



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

усл 3

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Число A представляется в таком виде

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 101 \cdot 4a \cdot a, \quad a - \text{цифра.}$$

Так. $A \cdot B \cdot C = x^2$ и число $A: 101$ $\sqrt{101}$ и $x^2: 101$,
то есть $x^2: 101^2$, т.к. 101 - это простое,

если бы в разложении числа x на простые
не оказалось 101, то и в x^2 это тоже не оказалось
тогда $x: 101 \Rightarrow x^2: 101$

Среди чисел A, B, C только B может делиться

$$\text{на } 101, \text{ т.к. } A = 101 \cdot 4a \sqrt{101^2} \Rightarrow 4a \sqrt{101}$$

$$0 < a \leq 9, \quad a \nmid 101$$

$$C \leq 99, \quad \text{значит } C \leq 1 \cdot 101, \quad \text{то есть } 101 \nmid C$$

Тогда $B: 101$, если бы $B \nmid 101$, то $x^2 \nmid 101^2$,

$$\text{Тогда } B = 101 \cdot x, \quad 0 < x \leq 9, \quad \text{при } x \geq 10 \Rightarrow B > 101 \cdot 10 > 1010 > 999$$

$$\text{но } B \leq 999$$

Тогда B может делиться только таким образом

$B = \cancel{x} \overline{101x}$, где x - цифра, но B должно содержать цифру
семерку, тогда $B = 707 = 7 \cdot 101$

Заметим, что $x^2: 11^2$, т.к. $A \nmid 11$, т.е. не является
делителем, что и C $\nmid 101$.

Тогда $B: 11$ - то из A, B, C делится на 11; т.к.

$$A \nmid 11^2 \Rightarrow A = 101 \cdot 11 \cdot a \nmid 11^2 \Rightarrow 101 \cdot a \nmid 11^2$$

$$a \leq 9$$

$$101 \nmid 11$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также $B \neq 11, 7, 5$ $B = 40 \Rightarrow 4 \cdot 10 = 40$

Тогда $C \leq 11 \Rightarrow C = 4 \cdot 11 \Rightarrow 44$, но Судя по
составу & 1, тогда $C = 5$

Также $y \leq 9, 7, 5$ $C \leq 99$ (находится 1 вариант).

Ответ: A Тогда $A \cdot B \cdot C = 10 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 40 = 10^2 \cdot 11^2 \cdot 5$.

Также $x^2 (1111)^2 \cdot 5a = x^2$, тогда $5a = 40$ тоже

квадрат $5a = (1111)^2$, но так как $a \leq 9$, то находится
только один вариант $a = 4$, иначе в нем бы

$a > 4$, то в нашем квадрате $5a$ ~~был~~, присутствует делитель
~~5a~~ 4 содержалось в ~~квадрате~~ квадрате.

Ответ: A = 1111

B = 707

C = 15



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+3xy}{xy} = \frac{x+3(x-4)(y+4)}{(x-4)(y+4)}$$

од3
 $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \\ y+4 \neq 0 \end{cases}$

$$(x+3xy)(x-4)(y+4) = (x+y)xy + 3xy(x-4)(y+4)$$

$$(x+3xy)(x-4)(y+4) + 3xy(x-4)(y+4) = (x+y)xy + 3xy(x-4)(y+4)$$

$$(x+3xy)(x-4)(y+4) - xy = 0$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ (x-4)(y+4)-xy=0 \end{cases}$$

$$1) x+y=0 \Rightarrow x=-y, \text{ т.к. } x \neq 0$$

кто-то из них положительной, тогда другой имеет противоположный знак, то есть отриц. но по условию $x, y > 0$, (также $x \neq 0$ и $y \neq 0$)

такое случаи надо не подходит

$$2) (x-4)(y+4) - xy = 0$$

$$ux - 4y - 16 = 0 \Rightarrow x = y+4$$

подставим:

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= (y+4-x)(y^2 + (y+4)y + y^2) - 12y(y+4) = \\ &= 4(3y^2 + 12y + 16) = 12y^2 + 48y + 64 - 12y^2 - 48y = \\ &= 64. \end{aligned}$$

