



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 51.

Ответ: $(5555; 101; 55)$

Пусть A состоит из 4 одинаковых цифр a . Тогда $A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$.
 $(1 \leq a \leq 9)$.

101 - простое число.

$$A \cdot B \cdot C \div 101$$

$A \cdot B \cdot C$ - точный квадрат

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C \div 101^2$$

т.к. $A = 11 \cdot 101 \cdot a$, где $1 \leq a \leq 9$, то $A \div 101$ только 101 входит в A только в 1 степени. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} B \div 101 \\ C \div 101 \end{cases}$$

C - двузначное число $\Rightarrow C < 101 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C \nmid 101 \Rightarrow B \div 101$$

Пусть $B = 101 \cdot b$, т.к. b - трёхзначное, то $1 \leq b \leq 9$. $B = \overline{b0b}$, но у B - одна из цифр - это 1 $\Rightarrow b = 1$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 101^2 \cdot 11 \cdot C. \quad 11 - \text{также}$$

простое число поэтому если $A \cdot B \cdot C$ - точный квадрат и $A \cdot B \cdot C \div 11$, то $A \cdot B \cdot C \div 11^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 51.

Пусть $C = 11 \cdot c$, тогда т.к. c - двузначное, то $C = \overline{cc}$, тогда $c = 5$. т.к. хотя бы одна из цифр числа C - это 5.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot 101 \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 \cdot a.$$

т.к. $A \cdot B \cdot C$ - точный квадрат; 5 - простое число, то $A \cdot B \cdot C \div 5^2 \Rightarrow a \div 5 \Rightarrow a = 5$ (т.к. $1 \leq a \leq 9$).

Таким образом:

$$A = 5555.$$

$$B = 101.$$

$$C = 55.$$

$$A \cdot B \cdot C = 5555 \cdot 101 \cdot 55 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5^2.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 52

По условию:

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

т.к. $x, y > 0 \Rightarrow k > 0$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad | : x+y+1 \neq 0 \text{ т.к. } x, y > 0.$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(x-3)(y+3) = xy$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$-3y + 3x - 9 = 0.$$

$$x - y - 3 = 0.$$

$$x = y + 3.$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$$\cancel{y^3} + \cancel{9y^2} + \cancel{27y} + \cancel{27} - \cancel{y^3} - \cancel{9y^2} - \cancel{27y} = 27.$$

Ответ. $M=27$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 53.

а) Ответ: $(x; 3x+2k+1); (x; -x+2k+1); x \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$.

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) = \cos(\pi y) \cdot \cos \pi x - \sin(-\pi y) \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\pm(\pi - 2\pi x) = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x - \pi = \pi x - \pi y + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi y = 3\pi x + \pi(2k-1), & k \in \mathbb{Z} \\ \pi y = -\pi x + \pi(2k+1) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 53.

$$\begin{cases} y = 3x + 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2k + 1, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

51. Заметим, что

$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$. ^{почти} Всегда верно, если $\frac{x}{4}$ и $\frac{y}{9}$ принадлежат области опреде-

ления. т.к. область значений $\arccos$ — это $[0; \pi]$. Поэтому не может быть только, что

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{4}; \frac{y}{9} = -1 \Rightarrow \Rightarrow x = -4; y = -9.$$

Мы считаем, что x — целый и

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \text{ также } -9 \leq y \leq 9.$$

Переберём все значения x :

1) $x = -4$.

$$1.1 \ y = 3x + 2k + 1 \Rightarrow y = -11 + 2k \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 10$$

10 решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1.2x y = -x + 2k + 1$$

Задача №3

$$y = 5 + 2k. \Rightarrow k = -7; -6; -5 \dots; 2.$$

2) $x \geq 3$.

10 решений.

* Заметим, что если x — ~~нечёт~~^{чёт}, то

$$3x + 1 + 2k - \text{неч.}$$

т.к. $y \in [-9; 9]$; $y \in \mathbb{Z}$, то мы можем

получить 10 решений: $-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9$.

Взяв соответствующее k .

Аналогично $-x + 1 + 2k$ — неч. поэтому

мы тоже можем получить 10 решений.
По совп. с предыдущими.

Тогда все чёт x нам дают ~~20~~¹⁰ 10.

решений, всего их 5: $-4; -2; 0; 2; 4$.

Таким образом получим $5 \cdot 10 = 50$ реше-
ний для чёт x .

Если x нечёт, то

$$3x + 1 + 2k \text{ и } -x + 1 + 2k - \text{тоже чёт.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. $-9 \leq y \leq 9$. Они могут быть равны:

$-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8$ — 9 значений.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 13.

Таким образом пара неёт x .

даёт нам ~~два~~ решений.

Тогда всего решений: для неёт x
 $(x = -3; -1; 1; 3)$ $4 \cdot 9 = 36$. т.к. опять не *

А всего пар $(x; y)$ - удовн. уравнению
и пер-ву ~~36~~ $36 + 5 \cdot 10 - 1 = 85$.

не забывает ^{не} выеет пару $(-4; -9)$,
которая является решение пер-ва, но является

8) Ответ. 85.

