



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
- 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
- $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

• 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

задача 1
 $A, B, C \in \mathbb{N}$

$$|A|=4 \quad \text{из орт. плоск.}$$

$$|B|=3 \quad \text{хочу ли одна явн. ?}$$

$$|C|=2 \quad \text{хотя бы 1 явн. 1}$$

$$A \cdot B \cdot C = R^2 \quad \cancel{R \in \mathbb{N}}$$

значит f - это ведущая из которых составлено число R

$$A = 1111 \cdot f = 11 \cdot f \cdot 101 \quad 1 \leq f \leq 9$$

101 - простое (известные делители $1, 101, 101^2$)

$$f \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = R^2$$

чтобы такое число было квадратом то 101 должно делиться на C (что невозможно)
(поскольку $C < 101$) или число B в разложении в делит 101
значит $B: 101$

если умножим 101 на число ≥ 10 , то получим ≥ 1010 (если деление $3x$ уменьшить)

значит B имеет форму $10t$ из: $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$
но уменьшить подходит только 404

$$B = 404$$

$$(101)^2 \cdot f \cdot 11 \cdot 4 \cdot C = R^2$$

чтобы число было квадратом все простые числа должны быть в степени четверок

$$1 \leq f \leq 9 \quad \text{и поэтому в разложении } f \text{ можно будет 11}$$

значит в разложении C делит 11

делит дважды пятичленные числа: $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$

(если умножить на 101 то будет еще не квадрат)

$$C = 11$$

$$(101)^2 \cdot (11)^2 \cdot f \cdot 4 = R^2 \quad \text{тогда } f = 4 \cdot t^2, t \in \mathbb{N}$$

с учетом $61 \leq f \leq 9$ получим только $t=1$

$$f = 4$$

$$\text{значит: } A = 4777; B = 404; C = 11$$

Ответ: подходит только одна форма (A, B, C) это

$$(4777; 404; 11)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1^{(y+4)}}{x^{-4}} + \frac{1^{(x-4)}}{y^{+4}} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\text{ищем бивозможные } M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$x \neq 4$
иначе правого
не существует

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3)(x-4)(y+4) = (x+y+3) \cdot xy \quad (\because (x+y+3) \neq 0)$$

$$(x-4)(y+4) = xy$$

$$xy - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$-4y + 4x = 16$$

$$x - y = 4$$

$$\therefore y = x - 4 \quad > 0 \quad x > 4$$

$$\frac{2x-1}{x(x-4)} = \frac{2x-1}{(x-4)x}$$

$$x^3 - y^3 = \cancel{(x-y)}(x^2 + xy + y^2) \\ = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

$$M = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = \\ = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = 4 \cdot (x-y)^2 = \\ = 4 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

Ответ: единственное значение $M = 64$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

a) $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

замена $\pi x = d$

$$\pi y = \beta$$

$$(\sin \beta - \sin d) \sin \beta = (\cos \beta + \cos d) \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \sin d \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos d \cos \beta$$

$$-\sin d \sin \beta - \cos d \cos \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

$$-\cos(d - \beta) = \cos 2\beta$$

$$\cos 2\beta + \cos(d - \beta) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{2\beta + (d - \beta)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\beta - (d - \beta)}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{d + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\beta - d}{2}\right) = 0 \quad (\text{все члены делются } \neq 0)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta + d}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\beta - d}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta + d = \cancel{\pi} \cancel{k} \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3\beta - d = \cancel{\pi} \cancel{k} \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

получаем x, y :

$$\begin{cases} \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k \\ 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3y - x = 1 + 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

м.н. все члены делются π получим систему чисел между собой
имеет x, y , то одно из чисел может быть любым

~~две~~ есть 2 метода:

1 метод

$$\begin{cases} y - \text{метод} \\ x = (1-y) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 метод:

$$\begin{cases} y - \text{метод} \\ x = (3y-1) + 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} y - \text{метод} \\ x = (1-y) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y - \text{метод} \\ x = (3y-1) + 2n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Д)

Задано что

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{4} = \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$-\arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\pi \quad (\cdot (-1))$$

$$\arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{4} + \arcsin \frac{y}{4} \neq \pi$$

①

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 4 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

