$\boxed{\text{сум едара } \Omega = (k+1) \cdot l = (k+1) \cdot \frac{a}{2} = (k+1) \cdot d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)}$$

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2} = \sqrt{\frac{4kd^2}{(k+1)^2} + d^2 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right) + d^2} = \\ = d \sqrt{\frac{4k}{(k+1)^2} + 1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)}$$

$$l(k+1) = (k+1) \cdot d \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)$$

$$(k+1) \cdot \sqrt{\frac{4k}{(k+1)^2} + 1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)} = (k+1) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)$$

$$(k+1)^2 \cdot \left(\frac{4k}{(k+1)^2} + 1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)\right) = (k+1)^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)$$

$$4k + (k+1)^2 = (k+1)^2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right) \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right) - 1\right)$$

отсюда находим  $k$  и подставляем его в

$$d = a \operatorname{ctg} \frac{2 \pi k}{k+1}$$

чтобы получить зупр  $\Omega$  нужно восстановить +

и сформулировать  $\Omega = l \in \Omega_1, \Omega_2$ , т.е.  $k$ -зупр

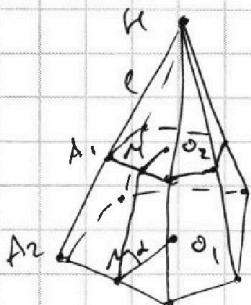
бывш. опр. в соответствии с правилом

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



представим ребра правильной пирамиды  
перенеся до г. К

К - центр гипотензии, переводим  
правильные многоугольники -  
шестиугольник  $O_1O_2$  друг в друга

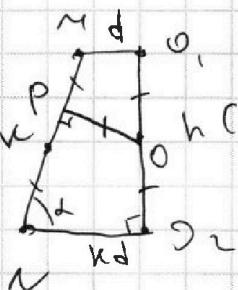
$$K \cdot KO_2 = KO_1, \quad J M, N - \text{сер. сект- стороны}$$

$$O_2M = d \Rightarrow O_1N = kd \quad (d \text{ и } kd \text{ равны тк есть сторона})$$

$$KO_2 = h \Rightarrow O_2O_1 = h(k-1)$$

р-ое решение:

$$\begin{aligned} PO &\sim PO_2O_1 = O_1O_2 = \\ &= \frac{h}{2}(k-1) \end{aligned}$$



т.н.  $PO_2N$  - бисс.  $\angle PO = O_2N$

$NO \sim \text{бис-са}, \quad PN \parallel O_2N \Rightarrow \angle PNO = \angle O_2NO = \frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2O_1}{O_1O_2} = \frac{\frac{h}{2}(k-1)}{kd}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h(k-1)}{d(k-1)} = \frac{h}{d}$$

$$\frac{h}{d} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{h(k-1)}{kd \cdot \left(1 - \frac{h^2(k-1)^2}{kd^2}\right)} \Leftrightarrow \frac{k}{k+1} = \frac{4h^2d^2}{4k^2d^2 - h^2(k-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$4k^2d^2 - h^2(k-1)^2 = 4kd^2(k-1) \Leftrightarrow h^2(k-1)^2 = 4kd^2$$

также  
пометка,  
что центр  
сферы  $\omega = 0$ .  
если середина  $O_1O_2$ )

т.к. ГМТ, равноз.  
от боковых грани-  
ческих  $KO_1$ , а

ГМТ т.) равноз.  
по 2-м параллельных  
линиям параллель-  
но им можно пройти  
через середину  $O_1O_2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$h^2 = \frac{4kd^2}{(k-1)^2} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{h^2}{d^2} = \frac{4kd^2}{(k-1)^2 d^2} = \frac{4k}{(k-1)^2}$$

~~доказ~~  $d = a \operatorname{ctg} \frac{2\pi k}{k-1}$

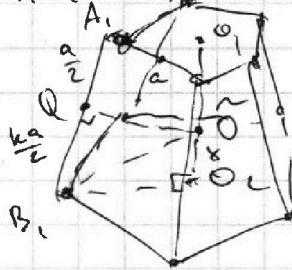
значит то, что в центр, касающийся всех ребер, можно вписать квадрат  $O_1 O_2$  (чтобы центр касался всех ребер квадрата —  $O_1 \& O_2$ , и квадрат — грани),

то в центре квадрата касающиеся верхней грани бокут срединой.

