



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньшая, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① A составлено из 4x одинаковых цифр \Rightarrow делится на 1111. = 11 · 101. Так как квадрат имеет простые делители четн. степени, то $B:101$ и $C:11$. $111.101=1111$

При чём нам подходит только $B=101$, т.к. В содержит хотя бы одну единицу. С должно содержать хотя бы одну 5⁴ $\Rightarrow C=55. = 5 \cdot 11$. Тогда B и A должны дел. на 5, т.к. $B \stackrel{=101}{\cancel{\text{делит}}} \text{ не дел. на } 5 \Rightarrow A=5555$.

Имеем тройку $A=5555$; $B=101$; $C=55$.

$$A \cdot B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = (11 \cdot 5 \cdot 101)^2$$

Других троек нет, т.к. из всех комбинаций чисел на 5 дел. только 5 $\Rightarrow A$ может быть только 5555 $B=101$ и $C=55$. Тройка: (5555; 101; 55)

Ответ: (5555; 101; 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad K = \frac{1}{x} = x, y > 0 - \text{no усл. } x \neq 3; y \neq -3 - \text{огранич.}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} - \text{no условия.}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \cancel{\frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy-3y+3x-9}. \quad \text{T.k. } x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x+y+1 > 0$$

Можем поделить на $x+y+1 \neq 0$:

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy-3x-3y-9}; \quad x \neq 3; y \neq -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3x = 3y + 9 \Rightarrow \boxed{x = y + 3}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$$

$$= (y+3-y)((y+3)^2 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y =$$

$$= 3(3y^2 + 9y + 9) - 9y^2 - 27y = 9y^2 + 27y - 9y^2 - 27y + 27 =$$

= 27 - единственное значение.

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad \text{a) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi y + \cos \pi y) \cos \pi x$$

По формуле суммы косинусов и разности синусов:

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi y + \pi y}{2} \cos \frac{\pi y - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$1) \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1 + 2k \Rightarrow x = \underline{-y} \quad y = \underline{-x+1+2k}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Решение: } (x; \underline{-x+1+2k}), k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \neq 0$$

Тогда поделим уравнение ~~на~~ (на 3 строкке) на

$$\cos \frac{\pi y - \pi y}{2} \neq 0;$$

$$-2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi y - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \quad /:2 \quad \text{и перенесем}$$

$$\text{все в правую часть: } \cos \frac{\pi y - \pi y}{2} \cos \pi x + \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$= 0$; По формуле косинуса суммы углов:

$$\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) = 0 \Rightarrow \cos \left(\frac{-\pi x - \pi y}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

~~$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 1 + 2n \Rightarrow y = \underline{-x+1+2n}, n \in \mathbb{Z}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x; \underline{-x+1+2n}), n \in \mathbb{Z}$ — такое же решение, что и в 1).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi.$$

Ограничения: $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ и $-1 \leq \frac{y}{3} \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in [-4, 4] \text{ и } y \in [-3, 3].$$

Так как ~~арккосинус однозначен~~. $\arccos a \in [0, \pi]$,

при $a \in [-1, 1]$, то $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3}$ равно как максимум $\pi + \pi = 2\pi \Rightarrow$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{3} \neq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-4, 4] \text{ и } y \in (-3, 3].$$

Решение: $(x; -x+1+2n), n \in \mathbb{Z}$ — в киле $y = -x+1+2n$ подавл. единица мен. чётность \Rightarrow х и у раци. сёти.

$2n$ — нечет, кот. не является чётности. \Rightarrow

1) Если $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$ \leftarrow т.е. чётн.
у нас будет ~~по~~ 9 подлежащих исчислению y :

$$y \in \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow 4 \cdot 9 = 36 \text{ пар}$$

2) Если $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$, т.е. нечётн., то соответ.

~~и~~ к каждому такому x будет по 9 пар. y — чётн.:

$$y \in \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow 1 \cdot 9 = 36 \text{ пар. Всего: } 2 \cdot 36 = 72.$$

Ответ: ~~а)~~ $(x; -x+1+2n), n \in \mathbb{Z}$. б) 72 пары.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

17. Пусть k - количество одиннадцатиклассников, n - кол-во добавленных в конце месяца билетов.