из всех пар не удовлетворяют этому неравенству только одна

задано что $|t| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 4$ (7; 4)

$$|\frac{y}{4}| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 4$$

найдем y и выпишем подходящие x :

$$y = -4 \quad x \in \{5; 7; 3; 1; -1; -3; -5; -7\}$$

$$y = -3 \quad x \in \{4; 6; 2; 0; -2; -4; -6\}$$

$$y = -2 \quad x \in \{3; 5; 3; 1; -1; -3; -5; -3\}$$

$$y = -1 \quad x \in \{2; 4; 6; 0; -2; -4; -6\}$$

$$y = 0 \quad x \in \{1; 3; 5; 3; -1; -3; -5; -3\}$$

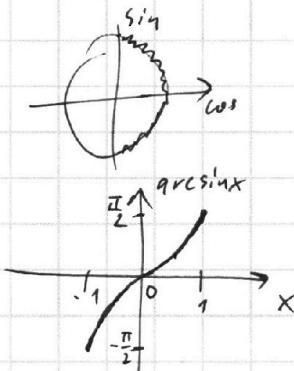
$$y = 1 \quad x \in \{0; 2; 4; 6; -2; -4; -6\}$$

$$y = 2 \quad x \in \{-1; 1; 3; 5; 3; -3; -5; -3\}$$

$$y = 3 \quad x \in \{-2; 0; 2; 4; 6; -4; -6\}$$

$$y = 4 \quad x \in \{-3; -5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$8+7+8+7+8+4+4=67$$



арcsint принимает
значения $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Решим пару $(x, y) \in y = -4$

7 им

8 им

7 им

8 им

7 им

8 им

7 им

7 им ($\text{чтврт } x = 7$)

Ответ: единственная чётверть реш. 67 пар (x, y)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

в начале выдано φ билетов

в конце выдано $\varphi + t$ билетов $(t > 0)$ но условие $\varphi > \varphi + t$, $t, \varphi \in \mathbb{N}$

K - количество одинаковых билетов

способов

Количество выданных φ членов билетов: C_K^{φ} ; из этих выданных билетов может нам подходит только C_{K-2}^{2} ($\text{Лена} + \text{Вася} + 2$ еще один билет из оставшихся $K-2$)

$$\frac{1}{P_1} = \frac{C_K^{\varphi}}{C_{K-2}^2} = \frac{\frac{K!}{\varphi!(K-\varphi)!}}{\frac{(K-2)!}{2!(K-\varphi)!}} = \frac{\frac{(K-2)!(K-1)\cdot K}{\varphi!}}{\frac{1(K-2)!}{2!}} ;$$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{\frac{(K-1)K}{\varphi!}}{\frac{1}{2!}} = \frac{2! \cdot (K-1)K}{\varphi!} = \frac{(K-1)K}{\varphi \cdot 3} \quad \begin{array}{l} \text{Рассмотрим} \\ \text{что Лена и Вася} \\ \text{одновременно оба} \\ \text{получат один билет} \end{array}$$

$$P_1 = \frac{12}{(K-1)K}$$

$$\begin{array}{l} \text{Количество способов выдать } \varphi+4 \text{ членов на билеты: } C_K^{\varphi+4} = C_K^{\varphi} \\ \text{из этих трех способов нам подходит только } C_{K-2}^{4-2} = C_{K-2}^{2} \quad (\text{Лена} + \text{Вася} + 2 \\ \text{еще один билет из оставшихся } K-2) \\ P_2 = \frac{C_{K-2}^{2}}{C_K^{\varphi}} = \frac{\frac{(K-2)!}{(\varphi-2)!(K-\varphi)!}}{\frac{K!}{\varphi!(K-\varphi)!}} = \frac{\frac{(K-2)!}{(\varphi-2)!}}{\frac{K \cdot (K-1)(K-2)!}{\varphi \cdot (\varphi-1)(\varphi-2)!}} ; \end{array}$$

$$P_2 = \frac{\frac{1}{K \cdot (K-1)}}{\frac{1}{\varphi \cdot (\varphi-1)}} = \frac{\varphi \cdot (\varphi-1)}{K \cdot (K-1)}$$

$$\text{по условию } 11 \cdot P_1 = P_2$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 13 \\ \hline 29 \\ 23 \\ \hline 329 \end{array}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 11 \cdot 12 = 529 = 23^2$$

$$\frac{11 \cdot 12}{(K-1)K} = \frac{\varphi(\varphi-1)}{K \cdot (K-1)} ; \quad 11 \cdot 12 = \varphi(\varphi-1); \quad \varphi^2 - \varphi - 11 \cdot 12 = 0$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1+23}{2} = 12 \\ \varphi = \frac{1-23}{2} < 0 \text{ не подходит, т.к. } \\ \varphi \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 12$$