Ответ: $M = 64$. результат удачное



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \alpha y - \sin \alpha x) \sin \alpha y = (\cos \alpha y + \cos \alpha x) \cos \alpha y$$

$$\sin^2 \alpha y - \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y = \cos^2 \alpha y + \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y$$

$$\sin^2 \alpha y - \cos^2 \alpha y = \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y + \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y$$

$$\begin{matrix} \\ \\ -\cos 2\alpha y \\ \parallel \end{matrix} = \cos(\alpha x - \alpha y)$$

$$\cos(\alpha x - 2\alpha y) = \cos(\alpha x - \alpha y)$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha x - 2\alpha y = \alpha x - \alpha y \\ \alpha x - 2\alpha y = -(\alpha x - \alpha y) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 2y = x - y \\ 1 - 2y = y - x \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = x + y \\ 1 = 3y - x \end{array} \right]$$

$$f) \arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

~~х~~ ~~у~~

$$1) \text{Нулю } x+y=1 \Rightarrow y=1-x$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} 4 \geq x \geq -4 \\ 4 \geq 1-x \geq -4 \\ 5 \geq x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3, 5] \quad \text{также но гипотеза } x \in \mathbb{Z}.$$

Однозначно
 $\begin{cases} 1 \geq \frac{x}{4} \geq -1 \\ 1 \geq \frac{y}{4} \geq -1 \\ 4 \geq x \geq -4 \\ 4 \geq y \geq -4 \end{cases}$

$$\arccos \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \arcsin \frac{x}{4}; \quad \arcsin \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Нулю } \arccos \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{если } \arccos \frac{x}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Тогда } \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > 0$$

$$\text{Если } \arcsin \frac{x}{4} < 0 \text{ или } \arccos \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \geq 0$$

Если $\arcsin \frac{x}{4} < 0$ то $x < 0$.

$$\arcsin \frac{1-x}{4} > 0, \text{ тогда } \arcsin \frac{x}{4} \leq \pi$$

тогда $x > 0$
избыточно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \text{ Then } Tenepe \quad (= 3y - x \Rightarrow x = 3y - 1)$$

$$\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{3y-1}{4} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \arccos \frac{3y-1}{4} + \frac{\pi}{2} \geq 1) \arcsin \frac{y}{4} &< \frac{\pi}{2} \\ 2) 2\pi - \arcsin \frac{3y-1}{4} \end{aligned}$$

$$\arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$$

$$\frac{3y-1}{4} > \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{(2y-1)-4y}{28} > 0 \quad \frac{5y-1}{28} > 0$$

$$y > \frac{1}{5}$$

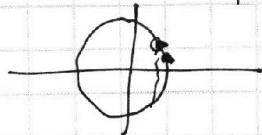
$$y \geq 2 \quad y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } y=2 \text{ то } x=5$$

Если $y=3$, то $x=10$, под тока $\arccos \frac{10}{4}$ - не существует

то есть $y \leq 3$ Проверим пару $(5, 2)$

$$\arccos \frac{5}{4} - \arcsin \frac{2}{4} > -\frac{\pi}{2}$$



Изображено.

$$2) 2\pi - \arcsin$$

Чертеж $\theta(x, y) = (1, 0) = (0, 1) = (5, 2)$

$$2) 2\pi - \arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

2, 5 л $\arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4}$
 ~~$\arcsin \frac{3y-1}{4} - \arcsin \frac{y}{4} < 0$~~
 ибо $\arcsin x \leq \pi$, то есть все такие

погранич.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} < \pi - \pi \leq 0$$

$$\text{но } \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > 0 \text{ Противоречие}$$

$$\text{Тогда } \arcsin \frac{1-x}{4} \Rightarrow \arcsin \frac{1-x}{4} \leq \pi. ; \frac{1-x}{4} \geq 0$$

$$\text{Тогда } \arcsin \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > 0$$

$$\frac{x}{4} - \frac{1-x}{4} > 0 \Rightarrow \frac{4x - 4 + 4x}{28} > 0$$

$$\text{но } \frac{1-x}{4} \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

