



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a$, где a — некоторая цифра, из которой состоит A .

Значит $A:1111$ $1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow \begin{cases} A:101 \\ A:11 \end{cases}$

101 и 11 — простые. Т.е. если $ABC = x^2$, то

$BC:101$, но C — двузначное $\Rightarrow C:101 \Rightarrow B:101$.

Но одна из цифр B это $7 \Rightarrow B = 707$.

Теперь, заметим, что $AB \parallel 11^1$, т.к. $A:11$

$B:11$, а $A = 11 \cdot 101 \cdot a$, где $101a:11$. Т.е. $C:11$,

т.к. 11 в ABC должно входить в четной степени. Также мы знаем, что $B \parallel 7^1$,

значит $AC:7$. Рассмотрим случаи

1) $A:7 \Rightarrow A = 7777 \Rightarrow AB = 7^2 \cdot 101^2 \cdot 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 11 \cdot v^2$ т.к. ABC — квадрат. но $v^2 \leq 9$, т.к. $C \leq 99$.

Вариантов для v^2 всего 3: $1, 4, 9$, но только в случае $v^2 = 1$ в C присутствует цифра 1. Итого мы получили тройку;

$(A, B, C) = (7777, 707, 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $C:7$ и при это в записи C есть 1, т.е. где C есть 3 варианта: 14, 21, 91. Рассмотрим каждый отдельно:

1. $C=14 \Rightarrow A:2$ ~~(невозможно)~~ в нечетной степени, т.е. либо $A \parallel 2$, либо $A \parallel 8 \Rightarrow$ мы получаем тройки (A, B, C) : $(8888, 707, 14)$; $(2222, 707, 14)$

2. $C=21 \Rightarrow A:3$ в нечетной степени $\Rightarrow$ ~~невозможно~~
 $A:3$ (т.е. $A=111a$, где a — цифра) $\Rightarrow$
есть тройка $(3333, 707, 21)$

3. $C=91 \Rightarrow A:13$ в нечетной степени, что невозможно, т.е. $A=111a$, где a — цифра $\Rightarrow$
 $\Rightarrow a < 10 \Rightarrow A:13$.

Итого мы нашли все тройки, удовлетворяющие условию: $(7777, 707, 11)$; $(8888, 707, 14)$; $(2222, 707, 14)$; $(3333, 707, 21)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем, каково:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

|| ~~Анализ~~ ||

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$x+y+3 > 0 \Rightarrow$ можно сократить

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow xy = (x-4)(y+4)$$

||

$$4x = 4y + 16$$
$$x = y + 4$$

Итак, $x = y + 4$, тогда:

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y^2 - 48y =$$
$$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

Итого, $M = 64$.

Отв.: $M = 64$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - кол-во 11-классников, x - кол-во
бизнесменов, выделенных в конце месяца,
тогда ~~тогда~~ p_1 (вероятность попасть
в начале) была $\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4}$ (добавим 2-х
человек к Деме и Васе и делим на кол-во способов
выбрать 4-х), а p_2 (вероятность попасть
в конце) $\frac{C_{a-2}^{x-2}}{C_a^x}$ и мы знаем, что;

$$\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} \cdot 11 = \frac{C_{a-2}^{x-2}}{C_a^x}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{a(a-1)} = \frac{(a-2)! \cdot x! \cdot (a-x)!}{a! \cdot (x-2)! \cdot (a-x)!} = \frac{x(x-1)}{a(a-1)}$$

11) $\frac{12 \cdot 11}{a(a-1)} = \frac{x(x-1)}{a(a-1)} \Rightarrow 12 \cdot 11 = x(x-1)$, заметим,
что $x > 4$, при этом производная $(x(x-1))' = 2x-1$
 $\Rightarrow$ при $x > 4$ $x(x-1)$ строго
возрастает $\Rightarrow$ ≤ 1 раз сможет пересечь
 $y = 12 \cdot 11$. При $x = 12$ получаем равенство $\Rightarrow$ это
единственный случай. Ответ: $x = 12$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

