



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{---} / \cancel{\alpha} & \sin \alpha = 0 \\ &\cancel{\alpha} / \cancel{6^2} & \cos \alpha = 1 \\ &\times 27 & \cos 90 = 0 \\ &189 & 27 \cancel{6} - 6 = 0 \end{aligned}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = 1111 \cdot a$, $0 < a \leq 9$, a -целое

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 1111, A \cdot B \cdot C - \text{квадрат} \Rightarrow +k \cdot 1111 = 11 \cdot 101 \\ ABC : 1111^2$$

$$\Rightarrow B \cdot C : 1111$$

$$\Rightarrow B \text{ или } C : 101 \\ C - \text{двухзнач.} \Rightarrow C < 101$$

$\Rightarrow B : 101$, одна из цифр B равна 1

* k -целое число
 $0 < k \leq 9$ $\Rightarrow B = 101$ ($+k$, иначе $B = k \cdot 101 = \text{кок}$)

$\Rightarrow C : 11$ $C = k \cdot 11 = \text{кок}$, хотя для одна из цифр равна 5

$$\Rightarrow C = 55$$

$$ABC = 1111^2 \cdot 5 \cdot a \Rightarrow a = 5$$

Ответ: $(A, B, C) = (5555, 101, 55)$

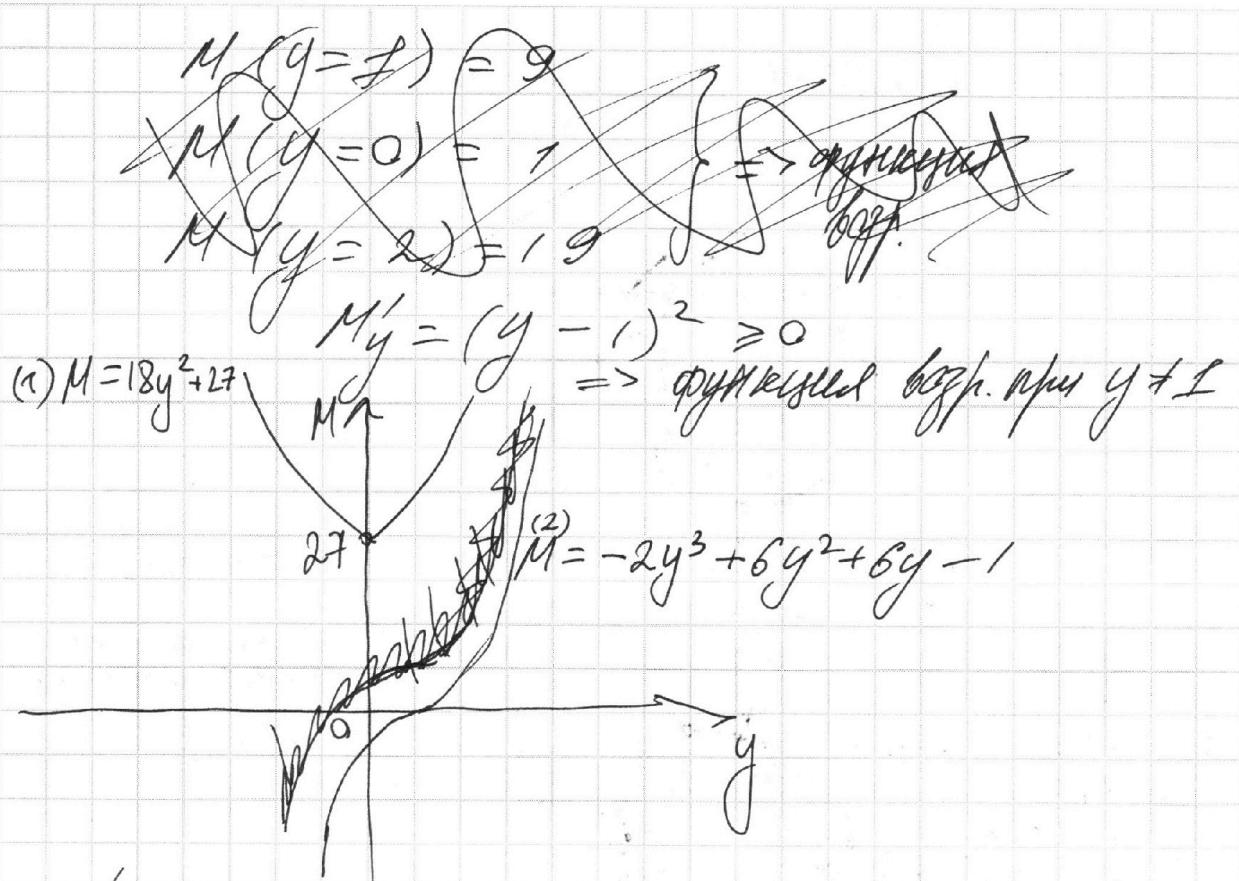


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Какие точки не достаются на ОДЗ?