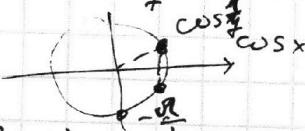
$$11x - 4 > 0$$

$$x > \frac{4}{11}, \text{ то есть}$$

или $x \geq 1$
или $x \in \mathbb{Z}$

$$\arccos \frac{1}{4} - \arcsin 0 = \arccos \frac{1}{4} - 0 \Rightarrow x > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{но } \arccos \frac{1}{4} \geq 0$$



$$\text{то есть первое решение } (1, 0)$$

$$\text{Теперь нужно } \arccos \frac{1}{4} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \leq 0$$

$$\text{Тогда } \arccos \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} = \arcsin \frac{x}{4} \geq \pi$$

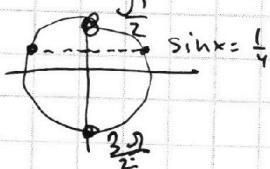
А $\arcsin \frac{x}{4}$ ему он меньше π но все равно
нельзя погодить $\Rightarrow \arcsin \frac{x}{4} \geq \pi \Rightarrow \text{но } \frac{x}{4} \geq 0 \Rightarrow x=0$

$$\text{Проверим } x=0 \Rightarrow y=1$$

$$\arccos 0 - \arcsin \frac{1}{4} > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\pi > \arcsin \frac{1}{4}$$

$$\text{но } \arcsin \frac{1}{4} < \pi.$$



Найдем $(x, y) = (0, 1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1) ~~ко~~ Пускай ~~когда~~ количество людей y
Пусть количество фальшивых билетов x

1) Первая вероятность, что случалась раздача
и билеты у людей C_y^y , но раздача не ~~была~~ ~~была~~

Посчитаем количество благоприятных исходов,
это когда в четверне идет ~~ребята~~, получивших
билеты ~~ребята~~ и Петя и Вася.

Давайте возьмем Петя и Васю и добавим к нему
еще двух людей ~~ребята~~, тогда что будет называться четверкой.
получивших билет, то есть всего способов выбрать
четверку людей, в которой будет Петя и Вася — это

или C_4^2 ~~ребята~~ то когда есть добирание людей до четверки

Тогда первая вероятность

$$\frac{C_{y-2}^2}{C_y^4} = \frac{\frac{(y-2)!}{(y-4)! \cdot 2!}}{\frac{y!}{(y-4)! \cdot 4!}} = \frac{4 \cdot 3}{(y-1)y} = \frac{12}{(y-1)y}$$

2) Посчитаем тем же способом, что и в 1)
вторую вероятность

Всего случаяй — C_y^{4+x}

Всего благоприятных случаев C_{y-d}^{d+x}

$$\text{по условию } \frac{12}{(y-1)y} = \frac{C_{y-2}^{2+x}}{C_y^{4+x}} = \frac{\frac{(y-2)!}{(y-4-x)! \cdot (x+2)!}}{\frac{y!}{(y-4-x)! \cdot (4+x)!}} = \frac{(4+x)!}{(2+x)! \cdot y(y-1)}$$

$$\frac{132}{(y-1)y} = \frac{(x+4)(x+3)}{y(y-1)}$$

$$132 = (x+4)(x+3)$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_1 = 8 \quad "(x+15)(x-8)=0"$$

$$x_2 = -15$$

$$x \neq 8; -15$$

$$x > 0, \text{ по условию}$$

$$\text{Такое } x = 8$$

Ответ: Тогда в четверне получены
бывающих фальшивых
4+8 = 12 фальшивых



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

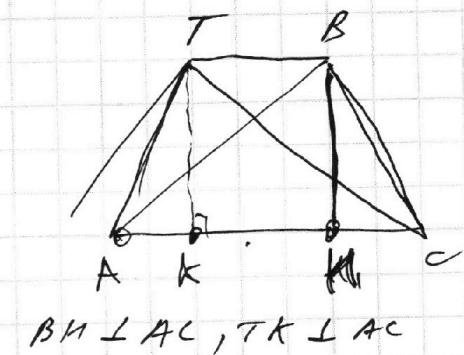
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\triangle ATB$ - это правильная трапеция
мы знаем ее базу Основание $AC = 22$, находим

TB
мы знаем, что $\triangle PTB \sim \triangle APC$ & $k = \frac{1}{2}$
значит $TB = \frac{1}{2} AC = 11$