решением ур-ния
 $-9 = (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1$

* решения совпадут для $y = -x + 2k + 1$ и

$$y = 3x + 2k + 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 54.

Ответ. 7.

Пусть всего было n - одиннадцатиклассников, а k - кол-во выделенных билетов в конце месяца.

В начале месяца:

Вс Если в n детей выбирают случайно, то

$$p(\text{Вася и Пета пойдут вместе}) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \quad \text{т.к.}$$

всего C_n^4 подмножеств из n детей, а кол-во таких, где есть и Пета и Вася C_{n-2}^2 .

(им должны тоже достаться 2 билета, а другие 2 случайно между $n-2$ n -классниками)

После конца В конце месяца всё аналогично, только теперь вместо 4 раздают k билетов.

$$p(\text{Вася и Пета пойдут вместе в конце м.}) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом:

Задача 54.

$$3,5 \cdot \frac{C_{n-2}^k}{C_n^k} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{n(n-1)n} = \frac{(n-2)! \cdot k!(n-k)!}{n! \cdot (k-2)!(n-k)!}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$42 = k^2 - k$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$

$$\begin{cases} k=7 \\ k=-6 \end{cases}$$

$$k=7 \text{ т.к. } k \geq 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 15.

Пусть $PO \cap AC = M$.

$\angle CAB$ - вписан в окружность

$\omega_1 \Rightarrow$

$$\angle CAB = \frac{\angle BOC}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle COB = \angle BOC = 2\angle CAB$$

$$\Delta COB \text{ р/б.} \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC =$$

$$= \frac{180^\circ - 2\angle CAB}{2} = 90^\circ - \angle CAB$$

$$CO \perp PB \text{ - вписан.} \Rightarrow \angle OCB = \angle OPA = 90^\circ - \angle CAB.$$

$$\angle AMP = 180^\circ - \angle APM - \angle MAP = 180^\circ - (90^\circ - \angle CAB) - \angle CAB$$

$$= 90^\circ. \Rightarrow M \text{ - проекция } O \text{ на } AC \Rightarrow M \text{ - середина}$$

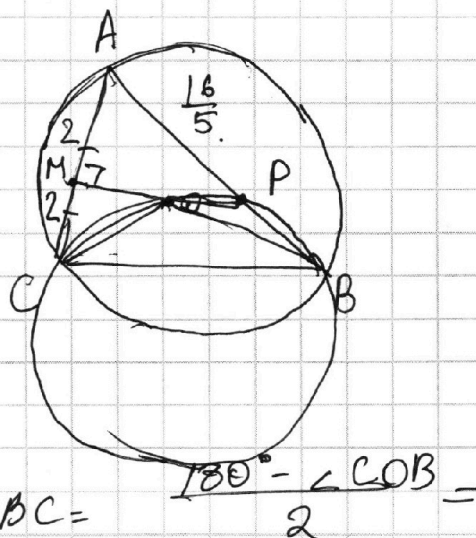
$$AC \Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = 2.$$

$$\sin \angle MAP = \frac{MP}{AP} = \frac{\sqrt{AP^2 - AM^2}}{AP} = \sqrt{1 - \frac{AM^2}{AP^2}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{5^2}{8^2}} = \sqrt{\frac{64 - 25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \angle CAB}{2} = \frac{4 \cdot (AP + BP) \cdot \sin \angle CAB}{2}$$

$$= \frac{4 \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2} = \frac{4 \cdot 26 \cdot \sqrt{39}}{16 \cdot 5} =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 55.

$$= \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{2 \cdot 5}$$

Ответ. $S_{ABC} = \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{10}$

* $MP = \sqrt{AP^2 - AM^2}$ по т. Пифагора

P.S. расположение точки именно такое
т.к. $\triangle ABC$ — ~~ост~~ остроугольный. и P лежит
на отрезке ~~BC~~ AB .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 56.

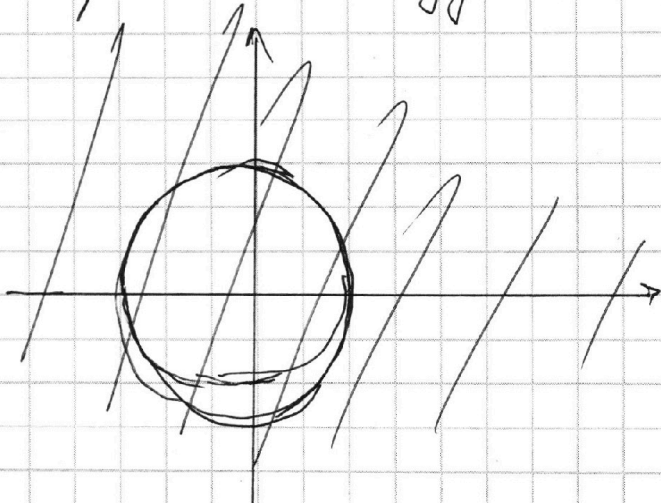
$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Пусть $\sin\alpha = t$, $\cos\alpha = z$.

$$t^2 + z^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Систему можно переписать следующим образом.