То есть в начале мес. - 4 бил. В конце - $n+4$ билета.
Тогда вероятность попасть Васе и Петя на концерты в начале месяца равна $\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1}$.

Вероятность этого же события в конце месяца:

$$\text{уа: } \frac{n+4}{k} \cdot \frac{n+3}{k-1}. \quad \cancel{k \in \mathbb{N}} \quad n \in \mathbb{N}, k \neq 1 \quad (\text{т.к. в классе никакими Петя и Вася})$$

Тогда имеем уравнение:

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = \frac{(n+4)(n+3)}{k(k-1)} \Rightarrow \frac{12 \cdot \frac{7}{2}}{k(k-1)} = \frac{(n+4)(n+3)}{k(k-1)}; \quad k, n \in \mathbb{N} \\ \therefore k(k-1) \neq 0$$

$$42 = n^2 + 7n + 12 \Rightarrow n^2 + 7n - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -10 \text{ - не negx.} \end{cases}$$

$n=3 \Rightarrow$ всего билетов $n+4 = 7$ билетов.

Проверка: $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = \frac{7 \cdot 6}{k(k-1)} \quad \therefore k(k-1) \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 42 = 42.$

Ответ: 7 билетов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} (x - 2\cos \alpha)(y - 2\sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

1) ~~Первое уравнение~~ задаёт

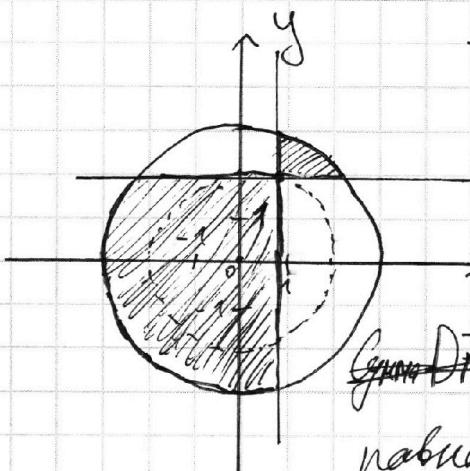
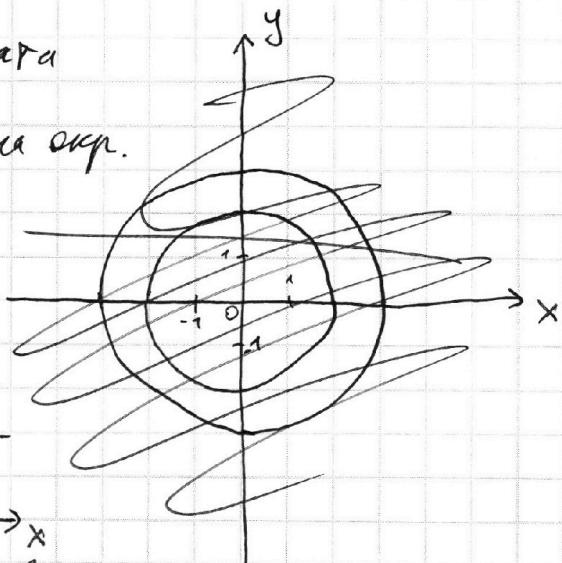
Уравнение $(x - 2\cos \alpha)(y - 2\sin \alpha) = 0$ задаёт вертикальную и горизонтальную прямую, точка пересечения которых ~~принадлежит~~ лежит на окружности

с центром в начале координат и радиусом 2.

2) $x^2 + y^2 \leq 9$ — первенство задаёт круг с центром в нач. коорд. и радиусом 3.

В первом кв-ре координата

точки пересеч., лежащей на окр.
является от α .



~~Сумма длин~~
~~дуг~~ фигуры всегда
равна одному замкнуто,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как угол между прямолинейными секущими дуги всегда прямой. \Rightarrow Суммарная угл. мера дуги $= 90^\circ \cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow$ Суммарная длина дуг равна половине длины окружности.