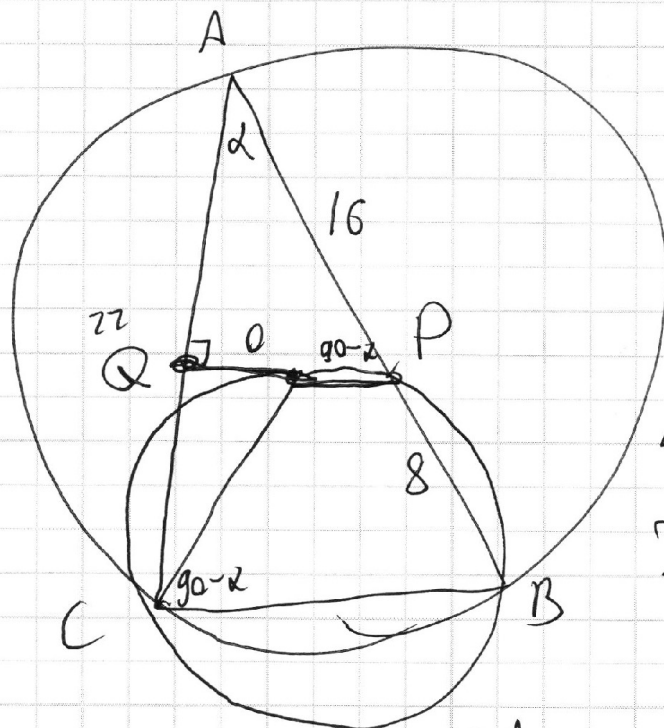
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $\angle CAB = \alpha$.
 Тогда $\angle COB = 2\alpha$,
 т.к. $\triangle COB$ - равнобедр.
 $\angle OBC = \angle OCB = 90 - \alpha$.
 $\angle ACB = 90 - \alpha$.

т.к. $COPB$ - впис.,

значит $\angle OPQ = \angle OCB = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если провести PQ до пересечения с AC (точка Q), то $\angle AQP = 90$. Заметим, что Q - середина AC , т.к. если Q - пересечение перпендикуляров, то он пройдет через центр опис. окр. $\Rightarrow AQ = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{16^2 - 11^2} = \sqrt{135} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{135}}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{22 \cdot 22 \cdot \frac{\sqrt{135}}{16}}{2} = \frac{3 \cdot 11 \cdot \sqrt{135}}{2} = 16,5 \cdot \sqrt{135} = 3 \cdot 16,5 \cdot \sqrt{15} = 49,5 \cdot \sqrt{15}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

#1: $\angle COB$ — центральный для вписанного $\angle CAB$

#2: $CO = OB$, т.к. это радиусы $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$, а их сумма равна,
 $180 - \angle COB = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = 90 - \alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☒

7

☐

СТРАНИЦА

2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~тогда~~ ~~и~~ границу $\varphi(\alpha)$ можно условно разбить на 2 части: та, что проходит по окружности и та, что проходит по прямому $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$. Заметим, что проведенное прямое $\perp \Rightarrow$ эти делят окр. на 4 дуги такие, что ~~прямо~~ суммарно противоположных равны $\Rightarrow \Rightarrow$ та часть окружности, ~~по~~ по которой проходит граница $\varphi(\alpha)$ — это $\frac{1}{2}$ ~~во~~ длины всей окружности, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6 = 6\pi$.



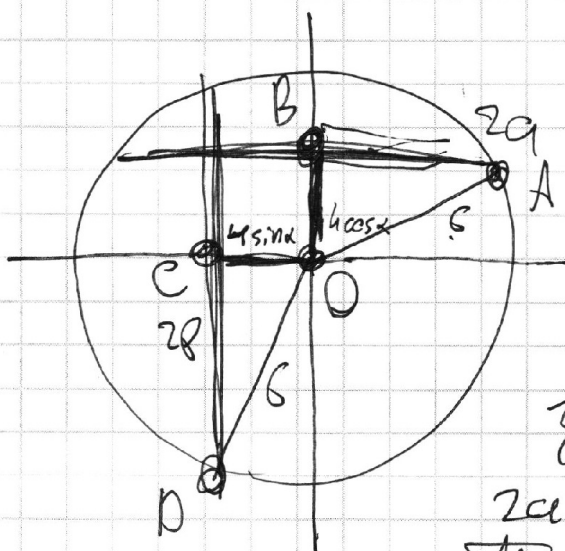
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Теперь, рассмотрим
вторую часть
урава по обобщению
длины радиуса,
заключенного в окруж.
используем найденные max (2a+2b)
2a и 2b, как показано