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



Изобразим это на координатной плоскости (см. след. страницу).

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

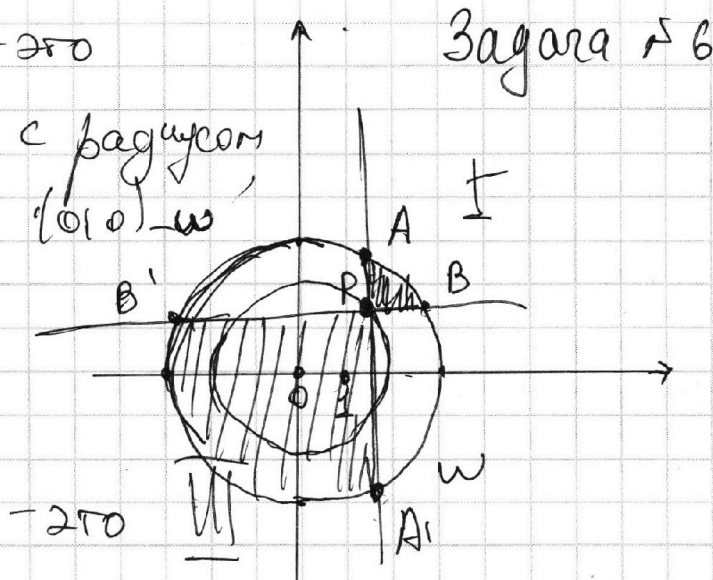
СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 \leq 9 \text{ — это}$$

окружность с радиусом 3 и центром $(0; 0)$ и

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \\ x \leq 2 \\ y \leq 2 \end{cases}$$



надо отметить точку с координатами $P(2; 2)$, и провести прямые $\perp$ осям.

И возьмем 1 и 3 четверти. Пусть данные прямые пересекут окружность в точках A и A' ; B и B' (см. рис)

Пусть $A(2; a)$, тогда $A'(2; -a)$.

т.к. A и $A' \in \omega$. Пусть $B(b; 2)$; $B'(-b; 2)$. у нас $M = \sqrt{A'B'} + \sqrt{AB} +$

$$+ \sqrt{AP} + \sqrt{BP} + \sqrt{PA'} + \sqrt{PB'} = \sqrt{A'B'} + \sqrt{AB} + \sqrt{B'B} + \sqrt{AA'}.$$

$$\angle PAB = 90^\circ \Rightarrow \sqrt{AB} + \sqrt{A'B'} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} =$$

3π . Данная невыполнимости. — это



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

фиксированная величина:

$$M = 3\pi + AA' + BB' = 3\pi + 2|a| + 2|b|$$

Применим неравенство между средним арифм. и геом. и квадр.

$$\frac{|a| + |b|}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2|a| + 2|b| \leq 4 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \text{приём}$$

равенство только при $|a| = |b|$.

$$A' \in \omega \Rightarrow 4t^2 + a^2 = 9$$

$$B' \in \omega \Rightarrow 4t^2 + b^2 = 9$$

$$a^2 + b^2 = 18 - 4(t^2 + t^2) = 14$$

Поэтому.

$$M = 3\pi + 2|a| + 2|b| \leq 3\pi + 4\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} =$$

$$= 3\pi + 4\sqrt{\frac{14}{2}} = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

Приём равенство только при

$$|a| = |b| \Leftrightarrow |t| = |t|$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 56

т.к. $4a^2 + a^2 = 9$; $4b^2 + b^2 = 9$.

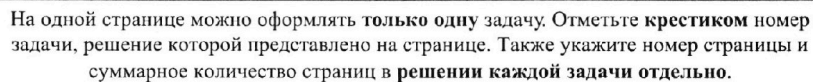
Получаем, что равенство только при
 $|\sin \alpha| = |\cos \alpha|$

или $\tan \alpha = \pm 1$.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

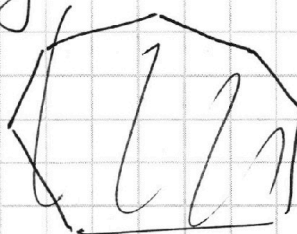
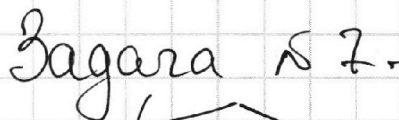
Ответ. $M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{7}$, при

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$



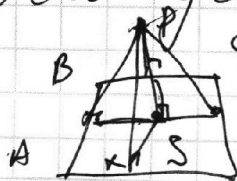
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим нашу усечённую пирамиду.
Во первых пусть боковое ребро будет x , сторона и радиус ^{большего} нижнего будет d_1 и r_1 соотв, а верх ^{меньшего} правильного многоугольника d_2 и r_2 соотв.

Если $\exists$ такая точка P , что она равноудалена от всех $\neq$ сторон, то из соображений симметрии $P \in Q_1 Q_2$, где $Q_1 \neq Q_2$ — центры правильных многоугольников $\neq$ то. Пусть



- боковая грань. Пусть.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

S — проекция P на эту грань, тогда
а X — точка на проекции P на сторону.