Д. доказ  $\sum = 0$ ;  $O_1 O_2 = x \Rightarrow$  радиус касания  
ребра квадрата центра  $k-1$ -го, значит:  $(h(k-1) - x)^2 + d^2 =$

$$= x^2 + k^2 d^2 \Leftrightarrow h^2 (k-1)^2 + 2h(k-1)x + d^2 = k^2 d^2$$

$$h^2 (k-1)^2 - 2h(k-1)x = d^2 (k+1) \Leftrightarrow x = \frac{h^2 (k-1) - d^2 (k+1)}{2h}$$



Д. верхнее ребро  $a \Rightarrow$  значение  $h$  — >

точка кас. на боковой грани  $A_1 B_1$ :  
 $QA_1 = \frac{a}{2}$ ,  $QB_1 = \frac{ka}{2}$  из р-бра отрезков нас.

~~Доказательство~~  $QA_1 = \frac{a}{2}$ ,  $QB_1 = \frac{ka}{2}$

Д. очевидно что правильный  $k$ -угольник



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются** отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\text{tg } 2\delta = \frac{2\text{tg } h}{1 - \text{tg}^2 h}$     $\text{tg}(2\alpha + \delta) = ?$     $\text{tg}(2 - 2\alpha) = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3}} =$   
 $S_{ABC}$   
 $AP = 16$ ,  $BP = 6$ ,  $AC = 21$   
 $\frac{284}{166}$   
 $\frac{27}{24}$   
 $\frac{66}{11}$   
 $\frac{121}{11} - \frac{726}{11} + 24500$   
 $\frac{264}{11} \cdot \cos^2 2\delta = 2 \cos^2 2\delta - 1$   
 $\frac{11}{16}$   
 $\frac{11}{24}$   
 $\frac{121}{11} - 264 \cdot \frac{11}{16} + 245$   
 $8^2 + y_2^2 - 2 \cdot 8 \cdot 22 \cdot \cos 2\delta$   
 $24^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \cos 2\delta = 8^2 - 2 \cdot 8 - 22(2 \cos^2 2\delta - 1)$   
 $\text{tg } \delta = \frac{2\text{tg } \frac{1}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{1}{2}}$   
 $\frac{16}{2} \cdot 8 = 144 + 121 - \frac{2h}{d(h-1)} = \frac{2h}{kd} = \frac{2h}{1 - \frac{h^2}{kd^2}}$   
 $\frac{728}{121}$   
 $12 - 11 = 132/2$   
 $\frac{144}{264}$   
 $16 \cdot \cos 2\delta = 11$   
 $\cos 2\delta = 11/16$   
 $\frac{144}{265}$   
 $\frac{10}{16}$   
 $\frac{-265}{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \delta = \frac{11}{16}$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{11}{16} = 249 - 128 - 121$$

$$b^2 + 16^2 - 16^2 \cdot 2 \cdot \frac{11^2}{16^2} + 16^2 = (28+6)^2 = 144$$

$$(l_2 = 2\sqrt{36-16 \sin^2 \delta})$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$(22 \cdot \frac{11^2}{16^2} = \frac{14}{2})$$