Рассмотрим трапецию $ATBC$ и найдем высоту
из B на AC



$$AC = AK + KC + KC = 2KC + TB$$

$$AK = AC - KC = AC - \frac{AC - TB}{2} = 22 - \frac{22 - 11}{2} = \frac{33}{2}$$

$\angle AKB = \angle BKC = 90^\circ$ по теореме пифагора

$$KB^2 = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{24^2 - \left(\frac{33}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81 \cdot 16}{4}} = \frac{9 \cdot 4}{2} = 18$$

$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{BK \cdot AC}{2} = \frac{18 \cdot 22}{2} = 18 \cdot 11 = \underline{\underline{198}}$$

Ответ: $S_{ABC} = 198$

$$AK = AC - KC$$

$$TB \perp KC$$

$$TB \parallel KC$$

$$BK \parallel KT$$

$$\angle TKB = 90^\circ$$

$$\text{Также } \triangle TKA = \triangle BKC \quad 7.15$$

$$\angle BKC = 90^\circ = \angle TKA \quad \begin{cases} \triangle TKA \\ \triangle BKC \end{cases}$$

$$BK = TK$$

$$AT = BC$$

$$AK = KC$$

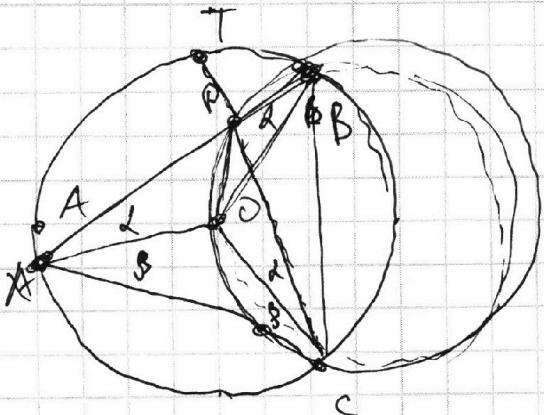
11

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Нужно $\angle BAO = \alpha$

$$\angle BAO = \alpha$$

$$\angle OAC = \beta$$

$$\text{Тогда } \angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha + 2\beta$$

т.к. центральный

$$\triangle AOC \text{ ртз т.к. } AO = OC = R$$

$$\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = \beta$$

$$\triangle AOB \text{ ртз т.к. } AO = OB = R$$

$$\angle ABO = \angle OAB = \alpha$$

$$\angle PBO = \angle PCO, \text{ т.к. они опираются на общую высоту}$$

$$\angle PAC = \alpha + \beta = \angle ACO + \angle OCP = \angle ACP$$

$$\angle PAC = \alpha + \angle ACP \Rightarrow \triangle APC - \text{ртз} \Rightarrow AP = PC = 16$$

Проведем PC, то пересечение с окружностью

PC $\cap \omega = T$, но свойство пересекающихся с окружностью

$$PC \cdot PT = PA \cdot PB \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PB = PT$$

$$\text{Тогда } TC = PT + PC = PA + PB = AB$$

$TC = AB \Rightarrow ATBC$ - равнодолгий треугольник

также ~~одинаковый~~ вписан в окружность

$$\text{т.к. } TP = PB \quad \left. \begin{array}{l} PA = PC \\ \angle TPA = \angle BPC \end{array} \right\} \angle ATP = \angle PBC$$

$$AT = BC \text{ и}$$

$$\text{также } \cancel{AT = PB} \quad \left. \begin{array}{l} \angle TPB = \angle APC \\ \frac{1}{2} = \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PC} \end{array} \right\} \angle TPB \text{ и } \angle APC$$

$$\angle BTC = \angle TCA \quad BT \parallel AC$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем $\max \sqrt{6^2 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \cos^2 \alpha}$

$$\cos^2 \alpha = t \geq 0$$

$$t \leq 1$$

$$f(t) = \sqrt{6^2 - 16t^2} + \sqrt{20 + 16t^2} \geq 0$$

$$f^2(t) = 36 + 20 - (6t^2 + 16t^2) + 2\sqrt{(6^2 - 16t^2)(20 + 16t^2)}$$

$$f^2(t) = 56 + 2\sqrt{(36 - 16t^2)(20 + 16t^2)} \geq 0$$

максимум ≥ 0 означает что считается, когда максимальны

$$g(t) = \sqrt{(36 - 16t^2)(20 + 16t^2)} \quad (36 - 16t^2)(20 + 16t^2) \text{ макс,}$$