АД по Ф.Т.П. $SX \perp AD \Rightarrow$

$\Rightarrow PX^2 = PX^2 - PS^2$ — это не зависит

от того на какой грани лежит X .

т.к. $BC \parallel AD$ трапеция. А также

мы знаем, что S — центр вписанной

окружности $\Rightarrow AB + CD = AD + BC$

$$2X = d_1 + d_2 = X = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

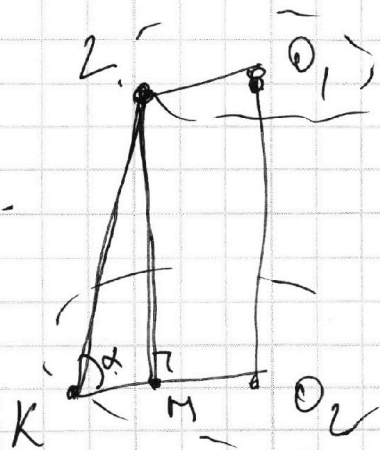
Пусть $KM \perp$ плоскости

нижнего многоугольника.

$M \in KO_2$

Если S — центр
вписанной окружности

углевого конуса, то мы знаем,
где он находится. — Он лежит
в среднем плоскости между





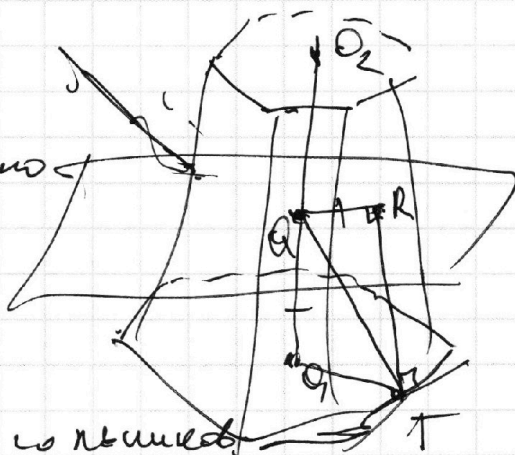
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

двумя и плоскостями и на O_1, O_2
точки из соображений симметрии
Введем, чтобы
найти угол между
плоскостями нужно
найти ~~отрезок~~ косинус
помогает верхнего
и нижнего многоугольника



$$QR = QO_1$$

$$\angle QRT = \angle QO_1T = 90^\circ$$

QT - общая

$$\Rightarrow RT = O_1T = \sqrt{r_1^2 - \frac{d_1^2}{4}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

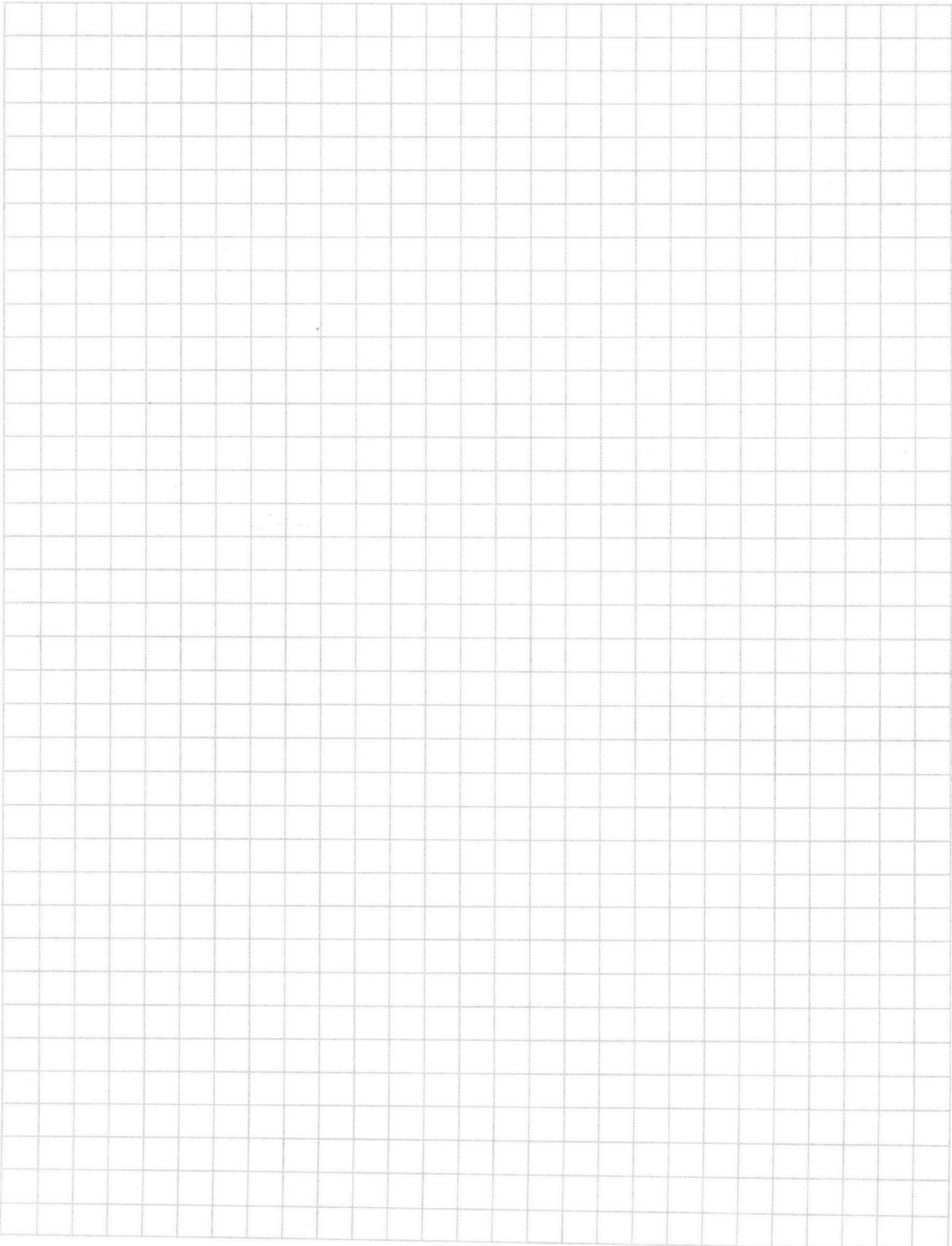
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