Ответ: в начале членов было выдано 12 билетов (то есть на 8 больше, чем в начале)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

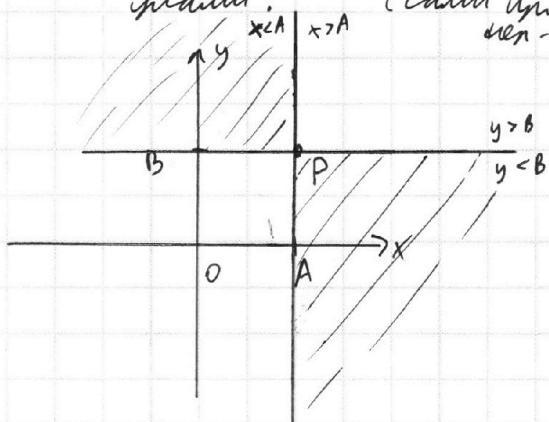
$$A = -4 \sin \alpha$$

$$B = 4 \cos \alpha$$

$$\begin{cases} (x-A)(y-B) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

2-й. задает круг (свойства и методы ~~решения~~ решения вспомогательных задач)
(считаем $(0;0)$ и $R=6$)

1-й. задает полосу, ограниченную двумя верт. прям.:
(сами прямые $y=B$ и $x=A$ тоже подлежат подсчету)



предметы пересекаются под прямым углом ($y=B$ параллельна Ox)
($y=x=A$ параллельны Oy)

нашлось место пересечения этих прямых $P(A; B)$

нужно заполнить следующими условиями:

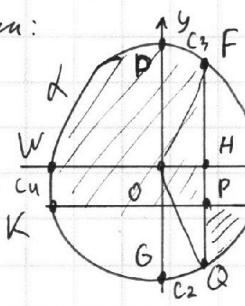
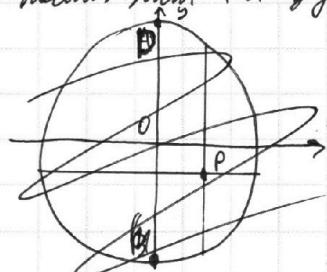
они же a, b, c, d обозначены на рисунке
дуги α, φ такие

$$19 = a + b + c + d + \alpha + \varphi$$

1
длин дуг

запомнили что овалы
вид образуют полукруж
а ис образуют полукруж
значит $b+d \leq 2R$; $a+c \leq 2R$

поменяли на дуги:



α - дуга, начертанная отрезком KPF
 φ - дуга, начертанная отрезком QS
 C_1 - начертанная дуга TPS
 C_2 - ... GPK
 C_3 - ... RHF
 C_4 - ... WOK



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

напишите один член задачи на лист.

$$OH \perp FH \text{ т.к. } \text{член задачи } x = A \parallel OG$$

проверим $\angle FOH = \angle OQH$. Это будет $\angle FOH = \angle OQ = R$

и т.к. OH в нем является ее основанием, то по в. п/з Δ это еще и биссектриса

$$\angle FOH = \angle QOH < \angle GOH$$

$$\text{т.к. } \angle DOH = 90^\circ = \angle GOH$$

$$\text{т.к. } \angle QOG = \angle DOF$$

т.к. C_3 и C_2 можно выразить через гипотенузные углы $\angle QOB = \angle DOF$
 $C_2 = R \cdot \angle GOA$

так как $C_3 = R \cdot \angle DOF$ а эти углы равны, то синус этих углов равны

$$\text{значит } \frac{C}{\sin \angle QOS} = C_1$$

или напоминающие признаки $DB \parallel FQ$ определяют равенство $C_2 = C_3$,
 $\dots KS \parallel WT$ определяют равенство $C_4 = C_5$,

$$\text{значит } \frac{C}{\sin \angle QOS} = C = \sqrt{WOD} + C_4 + C_3$$

$$\begin{aligned} C + \varphi &= \sqrt{WOD} + C_4 + C_3 = \sqrt{WOD} + C_2 + C_1 = \sqrt{WOD} + \sqrt{GOT} = \\ &= \frac{1}{2}(2\pi R) = \pi R \end{aligned}$$