это парабола ветвями вправо

значит максимум в вершине

$$t_{\text{верн}} = \frac{\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{для } 0 \leq t \leq 1 \text{ смысла}$$

$$\text{Тогда } P(\psi(\alpha))_{\max} = 6\pi + 2\left(\sqrt{6^2 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \cos^2 \alpha}\right) = \\ = 6\pi + 2\sqrt{36 - 8 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{28} = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$$\cos^2 \alpha = t > \frac{1}{2}$$

и это считается при $\cos^2 \alpha = t \leq \frac{1}{2}$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n ; -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ это означает что $t \in [0, \frac{1}{2}]$ то есть

которое не зависит, что также сработало правило,

просто четверти могут быть другие, но они

ограниченно противоположные (1 из них $\pi/4$)

$$\text{Ответ: } P(\psi(\alpha)) = 6\pi + 8\sqrt{7} ; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n ; -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение

длина g_{AB}

$$P(90^\circ) = AB + CD + AC + BD = AB + CD + 6\pi.$$

То есть периметр зависит от значений $AB + CD$,
а они зависят от d . ~~Все остальные~~ AB . Заметим, что AB и CD пересекутся в точке M и это будет как максимум в g_{AB} точка M так как $|4\cos d| \leq 4$ и $|4\sin d| \leq 4$.

Также эти две прямые пересекаются в концах окружности с $R=6$, т.к. их т. пересечения лежат на $T(4\cos d, 4\sin d)$, расположены в узлах, имея окружность $4^2\cos^2 d + 4^2\sin^2 d = 16$
 $16 \leq 36$.

Но смотрим AB , в $\triangle ABO$ он является гипотенузой $OA = OB = R$, также OM высота, т.к. $OCB \perp AB$
 $M = AB \cap OC \perp$, $M \in O, 4\cos d \in$

Значит $OM - 90^\circ$ и медиана в $\triangle OMA = 90^\circ$

$$\text{в } \triangle OMB, \angle OMB = 90^\circ \Rightarrow AB = MB = \sqrt{6^2 - 16\cos^2 d}$$

$$MB^2 = OB^2 - OM^2, OM = 4\cos d$$

$$AB = 2\sqrt{6^2 - 16\cos^2 d}$$

Таким же образом найдем CD .

$$CB = 2\sqrt{6^2 - 16\sin^2 d} = 2\sqrt{6^2 - 16(1 - \cos^2 d)} = 2\sqrt{20 + 16\cos^2 d}$$

$$P(90^\circ) = 6\pi + 2(\sqrt{6^2 - 16\cos^2 d} + \sqrt{20 + 16\cos^2 d})$$

Чтобы найти максимальные эти круги нужно искать
точку на дуге BD на которой произведение $\cos d$ и $\sin d$ было минимальным
т.к. $BD = 7\pi$ и искать.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

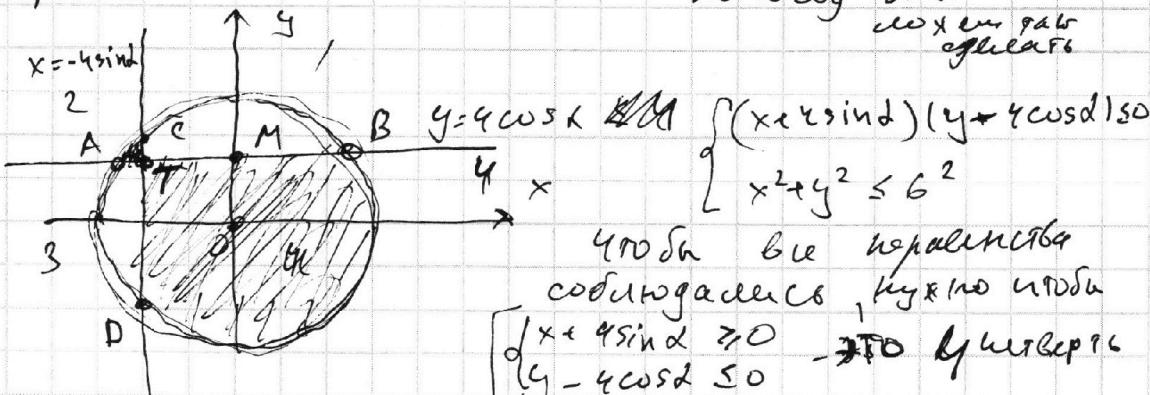
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но строим гипотезу 6 $\cos x \cos y$,
и отметим отмеченными прямыми $x = -4 \sin \alpha$ и $y = 4 \cos \alpha$
 α - заориентирован.