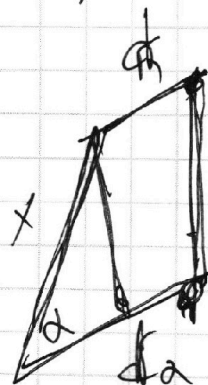
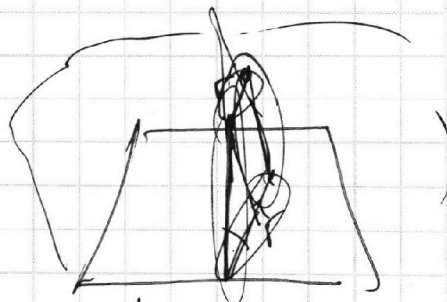
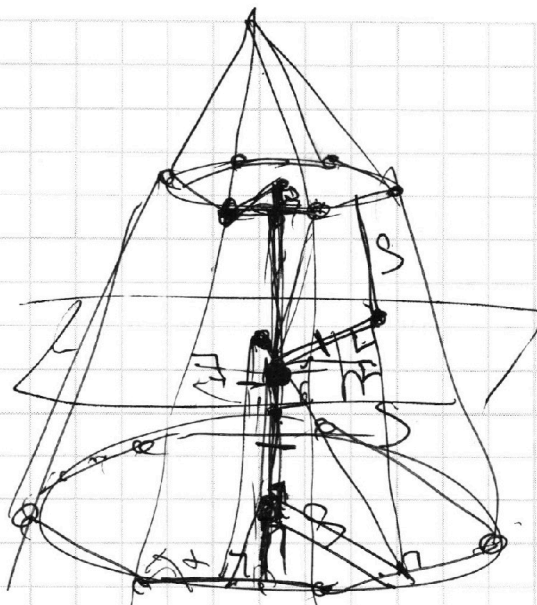
5
☐

6
☐

7
☐

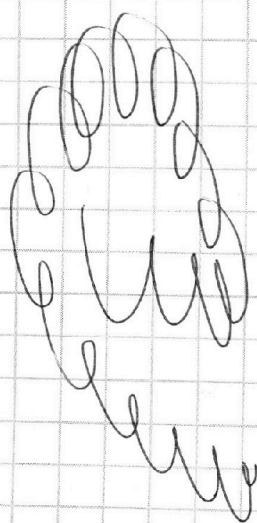
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