$$\varphi + d = 6\pi$$

$\varphi + d$ это равно полевина радиуса

окружности

мы будем не использовать исходящими т.к. хотим,

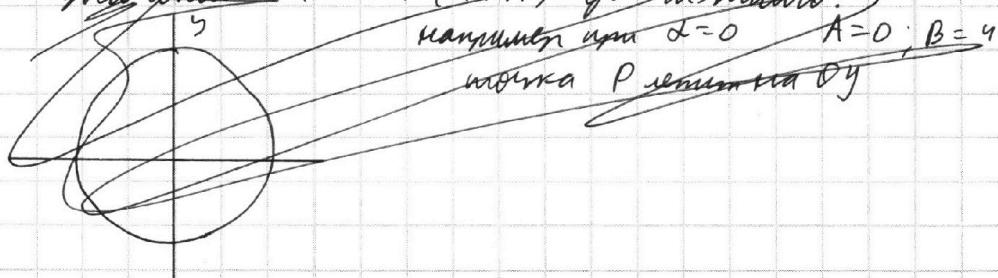
$\varphi + d = \pi R$ вспять (когда Р вспять идет, а Р вспять идет в этой задаче, потому дальше)

$$M = a + b + c + d + \varphi + d \in \pi R + 4R$$

* заслужение $M = R(\pi + 4)$ лучше просто

напишет вам $\varphi = 0 \quad A = 0, B = 4$

тогда Р лежит на ОУ



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

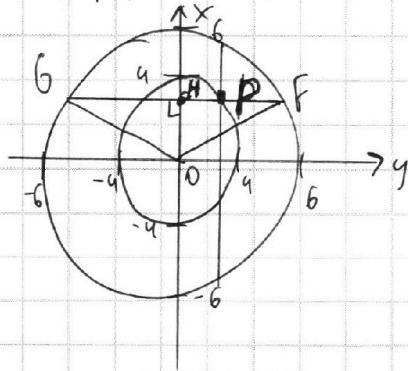
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A^2 + B^2 = 16 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 16 = 4^2$$

потому что R касается обеих окружностей с центрами $(0, 0)$ и $R = 4$



таким образом:

$$OH = B$$

$$GO = R = 6$$

$$GH = \sqrt{6^2 - OH^2} = \sqrt{36 - B^2}$$

$$HF = \sqrt{36 - B^2}$$

$$a+c = 2\sqrt{36-B^2}$$

аналогично

$$b+d = 2\sqrt{36-A^2}$$

$$A^2 = 16 - B^2$$

$$= 2\sqrt{36 - (16 - B^2)} = 2\sqrt{20 + B^2}$$

$$a+b+c+d = 2 \left(\sqrt{36-B^2} + \sqrt{20+B^2} \right) = f(B)$$

$$f'(B) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{36-B^2}} \cdot (0-2B) + \frac{1}{2\sqrt{20+B^2}} \cdot (0+2B) \right) =$$

$$= -\frac{2B}{\sqrt{36-B^2}} + \frac{2B}{\sqrt{20+B^2}} = 2B \left(\frac{1}{\sqrt{20}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{7} > -\frac{\pi}{2}$$

чертежик

найди $\delta x, y$:

$$\begin{cases} \pi y + \pi x = \pi + 2\pi k \\ 3\pi y - \pi x = \pi + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3y - x = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arccos -\arcsin \frac{y}{7} > -\frac{\pi}{2}$$

здесь: м.к. область определения функции ограничена:

$$|\frac{x}{7}| \leq 1 \quad |x| \leq 7, \text{ и } x-\text{число есть 15 вариантов}$$