на рисунке. Тогда рассмотрим
прямоугольный $\triangle AOB$, по т. Пифагора

$$a^2 + 16\cos^2 \alpha = 36$$

$$b^2 + 16\sin^2 \alpha = 36 \quad (\text{по т. Пифагора для } \triangle COB)$$

сложим и найдем

$$a^2 + b^2 + 16(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 72$$

"

$$a^2 + b^2 = 56$$

Заметим, что $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow 56 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \leq 4\sqrt{7} \Rightarrow 2a+2b \leq 8\sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Этот максимум достигается только, когда $a=b$, т.е. равенство в неравенстве Коши, которое выполняется $(a^2+b^2 \geq 2ab$, или же $2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$), достигается только когда все слагаемые равны. Но $a = \sqrt{36-16\cos^2\alpha}$, а $b = \sqrt{36-16\sin^2\alpha}$

$$b = \sqrt{36-16\sin^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{36-16\cos^2\alpha} = \sqrt{36-16\sin^2\alpha}$$

$$\textcircled{11} \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\textcircled{12} \cos\alpha = \pm \sin\alpha$$

$$\textcircled{13} |\cos\alpha| = |\sin\alpha|$$

$$1 = \sqrt{2\cos^2\alpha} \Rightarrow |\cos\alpha| = |\sin\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$ при таких α только один ответ и достигается максимум



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

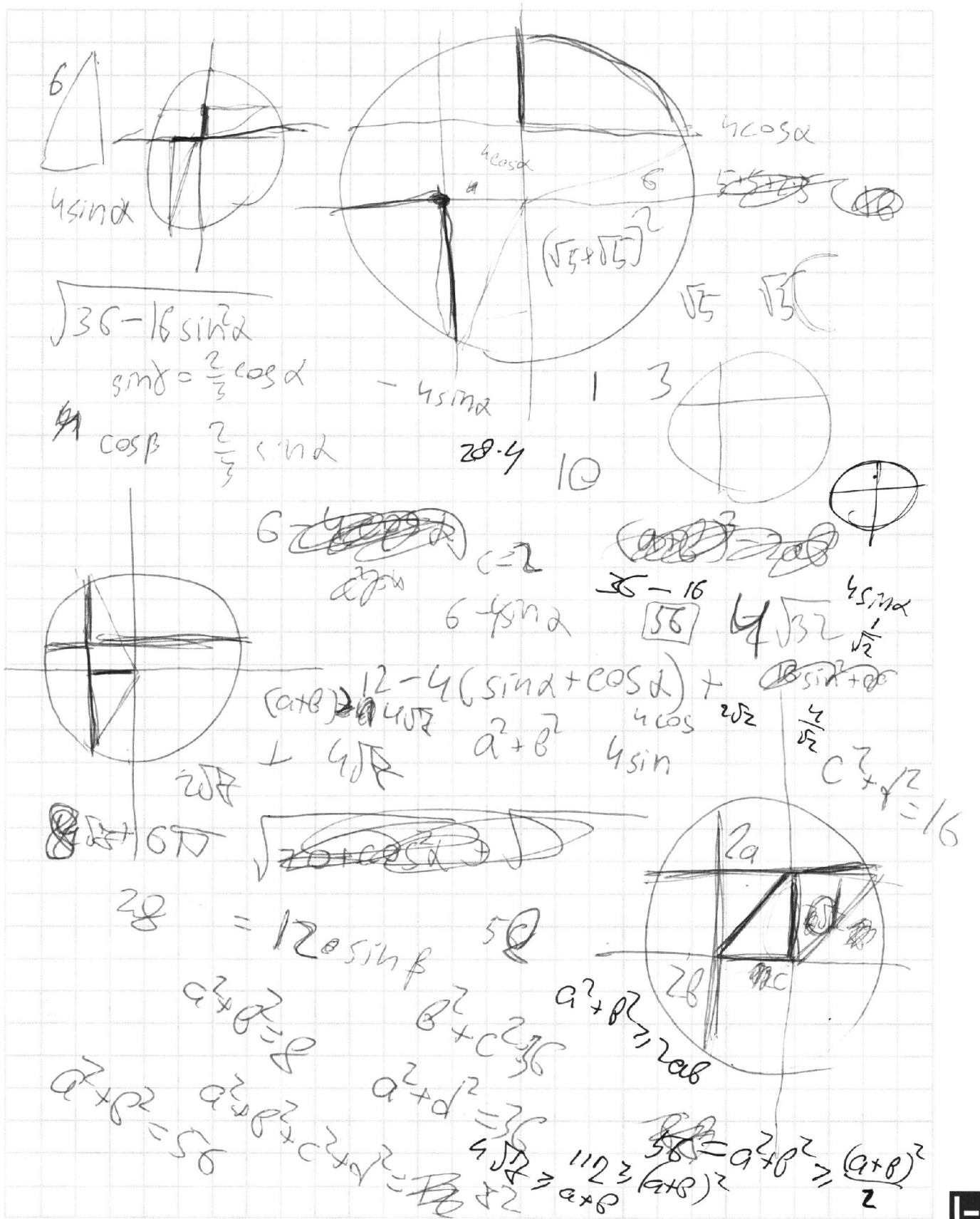
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и равен $8\pi + 8\sqrt{2}$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$4(2y^2+4y+16)-12(y^2+4y)$$