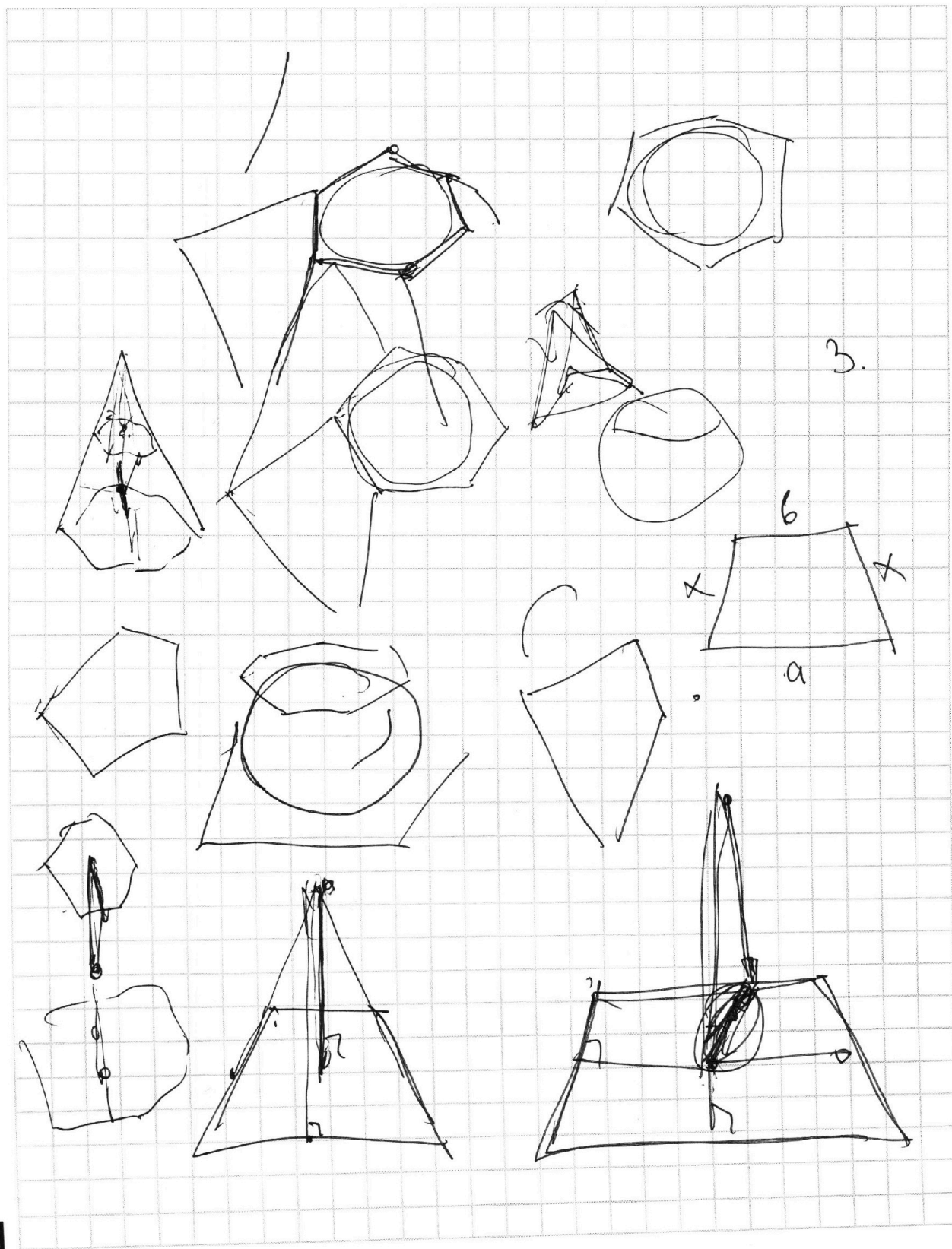
$$X = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

$$X = \frac{d_1 + d_2}{2}$$



$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{d_2 - d_1}{d}$$

$$\frac{d_2 - d_1}{\frac{d_2 + d_1}{2}} = 2 \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1} \right)$$



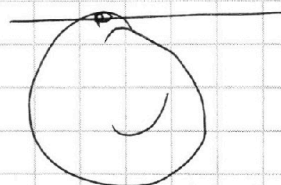
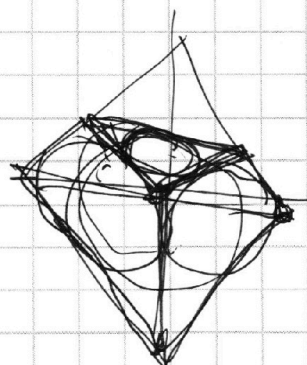
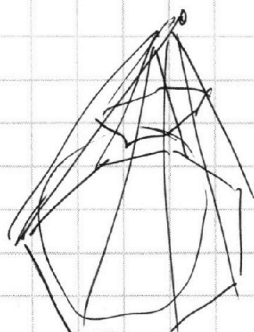


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$z^2 + t^2 = 4.$$

$$z^2 + a^2 = 9$$

$$t^2 + b^2 = 9$$

$$a^2 + b^2 = 18 - 4 = 14$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

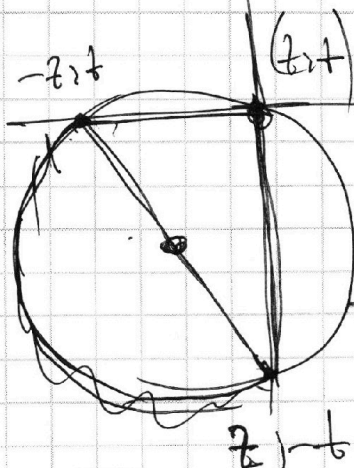
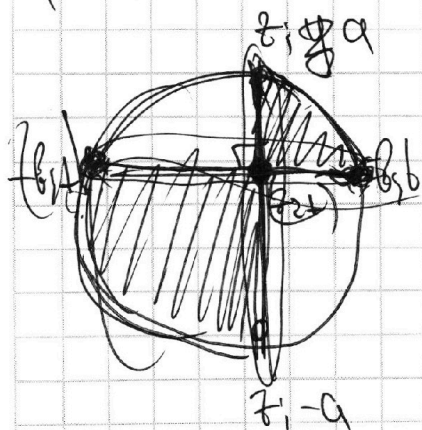
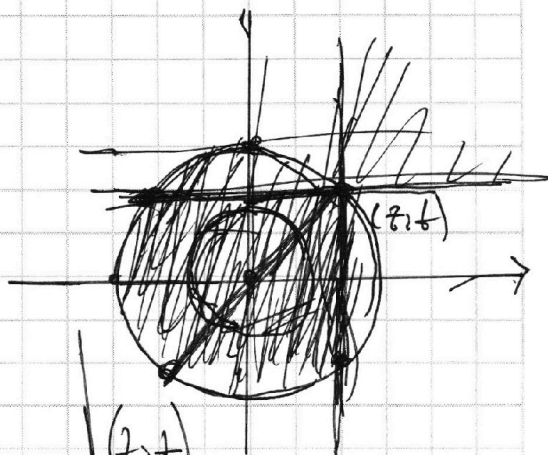
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \end{cases}$$