1) $y=0$ $M_1(0) = 27$ $M_2(0) = -1$

2) $x=0 \Leftrightarrow y = f(x) = y = 3$ \leftarrow не достается M_1, M_2
 $M(y=3) = -1$ $M(y=-1) = -1$ \leftarrow достается M_2

$M(y=-3) = 89$ \leftarrow достается M_1

2) $x=0$ $y=-3$ $f(M_1) = y = -1$ $f(M_2) = y = 3$

$M_1(f(-3)) = 189$ $M_2(-1) = 1$

\leftarrow достается M_2 \leftarrow не достается M_1 ,
 M_2

Ответ: $M \in (-\infty; +\infty) / \{-1, 3\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x+y+1 = \frac{xy}{x-3} - \frac{xy}{y+3} + \frac{xy}{(x-3)(y+3)}$$

$$\cancel{x^2y} + 3x^2 - 3xy - 9x + \cancel{xy^2} + 3xy - 3y^2 - 9y + \cancel{xy} + 3x + 3y - 9 =$$

$$= \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{3xy} + \cancel{3xy} + \cancel{xy}$$

$$3x^2 - 3y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - (y^2 + 4y + 3) = 0$$

(решение отн. x) $D = 4 + 4y^2 + 16y + 12 = 4y^2 + 16y + 16 =$

$$\cdot = (2(y+2))^2$$

~~$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$~~ $x = \frac{2 \pm 2(y+2)}{2}$

$$x = 1 \pm (y+2)$$

$$x = \begin{cases} y+3 & (1) \\ -y-1 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{ll} y+3=0 & y=-3 \\ -y-1=0 & y=-1 \end{array}$$

подставим (1) в M

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = \cancel{y^3} + (27y^2) + \cancel{27y} + \cancel{27} - \cancel{9y^3} - \cancel{27y}$$

$$M = 18y^2 + 27$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

подстановка (2) 64

$$M = (-y-1)^3 - y^3 - 9(-y-1)y = \cancel{\cancel{}}$$

$$M = -y^3 - 3y^2 - 3y - 1 - y^3 + 9y^2 + 9y$$

$$M = 6y^2 + 6y^2 + 6y - 1$$

~~Все же правильн~~

(1) парабола ветвями вверх

отк. y , вершина $y=0$
(min) $M=27$

$$(2) M'_y = -2\cancel{y} - 6y^2 + 12y + 6 = 0$$

$$\cancel{y^2} - 2y + 1 = 0$$

$$(y-1)^2 = 0$$

$$y=1$$

$$M''_y = -2y + 12$$

~~Все же правильн~~

$$\Rightarrow M''_y(y=1) = 0$$

~~Все же правильн~~

\Rightarrow точка перегиба

~~$M = 18y^2 + 27$~~

~~$M(y=1) = -2 + 6 + 6 - 1 = 9$~~

~~108~~
~~19~~

~~$M(y=0) = 1$~~

~~$M(5y+3y-19) = 98$~~

~~$M(y=2) = -16 + 24 + 12 - 1 = 19$~~

~~19~~

но $0 \leq 3$ где $M(x=0) \neq 0$

$M(y=0) = 1$ - значение недоступное

не доставляется

~~$M(x=0) = 1$~~

~~$M(x=0, y=0) = -3 - 13$~~

~~$M(y=1, x=0)$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

δ) 1) $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases}$
 $x \in [-4, 4] \quad y \in [-9, 9]$

2) $\arccos x < \pi$ при $x \neq \pm 1$
 $\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$ выполняется

~~При любых~~ $x \in [-4, 4] \quad y \in [-9, 9]$
~~однобр.~~ не равных нулю

\Rightarrow пар реш (x, y) $9 \cdot 19 - 1 = 170$

Ответ: 170



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

(если 6 этих местах не должно быть скобок,
то эта строка равна нулю
=>)