~~Длина окр~~ Сумма длии дуг диаметра равна ~~3π~~, ~~3π~~. πR , где R -рад. окружн. \Rightarrow ~~3π~~ 3π .

След-но, нам необходимо максимизировать сумму длии отрезков вертикаль и горизонт. прямых, ~~принадлежащих~~ где отрезки ~~принадлежат~~ находятся внутри окружн. с радиусом 3.

Пусть ~~эта~~ точка, в кои $(x_0; y_0)$ - коорд. пересеч.

~~точек~~. Пусть так, чтобы сумма ~~составленных~~ всех отрезков была максимальной.

~~точек~~ $(x_0; y_0)$ и $(x_b; y_b)$ - точки пересеч. ~~вертикаль~~ ^{составленных} и горизонталь^{ной} прямой с окружностью

радиуса 3. Тогда: $y_b = \sqrt{9-x_0^2}$; $y_0 = \sqrt{9-x_b^2} \Rightarrow x_b = \sqrt{9-y_0^2} = \sqrt{9+y_0^2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сумма длин отрезков фокусов, ~~расстояния~~ радиуса

$2(x_b + y_b)$, где y_b, x_b - коорд. коорд. (рассл.)

Решение, т. к. ~~это~~ симметрично можно отр.)

$$2(\sqrt{5+x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}) - \max.$$

Пусть $k = \sqrt{5+x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2}$, где k - макс. ~~значение~~ ~~значеніє~~.

$$k^2 = 16 + 2\sqrt{(5+x_0^2)(9-x_0^2)} \Rightarrow k^2 - 16 = 2\sqrt{45+4x_0^2-x_0^4}.$$

$$(k^2 - 16)^2 = -4x_0^4 + 16x_0^2 + 160. \text{ Заменим } x_0^2 = t > 0.$$

~~Максимум параболы~~ ~~на параболе~~ макс.

$$\text{Вершина: } \frac{-16}{-8} = 2. \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow x_0 = \sqrt{2}, y_0 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$$

Сумма отрезков фокусов:

$$x_b = \sqrt{7}; y_b = \sqrt{2}.$$

~~Решение~~: $2(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{7}$. - Сумма отрезков фокусов.

Перевод: $4\sqrt{7} + 3\pi$.

Ответ: $4\sqrt{7} + 3\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \underline{\underline{a \alpha \alpha \alpha}} : 1111$$

Если $C = \underline{\underline{-\Sigma}}$: $\Rightarrow C; 5; -$

$$B = \underline{\underline{1 - -}}$$

$$C = \underline{\underline{-5}}$$

$$ABC = n^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

~~$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$~~

~~$$x - y - 3 = 0$$~~

$$(x = y + 3)$$

$x, y > 0.$

$$\boxed{x = -y - 1.}$$

$$\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array}$$

$$y \neq -3$$

$$x \neq 3$$

$$(x+y+1 \neq 0) ?$$

~~$$(x+y) = -1?$$~~

$$x = -2$$

$$y = 1$$

$$x = -3$$

$$y = 2$$

$$x = -2$$

$$x^2 - y^2 - 9xy =$$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

~~$$3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2$$~~

~~$$3y^2 + 27y + 27 - 9y^2 + 27y = -27.$$~~

$$8y^2 + 54y + 27 - 8y^2 + 27y = -27. \Leftarrow$$

$$(-2y-1)(y^2 + 2y + 1 + (-y-1)y + y^2) - 9(-y-1)y = \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2. \end{array}$$