$x^2 + y^2 \leq 36$ - это все точки лежащие внутри окружности
с центром в начале координат $O(0,0)$ и радиусом $R = 6$

Но строим $\odot O(0)$. $\angle C [0, \frac{\pi}{2}]$ (ноги синхронизированы)



Что бы все параллельны

$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \geq 0 \\ y - 4 \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \rightarrow \text{четверть}$$

$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \leq 0 \\ y - 4 \cos \alpha \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{четверть}$$

То есть решения трех систем линейных неравенств

$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \geq 0 \\ y - 4 \cos \alpha \leq 0 \end{cases} \rightarrow \text{четверть}$$

$$= 2(\angle CBA + \angle BCD) = 2\angle C - 2(180^\circ - \angle CIB) = 180^\circ$$

$\angle CIB = 90^\circ$

Тогда сумма длины дуг $\angle A + \angle B$, если меру градусов в меру 180° , то это половина дуги всей окружности T т.к. проходит через всю окружность

$$360^\circ \text{, то есть } \angle A + \angle B = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

она не зависит от α .

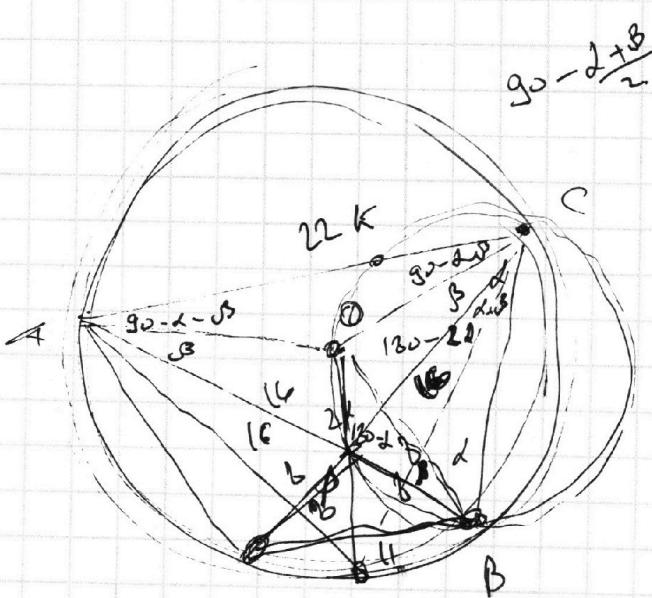


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$OP = R + \frac{R}{\sin \beta}$$

$$2 - \beta$$

$$AP \cdot PB = (R + OP)(R - OP)$$

$$(6 \cdot 2 = R^2 - OP^2)$$

$$\frac{OP}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin d} = \frac{CB}{\sin 2d}$$

$$R^2 = \frac{R^2}{\sin^2 d} \cdot \sin^2 \beta$$

$$R^2 \left(\frac{\sin^2 d - \sin^2 \beta}{\sin^2 d} \right)$$

$$\frac{CB}{\cos d} = 2R$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta + \alpha}{\sin(90 - \beta)} = \frac{\sin \beta + \alpha}{\cos \beta}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\frac{CB}{\cos d} = 2R$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin d}$$

$$\times \cdot \cos \beta = \sin d \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos d$$

$$\frac{22}{24 \sin \beta} = \frac{\sin d}{\sin \beta} + \frac{\cos d}{\cos \beta}$$

$$\frac{\sin d}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin d} = \frac{PC}{\sin \beta + d}$$

$$\frac{4P^2 - 93^2}{2} = \frac{81 \cdot 16}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$(\sin \alpha y - \sin \alpha x) \sin \alpha y = (\cos \alpha y + \cos \alpha x) \cos \alpha y$$