~~значит~~ $\alpha = \pi x \quad \beta = \pi y$

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta$$

~~$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$~~

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\textcircled{1} \quad 2\alpha = \alpha + \beta + 2\pi k$$

$$\alpha = \beta + 2\pi k$$

$$\pi x = \pi y + 2\pi k$$

$$\textcircled{2} \quad -2\alpha = \alpha + \beta + 2\pi k$$

$$\beta = -3\alpha + 2\pi k$$

$$\pi y = -3\pi x + 2\pi k$$

~~Ответ:~~ $x = y + 2k, k \in \mathbb{Z}$ $y = -3x + 2k$

Ответ: $y = \begin{cases} x + 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ -3x + 2k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

~~5) $\arccos \alpha \leq \pi, -1 \leq \alpha \leq 1$~~

~~1) $\arccos \frac{x}{a} + \arccos \frac{y}{b} \leq 2\pi$ при любых x, y~~

~~2) $\frac{x}{a} \leq 1 \quad \frac{y}{b} \leq 1$~~

~~3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq 0$ однозр. не нарушит ограничения~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - кол-во одиннадцаток.

В начале мыслу вероятность что Петя и Вася вместе попадут на конверт (которому достанутся билеты)

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$ - кол-во сп. всевозможных одиннадцаток помимо Петя и Вася

C_n^4 - кол-во сп. всевозможных одиннадцаток из n , которых достанутся билеты

x - на сколько билетов стало больше

Тогда аналогично получается вероятность в конце мыслу

$$\frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}}$$

$$\frac{\cancel{C_{n-2}^{2+x}}}{\cancel{C_n^{4+x}}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 3,5$$

$$\frac{(n-2)!}{(2+x)!(n-x-4)!} = \frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 4!}{n!} \cdot 3,5$$

$$(x+4)(x+3) = 42$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 13^2$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{2}, x \geq 0$$

$$x = 3$$

Ответ: 3

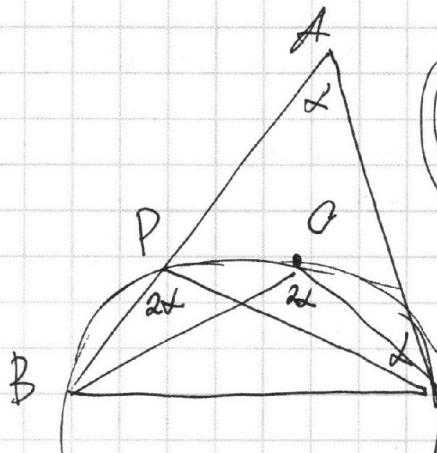


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



ВРСС - вис ~~из~~

Пусть $\angle BAC = \alpha$

тогда $\angle BOC = 2\alpha$

$\angle BPC = 2\alpha$

(один из оставшихся)

$\angle APC = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle PCA = 180^\circ - \angle APC - \angle PAC = \alpha$

$\Rightarrow AP = PC$ ($\because \angle PAC = \angle PCA$
 $\triangle PAC$ -равноб.)

$$AP = \frac{16}{5} = 3,2 \quad \cancel{\text{из}}$$

$$PC = 3,2$$

~~$AP = AC = 4$~~

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cos \alpha \cdot AP \cdot AC$$

$$AC^2 = 2 \cos \alpha \cdot AP \cdot AC = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{4}{2 \cdot 3,2} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$AB = AP + BP = 5,2$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{5,2 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{2 \cdot 8} = 1,3 \sqrt{39}$$

Ответ: $1,3 \sqrt{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{array} \right.$$

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

окр. $(0,0)$ $r=3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{array} \right.$$

(прав. остр. сектор
рисунок выходит
аналогично)

600
множь
 $\cos\alpha > 0$
 $\sin\alpha > 0$

$$\begin{aligned} -2 \leq 2\cos\alpha &\leq 2 \\ -2 \leq 2\sin\alpha &\leq 2 \end{aligned}$$