$$(y+4)^3-y^3-12xy$$

$$y \quad y+4$$

$$8y^2+16y+64-12y^2-48y$$

$$-4y^2-32y+64$$

$$-4(y^2+8y-16)$$

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$xy-4y+4x-16 = xy$$
$$4 = x-y$$

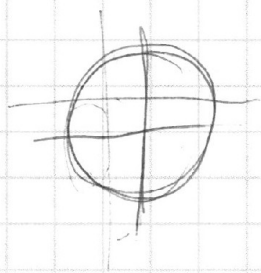


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(y+4)^3 - y^3 - 12y^2 - 48y$$

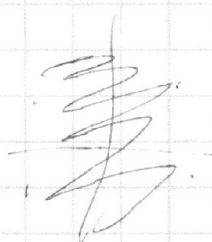
$$y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$

$$\cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$y > 4 \cos x$$

$$x > 4 \sin y$$



$$\cos 2\pi y = \cos(\pi(y-x))$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi(y-x))$$

$$\pi - 2\pi y = \pi y + \pi x$$

$$x + y = 1$$

а.

$$x=12$$

~~12-11~~

$$12-11 = x(x-1)$$

$$\frac{x(x-1)}{a(a-1)}$$

$$\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} \cdot 1/1 = \frac{C_{a-2}^{x-2}}{C_a^x}$$

$$\frac{12 \cdot 11}{a(a-1)} = \frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!} \cdot \frac{x!(a-x)!}{a!}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

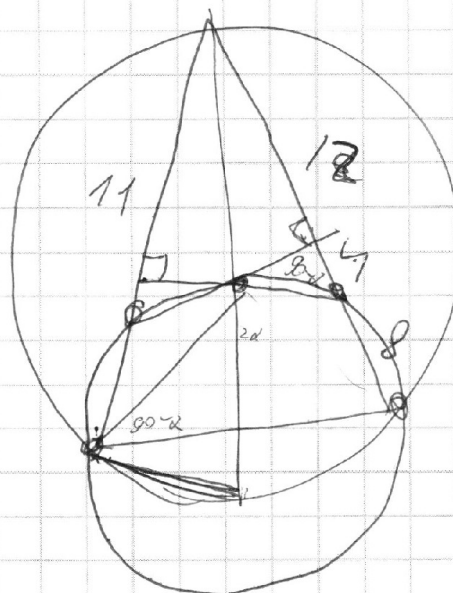
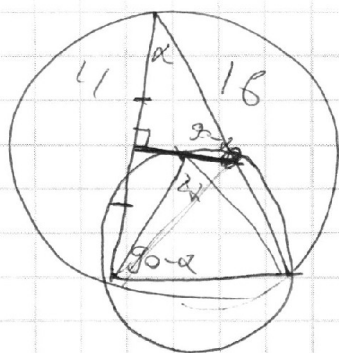
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 121 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$240/6$$