$$2|t| + 2|z|$$

$$2|b| + 2|a|$$

$$t^2 + b^2 = 9$$

$$2t + 2b$$

$$2|t| + 2|z| = 2(|t| + |z|) \leq 2$$

$$\frac{|t| + |z|}{2} \leq \sqrt{\frac{t^2 + z^2}{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x}{(\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x} = \frac{\cos - \cos - \sin \sin}{\cos^2 - \sin^2}$$

$$z = \frac{\pi}{2}$$

$$(\sin z - \sin t) \sin z = (\cos z + \cos t) \cos z$$

$$\sin^2 z - \sin t \cdot \sin z = \cos^2 z + \cos t \cdot \cos z$$

$$\sin^2 z - \cos^2 t = \sin t \cdot \sin z + \cos t \cdot \cos z$$

$$-\cos(2z) = \cos(2t) \cos(z-t)$$

$$\cos(\pi - 2z) = \cos(z-t)$$

$$\pi - 2z$$

$$\pi - 2z = \pm(z-t) + 2\pi k$$

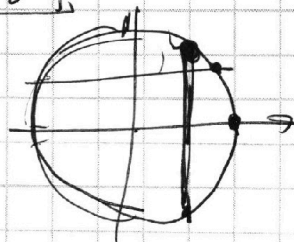
$$1) \pi - 2z = t - z + 2\pi k$$

$$\pi = z + t + 2\pi k$$

$$\pi = x + y + 2\pi k$$

$$1 = x + y + 2k$$

$$y = 1 - 2k - x$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad \pi - 2t = z - t + 2\pi k$$

$$t = 3z + 2\pi(2k - 1)$$

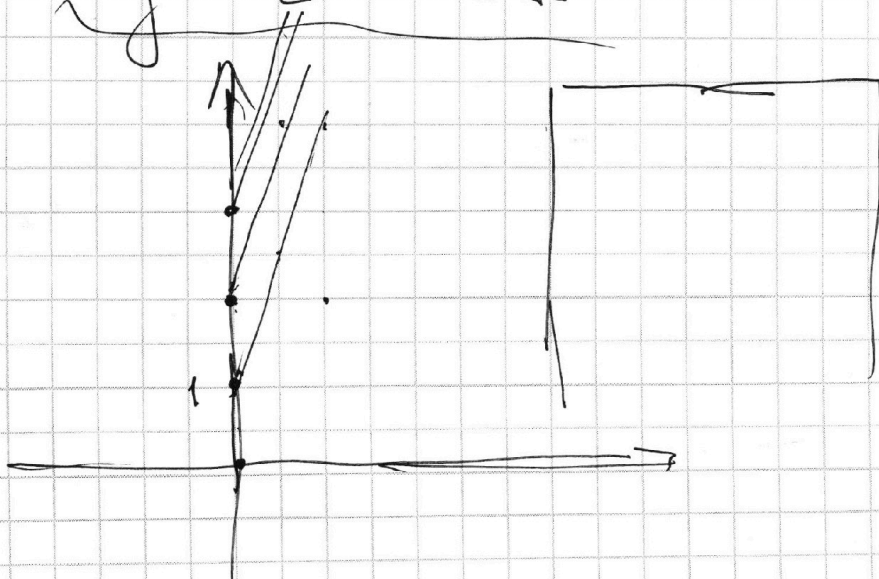
$$\cancel{y} = 3\cancel{x} + \cancel{\pi}(2k - 1)$$

$$y = 3x + (2k - 1)$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\frac{y}{9} < 2\pi$$

$$y \in [-9; 9]$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A - четырехзнач. один цифр.

B - трёхзнач. ≥ 1 цифра 1.

C - двухзнач. ≥ 1 цифра 5.

ABC - квадрат.

1111 · k.

1111 $\overline{) 1111}$

101 - простое.