$$l_1, l_2$$

$$\frac{l_1^2}{4} + \frac{l_2^2}{4} = \frac{36+16 \cos^2 \delta}{4}$$

$$l_1 = 2\sqrt{36-16 \cos^2 \delta}$$

$$(28+16 = 147)$$

$$(kd)^2 \leq d^2 + h^2(k-1)^2$$

$$264 \cdot \frac{11}{16}$$

$$148 + 121 - 24 \cdot 11 \cdot \frac{11}{16}$$

$$64 = 2^6$$

$$16 + 64 - 64 - 2 \frac{11^2}{16^2} + 64$$

$$16 = 2^4$$

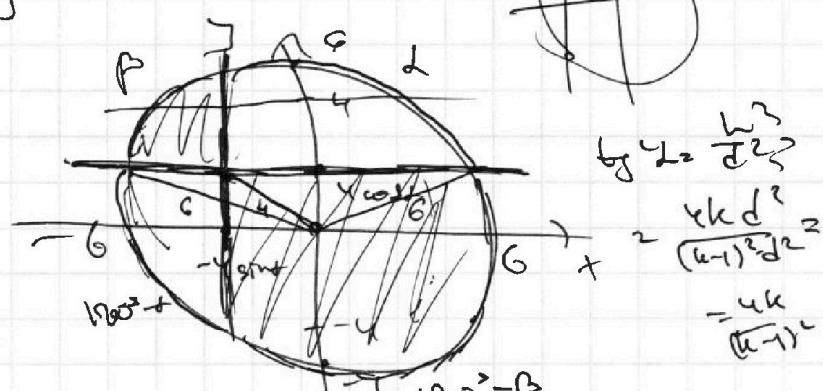
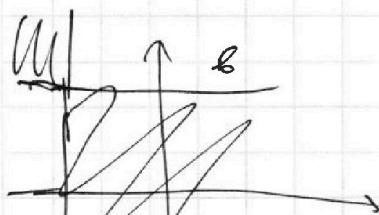
$$(21 = 24 \cdot 11 \cdot \frac{11}{16} - \frac{11^2}{2} = \frac{3 \cdot 11^2}{2} - \frac{11^2}{2} = 11^2 \checkmark)$$

$$\varphi(\lambda) = (x+iy):$$

$$(x+4\sin \alpha)(y-4\cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$(x+9)(y-6) \leq 0$$



$$tg \gamma = \frac{h^2}{d^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4kd^2}{(k-1)^2 d^2}$$

$$= \frac{4k}{(k-1)^2}$$

$$-4 \sin \alpha \cos \beta = 4 \sin^2 \alpha - 2(k-1)^2 = 4k^2 d^2 (k-1)$$

$$4k^2 d^2 - 4kd^2 (k-1) = h^2 (k-1)^2 = 4kd^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4kd^3}{(k-1)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \cos \beta = (\cos \beta \cos \alpha) \cdot \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\cos 2\beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$x^2 - l^2 = (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \leftarrow \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)}$$

$$(k-1)l =$$

$$l = 60^\circ, \beta = 30^\circ$$

$$= \frac{k+1}{2} \cdot \frac{l-h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

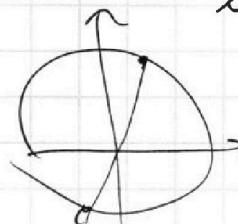
$$45^\circ \text{ и } 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\begin{cases} \text{a одинак.} \\ (h) \quad (k-1)l = \frac{(k+1)}{2} \\ (h-2) \end{cases}$$

первый член:

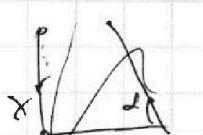
$$\frac{(h-2)}{(h)}$$



$$\arccos \frac{x}{r} = \arcsin \frac{x}{r} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2\beta + 2\pi k \\ \alpha + \beta = \pi - 2\beta + 2\pi n \end{cases}$$



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = (2n+1)\pi$$

$$\alpha + \beta =$$

$$\arccos \frac{x}{r} - \arcsin \frac{y}{r} > \frac{\pi}{2}$$

$$60^\circ, 30^\circ$$

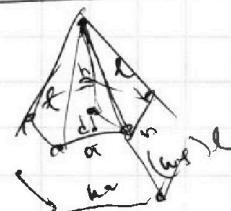
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos$$

$$20^\circ, 80^\circ \cos 2\alpha =$$

$$\frac{2k}{d(k-1)} = \frac{2hk}{k^2 - h^2}$$

$$2(k-1)l = a(k+1)$$

$$l = \frac{a}{2} \frac{k+1}{k-1}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = \phi \cdot 1111$  №1, 4-й курс

$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 32 \\ \hline 1000 \\ + 31 \\ \hline 1111 \end{array}$

$\frac{1111}{9} = 123\overline{4}$

$1111 = \frac{10^4 - 1}{9} = \frac{(10^2 - 1)(10^2 + 1)}{9} = \frac{99 \cdot 101}{9} = 11 \cdot 101$

$C: 101$

$B: 101$

$\beta = 70^\circ$

$x \rightarrow x - 4$

$y \rightarrow y + 4$

$K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy}$

$M = x^3 - y^3 - 12xy$  - ?

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$

$1. \boxed{x+y+3=0}$

$y = -x - 3$

$x + (-x - 3) + 12x(x+3) =$

$x^3 - x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 12x^2 + 36x = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 27$

$y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$