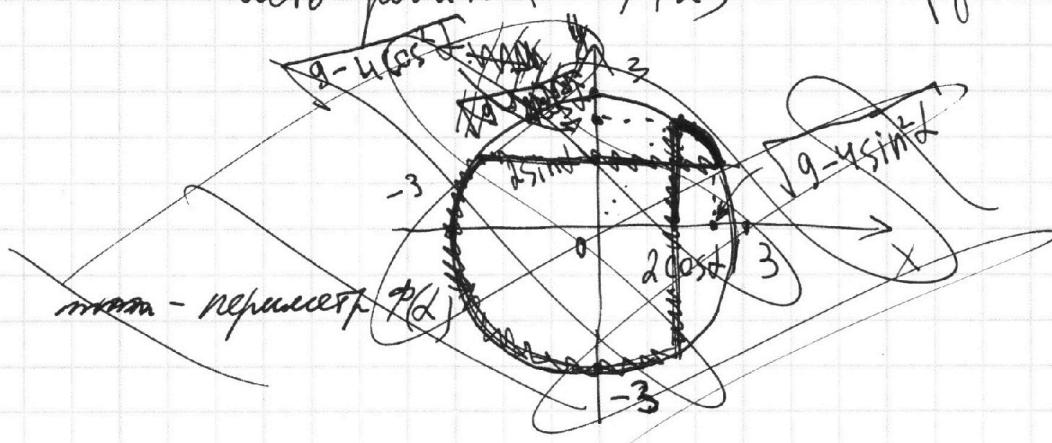
изображение
точка пересеч.

$$\begin{aligned} y &= 2\sin\alpha \\ x &= 2\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\text{беседа} \leq 8$$

ко всем
выходи
окружности

закрашенная
часть - решение - $\varphi(\alpha)$





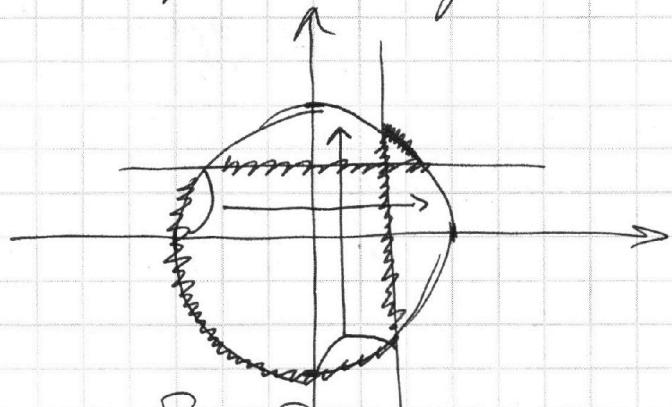
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

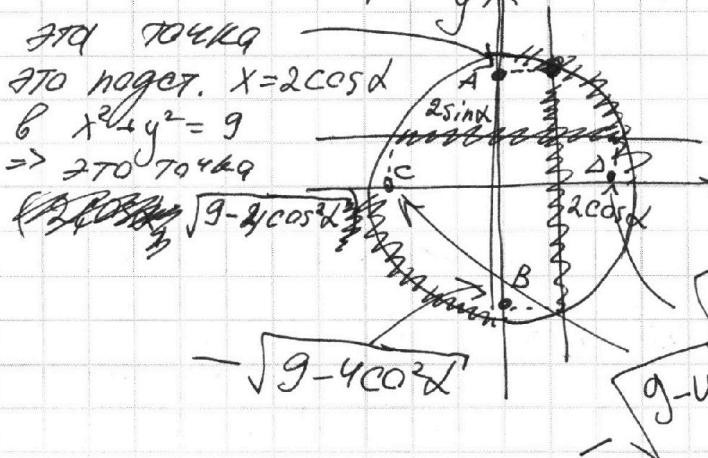
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим на примере



Чтобы было проще считать периметр
используем равногубый синус!



$$P = \frac{2\pi r}{2} + AB + CD$$

периметр половины
1 периода окружности

$$P = \pi \cdot 3 + 2 \sqrt{9 - 4\cos^2 d} + 2 \sqrt{9 - 4\sin^2 d}$$

разлагаем периметр по зонам

$$\text{уровень max } \sqrt{9 - 4\cos^2 d} + \sqrt{9 - 4\sin^2 d}$$

значение d при котором $P - \max$

составляет с $\text{значением } \pi d$
при π котоом \max

$$f = (\sqrt{9 - 4\cos^2 d} + \sqrt{9 - 4\sin^2 d})^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f = 9 - 4\cos^2 \alpha + 9 - 4\sin^2 \alpha +$$

$$+ \sqrt{(9 - 4\cos^2 \alpha)(9 - 4\sin^2 \alpha)}$$

$$f = 14 + \sqrt{81 - 36\sin^2 \alpha - 36\cos^2 \alpha + 16\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 36$$

$$f = 14 + \sqrt{45 + 16(1 - \sin^2 \alpha)\sin^2 \alpha}$$

↑
max при $(1 - \sin^2 \alpha)\sin^2 \alpha \rightarrow \max$

~~найдем $\sin \alpha$~~

~~откуда $\sin \alpha = 0,5$~~

$$\sin^2 \alpha = 0,5$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

~~Чтоб:~~ $\alpha = 45^\circ + 2\pi k$

$$P_{\max} = \pi \cdot 3 + 4 \cdot \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \pi \cdot 3 + 4\sqrt{7}$$