5.5. $\underbrace{101 \cdot k}_{101} \cdot \underbrace{101 \cdot 11}_{101}$

(5555 101 55.)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy + 3x - 3y - 9 = 0 \cdot xy.$$

$$3(x-y-3) = 0.$$

$$x-y-3=0 \quad \boxed{x=y+3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x(x+3)} = k$$

$$\frac{2x+4}{x(x+3)} = k. \quad \frac{2x+4}{4x+8} = \frac{(x^2+3x)k}{2x^2k+6xk}$$

~~2~~ x

3 · 3 · 3

$$x^3 - (x+3)^3 - 9x(x+3)$$

$$x^3 - x^3 - 9x^2 - 27x - 27 - 9x^2 - 27x =$$

$$= -18x^2 - 54x - 27 =$$

$$= 9(-2x^2 - 6x - 3) =$$

$$= -9(2x^2 + 6x + 3) = -\frac{9}{k}(4x+8+3k)$$

$$kx^2 + x(3k-2) - 4.$$

$$x_{1,2} = \frac{-3k+2 \pm \sqrt{(3k-2)^2 + 4k}}{2k} = \frac{-3k+2 \pm \sqrt{9k^2 + 4k + 4}}{2k}$$

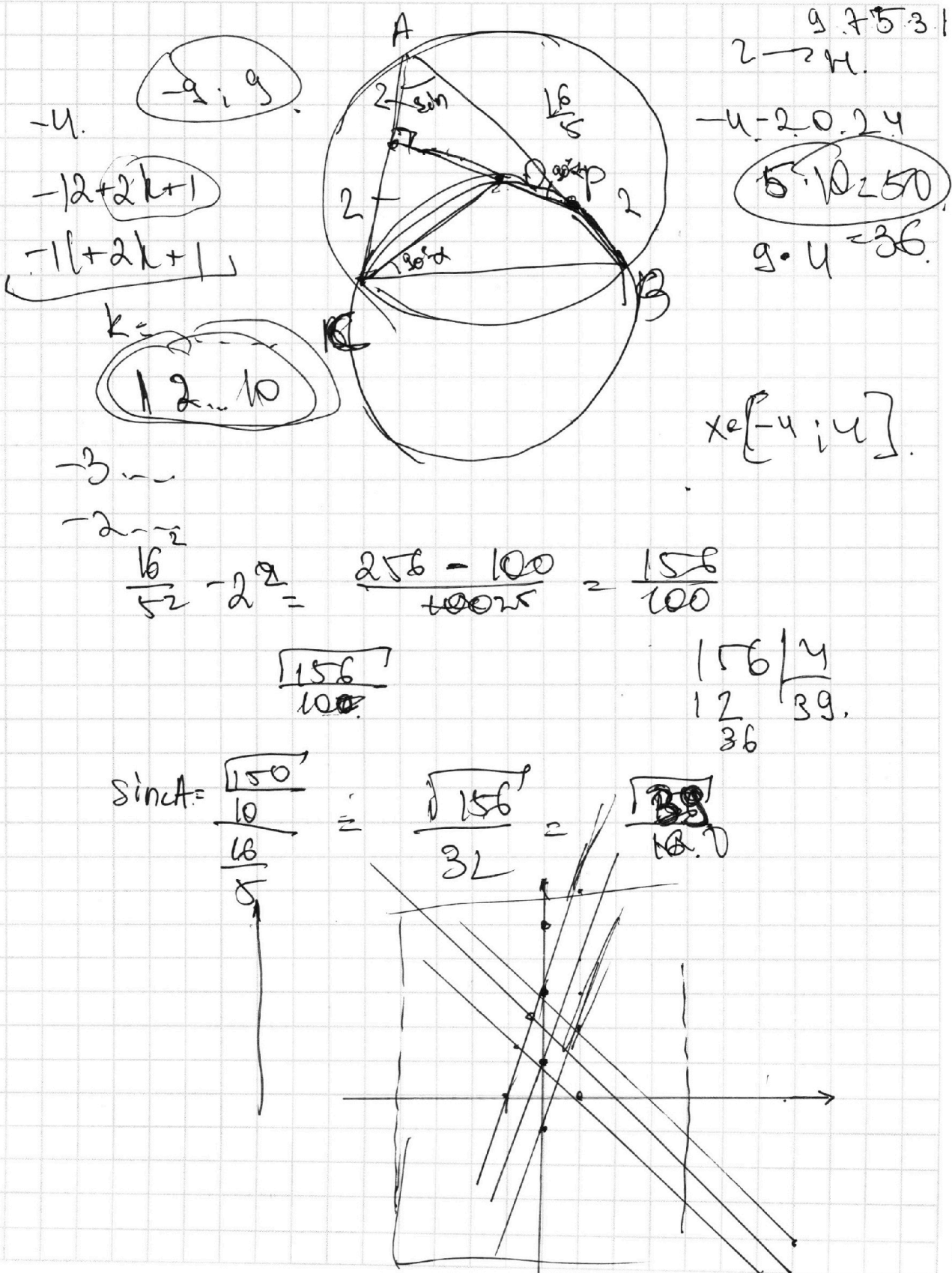


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n -одн. классников.

11 билета:

✓

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 3,5 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{e_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$3,5 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 3,5 \cdot \frac{k(k-1)}{(n-1)n}$$

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{(n-1)n} \cdot 3,5$$

$$3,5 \cdot 12 = k(k-1) \cdot 3,5$$

$$\frac{7}{2} \cdot 12 = k(k-1)$$

$$42 = k(k-1)$$

$$k=7$$