$$\frac{\Gamma + X}{2}$$

$$\Gamma(2\Gamma + X)$$



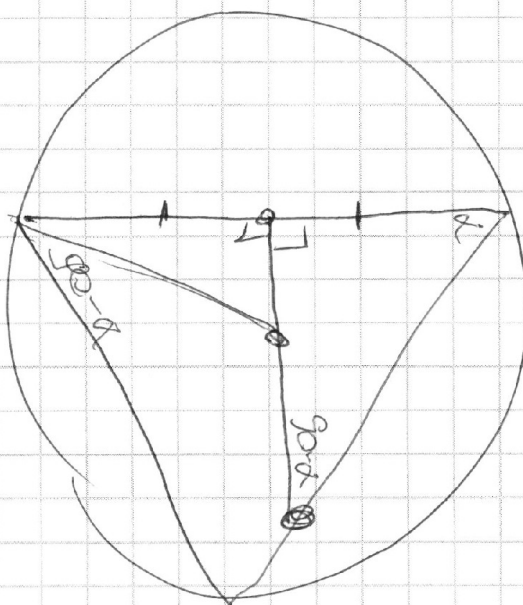


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

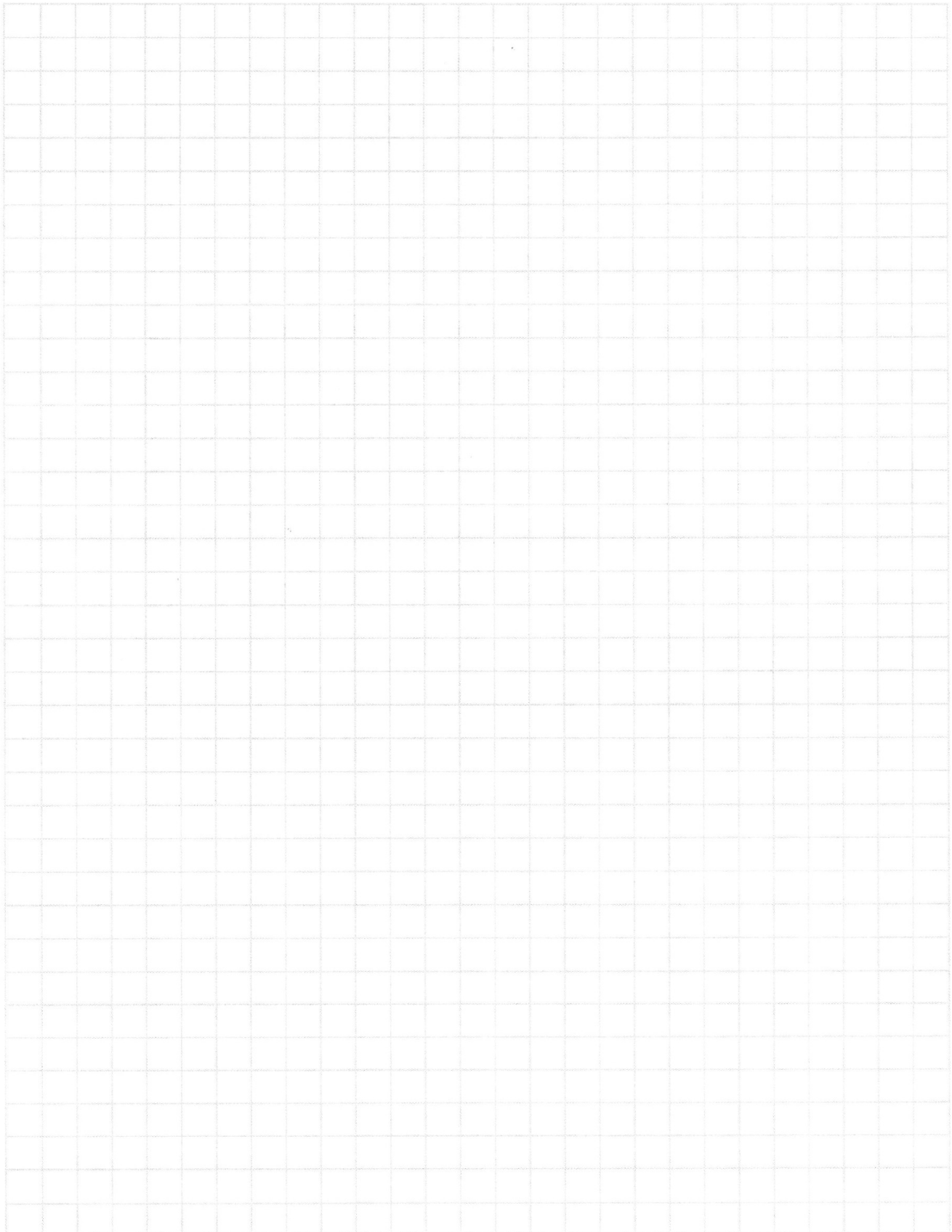
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