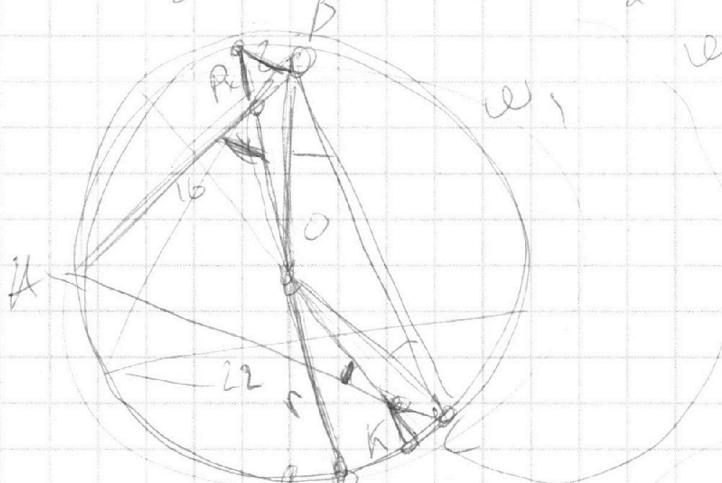
$$0 = \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y + \cos^2 \alpha y - 1 + \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y$$

$$\cos(\alpha(x-y)) + 2\cos^2 \alpha y = \sin \alpha y - \sin \alpha x$$

$$3+3+2+4=10$$

$$\cos(\alpha(x-y)) = \cos(0 \cdot \alpha)$$

$$\frac{1}{2}(\sin^2 \alpha x + \sin^2 \alpha y) + \frac{1}{2}(\sin \alpha y - \sin \alpha x)$$

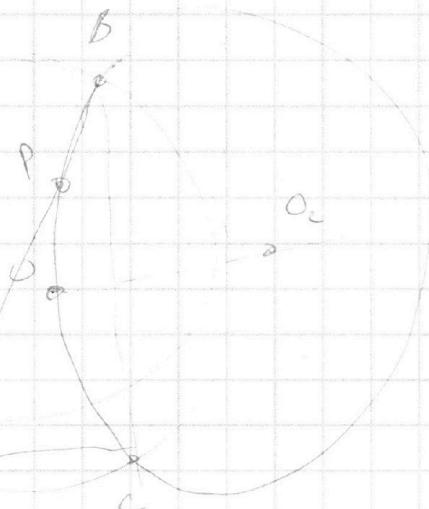
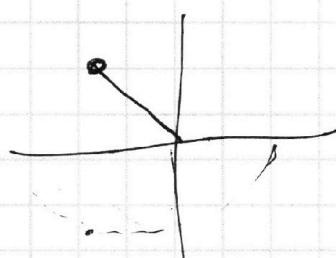


16

22, 16, 8

82

$$\frac{84}{11} = 110 \frac{4}{11}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot x : 11 \cdot 101 \cdot x^5$$

44444

$$B = \cancel{2} \cancel{101} \overline{abc} : 101$$

404.

$$C = \cancel{101} \overline{11} : 11$$

11

12

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x(x-4)} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-4)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{x-4} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3xy}{xy} = \frac{x+y+3(x-4)(y+4)}{(x-4)(y+4)} = \frac{xy+3xy-4y+4x}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3xy}{xy} = \frac{3xy - 11y + 13x - 48}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy - 4y + 4x - 16$$