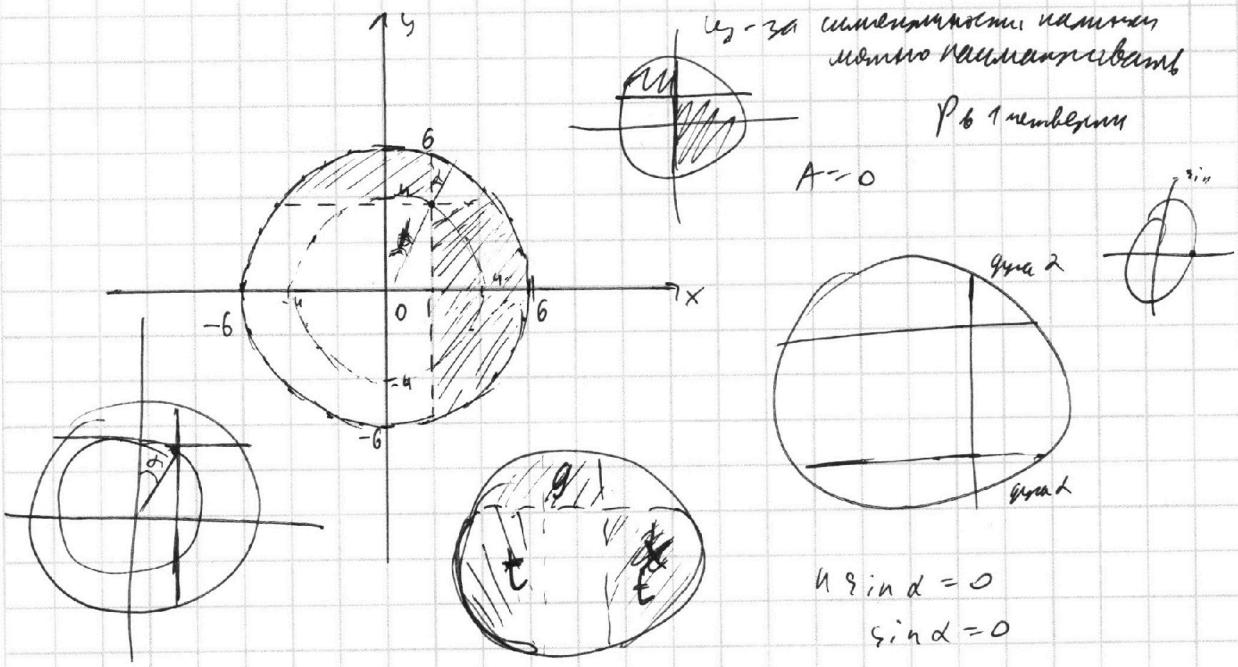
$$|\frac{y}{7}| \leq 1 \quad |y| \leq 7$$

1) y -множ
 $x = (1-y) + 2k$
в-число

2) y -множ
 $x = (3y-1) - 2n$
н-число

By ненулевым y и запишем те скажи, касательные y_0 . $|x| \leq 7$

$$y = -4 \quad x = \{5; 7; 3; 1; 0; -1; -3; -5; -7\}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

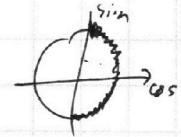
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

запомнили что

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

чертежами



\arccos

$$\arccos \frac{x}{r} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{r}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{r} - \arcsin \frac{y}{r} > -\frac{\pi}{2}$$

$$-\arcsin \frac{x}{r} - \arcsin \frac{y}{r} > -\pi$$

$$\arcsin \frac{x}{r} + \arcsin \frac{y}{r} < \pi$$

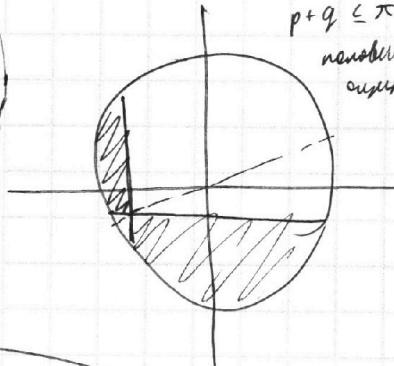
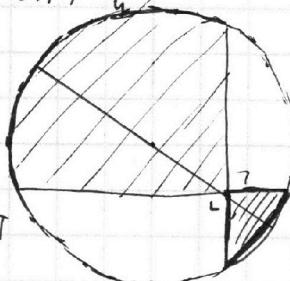


$$\arcsin \frac{x}{r} + \arcsin \frac{y}{r} \neq \pi$$

$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{r} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{r} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{r} \neq 1 \\ \frac{y}{r} \neq 1 \end{cases}$$

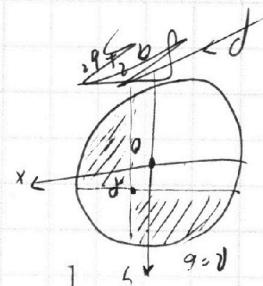
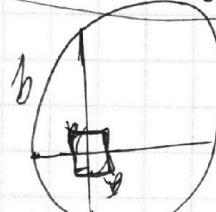
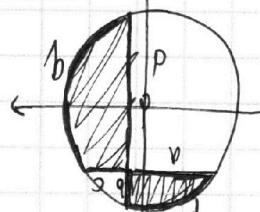
$$\begin{cases} x \neq r \\ y \neq r \end{cases}$$