~~$$= -2y(-2y-1)(y^2 + 2y + 1 - y^2 - y - 1) + 9y^2 + 9y =$$~~

~~$$= -2y(-2y-1)(y^2 + y + 1) + 9y^2 + 9y = -8 - 1 + 18 = 9.$$~~

~~$$= -2y^3 - 2y^2 - 2y - y^2 - y - 1 + 9y^3 + 9y = -27 - 8 + 54 =$$~~

$$= 54 - 35 = 19$$

~~$$-2y^3 + 8y - 8y - 1 = 1 + 8 - 18 = -9$$~~

$$-\frac{1}{y+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+y} =$$

$$= \frac{-y+y+1-1}{y^2+y} = 0?$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1) \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y. \quad \begin{matrix} x+y \\ \beta = x-y \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}, y = \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cancel{\sin(x+y)} &= (\sin(x-y)) = -2 \sin y \cos x \\ &= 2 \sin x \cos y \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}. \end{aligned}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y \quad \left(\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0? \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4} - 2 \sin \frac{11(\pi-y)}{2} \cos \frac{11(\pi-y)}{2} \cos^2 \theta \sin nx =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi(\text{key})}{2}} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x. \quad \cancel{\frac{\pi(\text{key})}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \pi k.$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y)) \quad | \quad x+y = t + 2\pi k$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y)) \quad | \quad y = -x + 1 + 2\pi k.$$

$$-\left(\cos\left(\frac{\pi_x - \pi_y + 2\pi_k}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi_x - \pi_y - 2\pi_k}{2}\right)\right) = \left(\cos\frac{\pi_x - \pi_y + 2\pi_k}{2} + \cos\left(\frac{\pi_x - \pi_y - 2\pi_k}{2}\right)\right)$$

$$-\cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \cos \cancel{\frac{\pi x + \pi y}{2}} = \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} + \cos \cancel{\frac{\pi x + \pi y}{2}}$$

$$\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0.$$

$$\frac{\pi(3^k - 1)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi_n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x-y}{3} = \frac{1}{2} + n \quad y = 3x - 1 - 2n \quad \underline{(x; 3x-1+2n) ?}$$

$$3k - y = 1 + 2k$$

$$\cos\left(\frac{r_x - r_y}{2} - r_x = \frac{r_x + r_y}{2}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{y} = 2 \\ \arccos \frac{y}{x} = \beta.$$

$$-1 \leq \frac{x}{y}; \frac{y}{x} \leq 1$$

$$x \in [-4, 4]$$

$$y \in [-9, 9]$$

$$\arccos \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \neq -1 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq -y \\ y \neq -x \end{cases}$$

11/2

2

$$|x| + |y| = 4 + 2w$$

$$|x| + |y| = 4 + 2w$$

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

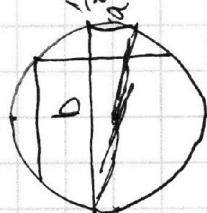
$$(-3; -9 - 1 + 2w) = -10 + 2w = -10, -8, -6, -4, -3, -2, 0, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$$

$$(-2; -7 + 2w) \Rightarrow y = -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9 - 8$$

$$(-1; -4 + 2w) \Rightarrow y = -8, -6, -4, -2, 0, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$$

$$0; -1 + 2w; -2; -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$$

$$(4; 12 + 2w) \Rightarrow y = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$$



Безже 9?

$$8 \cdot 9 = 72$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

11.101

1111, 101, 55

a. 11.101, 101, 55

5555 101 55

404 902

n-дільники
членів.

K - кількість членів.

$$\frac{4}{K} \cdot \frac{8}{K-1} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4+n}{K} \cdot \frac{4+3+n}{K-1}$$

$$\frac{K^2 - K}{K^2 - K} = 0?$$

$$K = 0, 1$$

$$\frac{12 \cdot 7}{K^2 - K} = \frac{(4+n)(3+n)}{K^2 - K}$$

$$6 \cdot 7 = 12 + 3n + n^2$$

$$D = 49 + 120 = 13^2 \\ n = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{2} = 3,$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Проверка: k - конв. в.о.

$$\text{знач} n=3.$$

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = \frac{7}{2} = \frac{7}{k} \cdot \frac{6}{k-1}$$