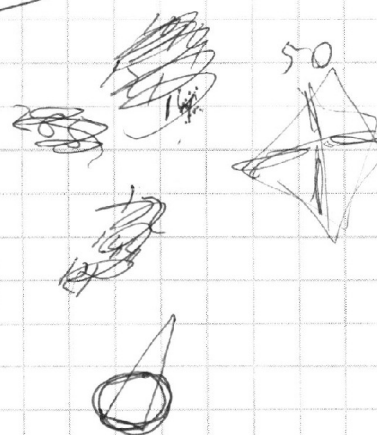
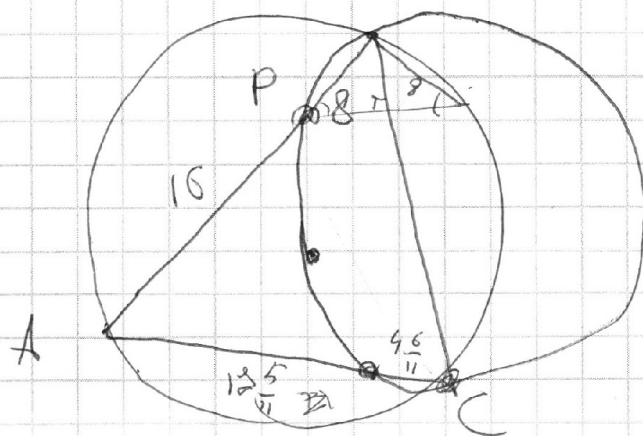
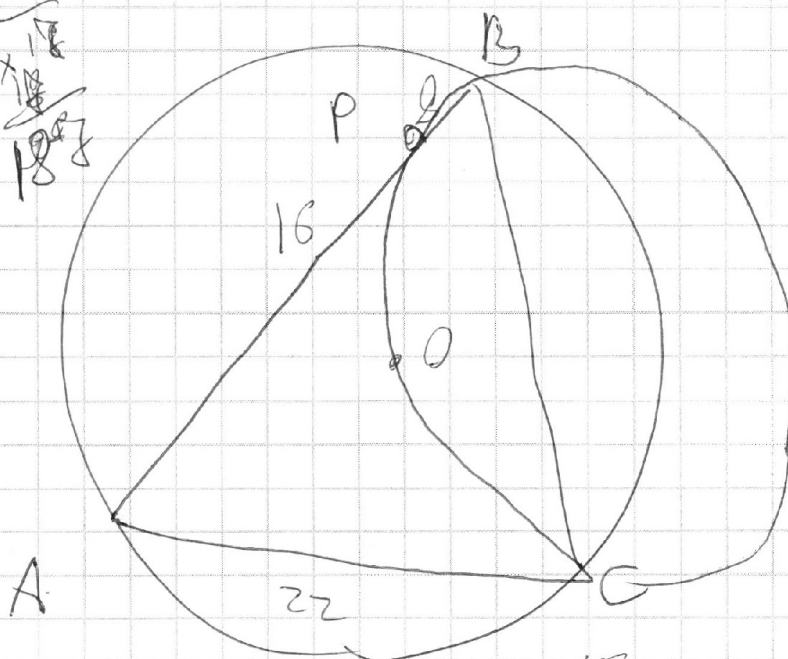
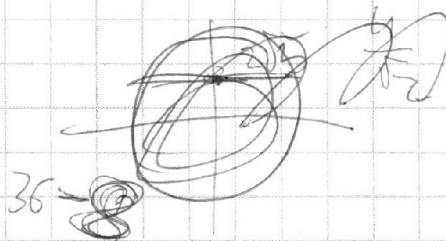
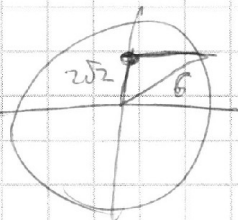
$$\frac{8}{16 \cdot 24} = \frac{11}{22} \cdot X$$