последнее на окн. рабочем

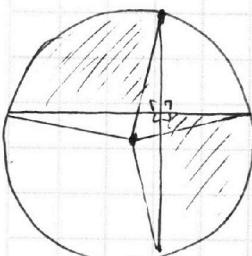
$$A^2 + B^2 = 16 \cdot 4^2 \alpha + 16 \cdot 4^2 \beta = 16$$

$$\begin{aligned} a+c &\leq 2R \\ b+d &\leq 2R \\ \text{последнее на окн. рабочем} \\ P(A \cup B) &= \end{aligned}$$



последнее на окн. рабочем

последнее на окн. рабочем



сумма угловых единиц

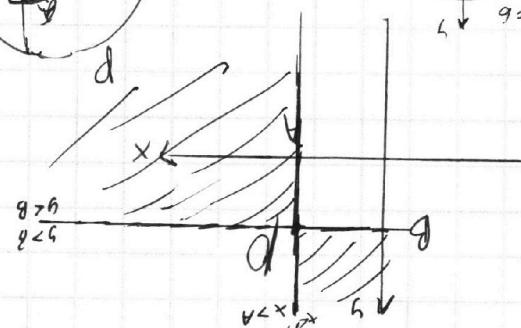
$$\text{угол с вершиной } (0,0) \text{ и } R = 6$$

$$A = -4 \sin \alpha$$

$$B = 4 \cos \alpha$$

$$C = (A - B)(A + B)$$

9π



задача



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos A + \cos B = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{cases}$$

$$2\alpha = A + B$$

$$2\beta = A - B$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) = 0$$

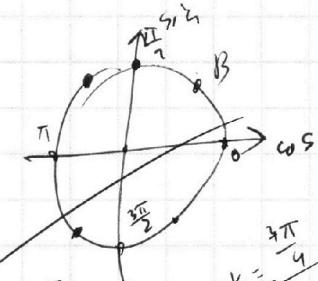
$$\begin{cases} A+B=2\pi k \\ A-B=2\pi k \end{cases}$$

$$A = -B + 2\pi k$$

$$A = B + 2\pi k$$

остановка места

$$\alpha + \beta = (A - B) = 2k\pi$$



$$\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad A = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{11\pi}{6}$$

$$\cos A + \cos B = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

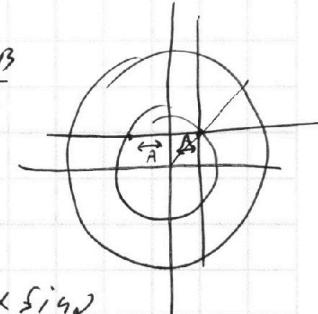
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta = 0$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 0$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} A+B=2\pi k \\ A-B=2\pi k \end{cases}$$

$$A+B=\pi+2\pi k$$

$$A-B=\pi+2\pi k$$

$$\delta + \gamma = 15$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 2 \\ \hline 30 \end{array} = 60$$

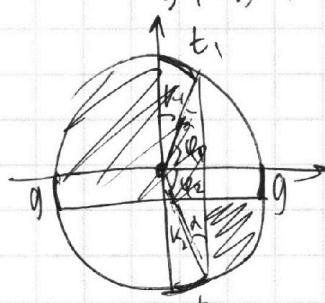
$$3 \cdot (-4) - 7 = -13$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -7 \\ \hline 3 \end{array}$$

каким образом можно выразить πR через γ ?

известно, что $\pi/6$ значит сколько единиц имеет.

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 \quad \kappa_1 = \kappa_2 \rightarrow t_1 = t_2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$x, y \in \mathbb{R}$

чертежик

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\pi x = \alpha$$

$$\pi y = \beta$$

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$-\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta$$

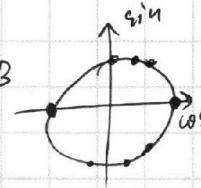
$$\sin(\alpha - \beta) = ?$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$-\cos(\alpha - \beta) = \cos 2\beta = x$$

$$\left\{ 2\beta = \pm \arccos(x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$



$$\cos 2\beta + \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$2\beta - (\alpha - \beta) = 3\beta - \alpha$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{2\beta + \alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\beta - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$2 \cos\left(\frac{2\beta + \alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\beta - (\alpha - \beta)}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0$$

1) $\alpha - \text{недей}$

$$\beta = (\pi - \alpha) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2) $\alpha - \text{недей}$

$$3\beta = \pi + \alpha + 2\pi n$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta + \alpha = \pi + 2\pi k \\ 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi + \alpha + 2\pi n}{3}$$