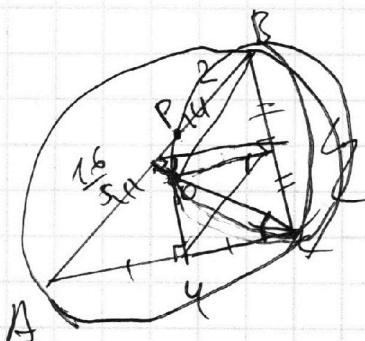
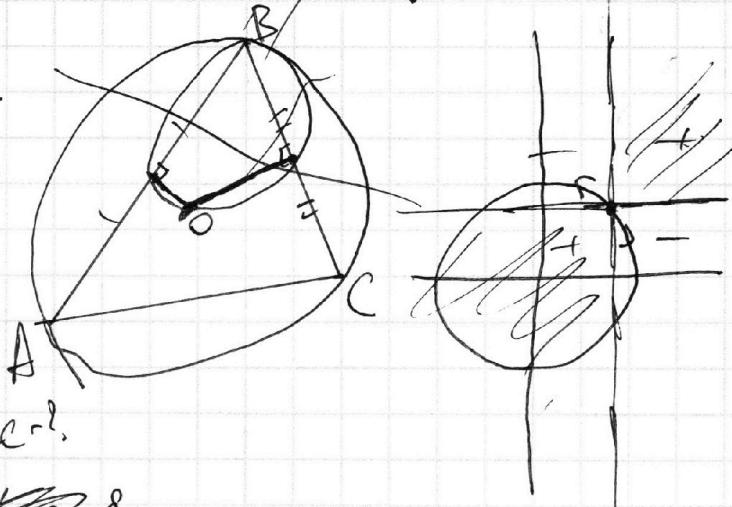
$$\frac{12 \cdot 7}{2(k^2 k)} = \frac{84}{k^2 k}$$



Ответ: 7.

$$x = 2 \cos \alpha \in [-2, 2]$$

$$y = 2 \sin \alpha \in [-2, 2]$$



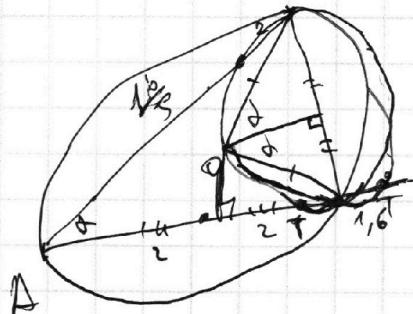
$\triangle ABC$ - ?

$$\frac{16}{5} \cdot 2 = \frac{26}{5}$$

$$\frac{16}{5} \cdot 2 = \frac{26}{5} \cdot \frac{52}{5}$$

$$\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = \frac{260 + 26 \cdot 6}{25}$$

$$4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4 \leq 9.$$



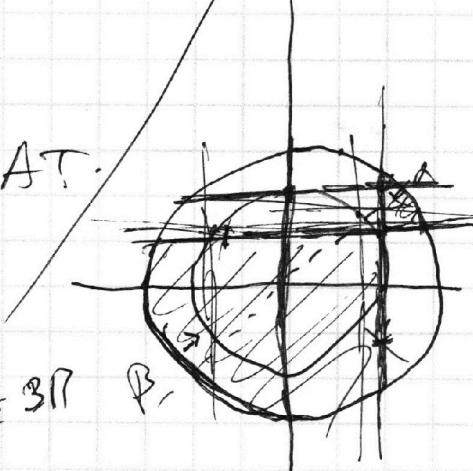
$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 2 - 13}{25} = \frac{80 - 25}{25} = \frac{55}{25} = \frac{104}{25}$$

~~стекло~~

$$\frac{16 \cdot 26}{100} = AT.$$

$\angle B = 3\pi$

$2\pi R = \pi R$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k^4 + 196 - 28k^2 = 4(9-x^2)(5-x^2) = 4(45 - 5x^2 + x^4 - x^6)$$

$$\text{дискр} - x^4 + 4x^2 + 45 - \max. = \frac{-4}{-42} = \cancel{x^2} = \cancel{0}.$$