~~$$3x^2y^2 - 12xy(y-x) - 48xy + xy^2 - 4y^2 + 4xy - 16y$$~~

~~$$+ x^2y - 4yx + 4x^2 - 16x = 3x^2y^2 - 18y^2x + 14x^2y - 48xy$$~~

$$6x^2 - 4y^2 - 16y - 16x = 0$$

$$4x^2 - (4-y)(x+y) - 4(x+ey) = 0 \quad 4x^2 - 16x + 64$$

$$(xey)(x-y-4) = 0 \quad - 12x(x-4)$$

$$x = y+4 \quad y = x-4$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x^2 + x(x-4) + (x-4)^2)$$

$$4(3x^2 - 12x + 16) - 12x^2 + 46x = 6x^2 + 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{y}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{C_4^2} - 1}{\cancel{C_4^2}} = \frac{(2+x)}{\cancel{C_{4-x}}}$$

$$12 \frac{y! (y-2)(y-8)!!}{2(y-11)(y)!!(y-5)(y-5)}$$

$$\frac{132}{(y-11)y} = \frac{(4+x)! (y-x-4)! (y-2)!}{(2-x)! y! (y-3-2-x)!} = \frac{12(x+3)(x+4)}{y(y-1)}$$

$$x^2 + 4x - 120 = 0$$

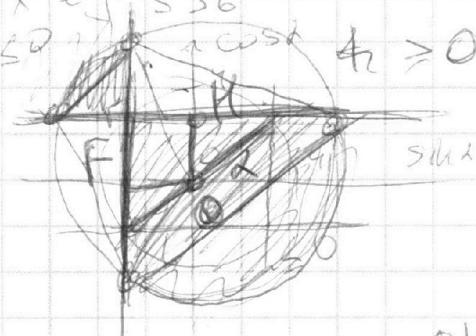
$$D = 4y - 4 \cdot 120 = 520 = 23^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{23^2}}{2} = \frac{-4 \cdot 23}{2} = 80$$

$$(x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

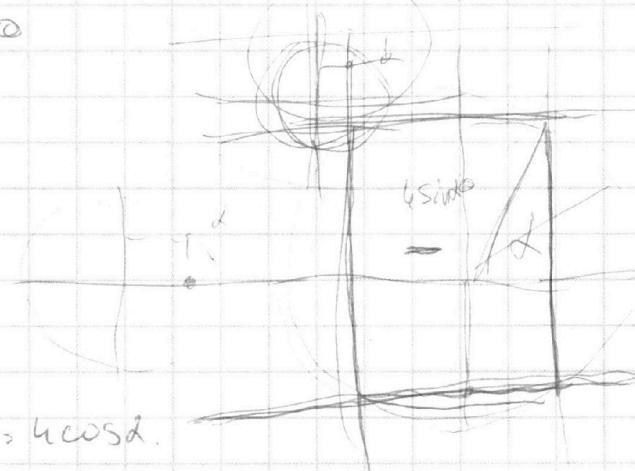
$$x^2 + y^2 + 4\cos\alpha \cdot 4\sin\alpha \geq 0$$



$$80$$

$$OK = 4\cos\alpha$$

$$OF = 4\sin\alpha$$



$$2P = \sqrt{6^2 - (6\cos\alpha)^2}$$

$$2\sqrt{6^2 - 16\cos^2\alpha}$$

$$\left(\sqrt{6^2 - (6\cos\alpha)^2} + \sqrt{6^2 - (6\sin\alpha)^2} \right)$$

$$36 - 4 + 2\sqrt{(6^2 - 16\cos^2\alpha)(6^2 - 16\sin^2\alpha)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} 15$ $330^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} 14$

$136^\circ, 15 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

$+ \frac{3\pi}{2} = 36(120^\circ); 420$

$(b) 23$

BG $\sin \frac{\pi}{2}$

$\frac{BC}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2R$

$1 > \frac{x}{4} > -1$ $1 > \frac{1-x}{4} > -1$

$4 > x > -4$ $106 > 16x > 71$

$\frac{106}{22} > x > \frac{71}{11}$

$\sin^2 \alpha y - \sin \alpha x \cdot \sin \alpha y = 52, x > -3$

$\sin^2 \alpha y + \cos \alpha x \cdot \cos \alpha y$

$5 > x > -3$

$(\sin \alpha y - \cos \alpha y)(\sin \alpha y + \cos \alpha y)$

$\cos(\alpha x - \alpha y)$

$\sin \alpha y + \cos \alpha y =$

$\cos^2 \alpha y = \cos(\alpha y - \alpha x)$

$\sin \alpha x + \cos \alpha x,$

1) $\arccos \frac{x}{4} - \arcsin \frac{1-x}{4} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$t_1 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$

$t_2 = -\frac{20}{16} = -\frac{5}{4}$