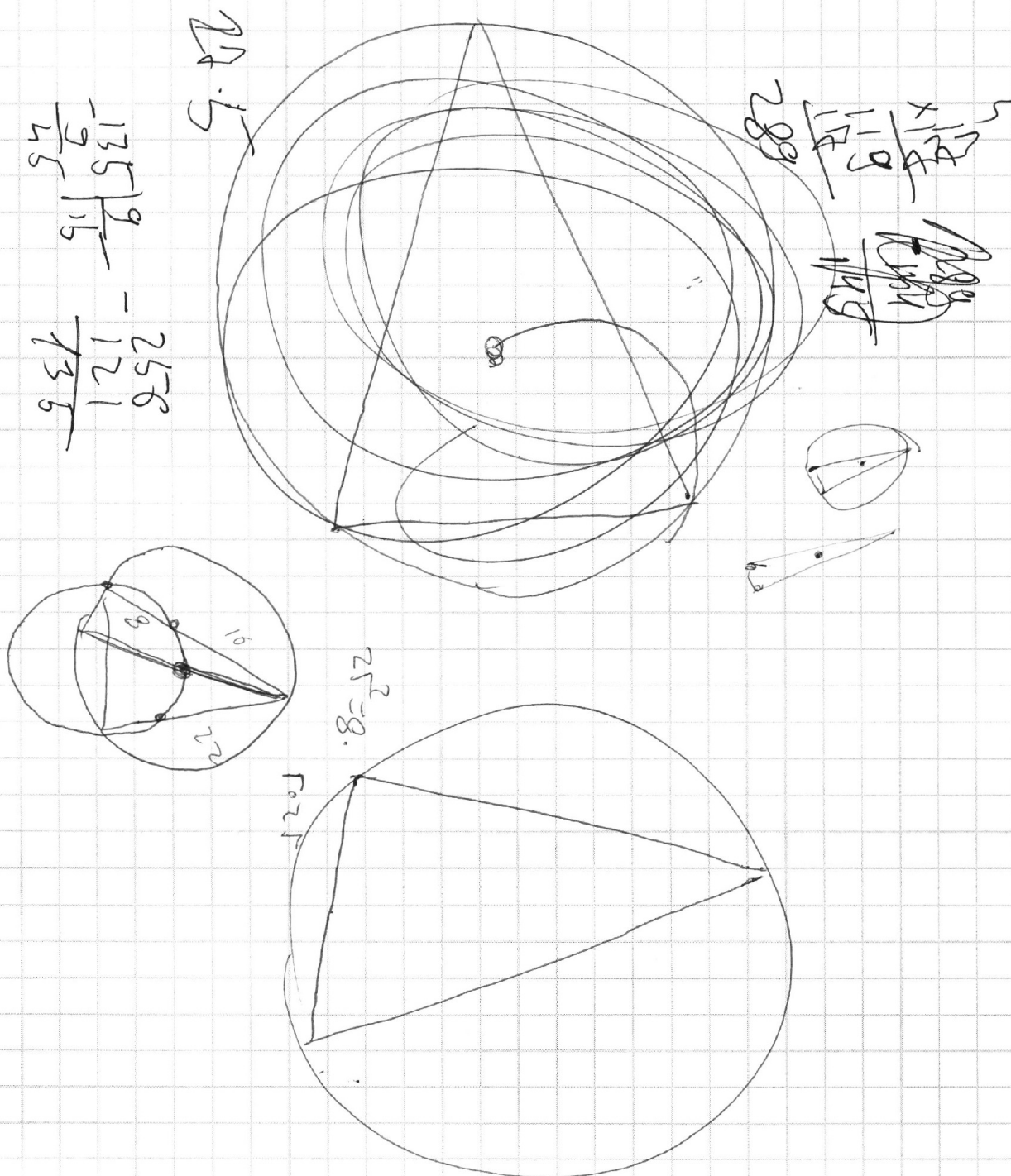
~~108~~

$$\frac{8 \cdot 24}{11} = \frac{18}{11} \cdot X$$

$$\frac{192}{11} = X$$

$$12 \frac{5}{11}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