~~16+16=32~~

$$-x^4 + 4x^2$$

$$t^2 = -46 + 45 \min.$$

$$-t^2 + 4t$$

$$k^4 + 196 - 28k^2 = \cancel{98}$$

$$k^4 - 28k^2 + 98 = 0.$$

$$t^2 - 28t + 98 = 0 \quad t = 2\sqrt{7}.$$

$$D = -784 - 4 \cdot 98 = \frac{28}{-28}$$

$$-784 - 392 = \frac{224}{-56}$$

$$-384 + 8 = 392 = \frac{192}{-192}$$

$$2k = 4\sqrt{2}$$

~~128-8~~

$$\sqrt{392} = 2\sqrt{98} = 2\sqrt{2 \cdot 49} = 14\sqrt{2}.$$

$$t = 2\sqrt{7}$$

$$x_0 = \sqrt{2}, \quad y_0 = \sqrt{2}.$$

$$2\sqrt{8} + 2\sqrt{6} =$$

~~P~~

$$\alpha_2 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$$2\sqrt{8} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}?$$

$$P = 4\sqrt{7} + 3\sqrt{2}.$$



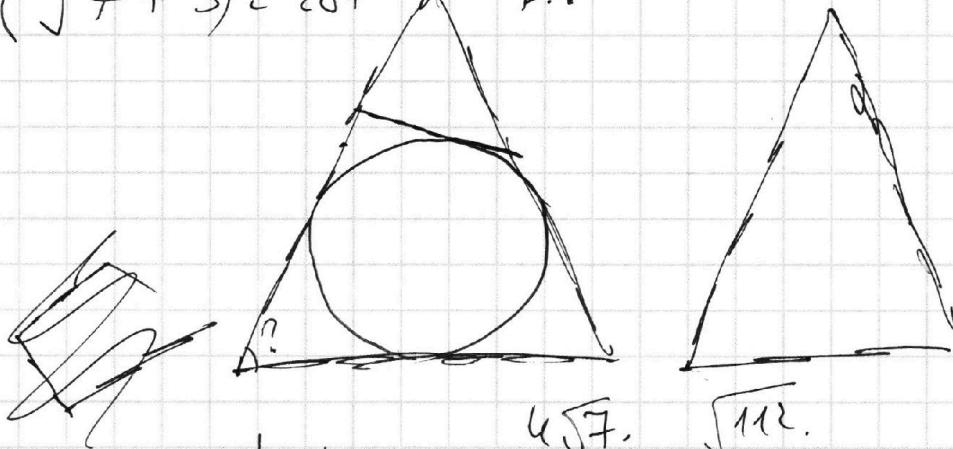
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$2(\sqrt{7} + 3) = 2\sqrt{7} + 6.$$



$$4\sqrt{7}, \sqrt{112}.$$

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x \in [-3, 3].$$

$$42 - y^2 = 9$$

$$y^2 = 7$$

$$y = \sqrt{7}$$

$$2y + 2x - \text{max?}$$

$$x + y - \text{max.}$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$2\sqrt{7} +$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$\exists y^2 = 9 - x^2.$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad x + \sqrt{9 - x^2} - \text{max?}$$

$$x^2 + 9 - x^2 + 2x\sqrt{9 - x^2} - \text{max.}$$

$$x^2 = 9 - y^2 = 6.$$

$$x_0 - \text{const.}$$

$$y_0 = \sqrt{9 - x_0^2}$$

$$y_0 = \sqrt{9 - x^2}$$

$$2 + \sqrt{9 - x^2} - \text{max.}$$

$$4x^2(\sqrt{9 - x^2}) - \text{max.} \quad \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{5x^2} \leq k$$

$$36x^2 - 4x^4 - \text{max.} \quad k^2 \geq 14 + 2\sqrt{--}$$

$$2\sqrt{8} + 2\sqrt{6} = x_0^2 \sqrt{9 - x_0^2} - \text{max.}$$

$$x_0^4 + 9x_0^2 - \text{max.}$$

$$2(\sqrt{8} + \sqrt{6}) \quad \sqrt{5 + x^2} - \text{max.}$$

$$-t^2 + 8t - \frac{9}{2} = 4, 5, \therefore \frac{9}{2} = t^2.$$

$$2(\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{5 + x^2}) - \text{max?} \quad x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$k^2 - 14 \geq 2\sqrt{--}$$