достигается при ~~$\alpha = 45^\circ + 2\pi k$~~

$\alpha = 45^\circ + 2\pi k, k\text{-целое}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in [-4; 4] \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$y \in [-9; 9]$$

$$\begin{aligned} & x^3 - xy^2 - 2x^2 - 4xy - 3x \\ & + x^2y - y^3 - 2xy - 4y^2 - 3y = 0 \end{aligned}$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta =$$

$$x^3 - y^3 - 6xy - 3xy = x^4y^2 - x^2y^2 + 2x^2$$

$$+ 4y^2 + 3x + 3y - 3xy$$

$$\sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos^2\alpha \rightarrow \cos\alpha \cos\beta$$

$$(a+b)^3$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$(8(a^2+2ab)(a+b))$$

$$(a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3) \quad \text{cos}(2\alpha)$$

$$+ \text{cos}(\alpha + \beta) \quad (?)$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 2y - 4 \quad \cos\alpha = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$= \cos(180^\circ + \alpha) = \underline{\cos(\pi + \alpha)}$$

$$1+y+2$$

$$1-y-2$$

$$\alpha = \beta + \pi \cdot k.$$

$$x = y + k, k - \text{целое}$$

$$n \text{ балла } n \text{ учн.-классиков}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\text{два балла этим}}{\text{и два любым другим}}$$

$$x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$D = 4 + 4y^2 + 16y + 12$$

$$4y^2 + 16y + 16$$

$$y^2 + 4y + 4$$

$$\frac{-7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{C_{n-2}^{x+u}}{C_n^{4x}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 3,5$$

$$\frac{(n-2)! \cdot (x+4)! \cdot (n-x-4)!}{(x+2)! \cdot (n-x-4)! \cdot \pi!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-u)! \cdot u!}{2 \cdot (n-u)! \cdot \pi!} \cdot 3,5$$

$$(x+u)(x+3) = 12 \cdot 3,5 = 7 \cdot 6 = 32$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169 = 13^2$$

$$\cdot x = 13; -10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a$$

$B = 101$, т.к. из 101 и одна цифра = 1 и трехзнач.

$$C = 55$$

$$a = 5$$

$$\sim L \oplus 5555 \quad 101 \quad 55$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 101 \\ \hline 1111 \\ + 1111 \\ \hline 11111 \end{array}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy \quad \checkmark \quad (x-3)(y+3) \\ xy - 3y + 3x - 9$$

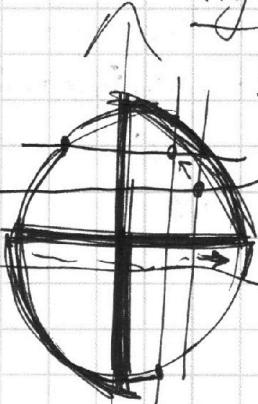
$$x+y+1 = \frac{xy}{x-3} + \frac{xy}{y+3} + \frac{xy}{(x-3)(y+3)}$$

$$\cancel{x^2y} - \cancel{3xy} + 3x^2 - 9x + \cancel{xy^2} - \cancel{3y^2} + \cancel{3xy} - \cancel{9y}$$

$$+ \cancel{xy} - 3y + 3x - 9 = \cancel{xy} - \cancel{3y} + \cancel{3x} - \cancel{9} =$$

$$= \cancel{x^2y} + \cancel{3xy} + \cancel{xy^2} - \cancel{3xy} + \cancel{xy} \quad g - 4\cos\alpha + 9 - 4\sin^2\alpha$$

$$3x^2 - 3y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$$



$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

$$(x-y)(x+y) - 2(x+y) - 2y - 3 = 0$$

$$(x-y-2)(x+y) = 2y + 3$$

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 2y^2 - xy - 3 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 2(x+y)(x-y) - (2y - 2y^2 - xy - 3) = 0$$

$$x^3 - y^3 - 2x^2 + 2y^2 - \cancel{2xy + 2xy^2} + \cancel{x^2y + 3y} \\ - 2xy - 2xy^2 - \cancel{x^2y - 3x + 2y^2 + 2y^3} + \cancel{xy^2 + 3y}$$

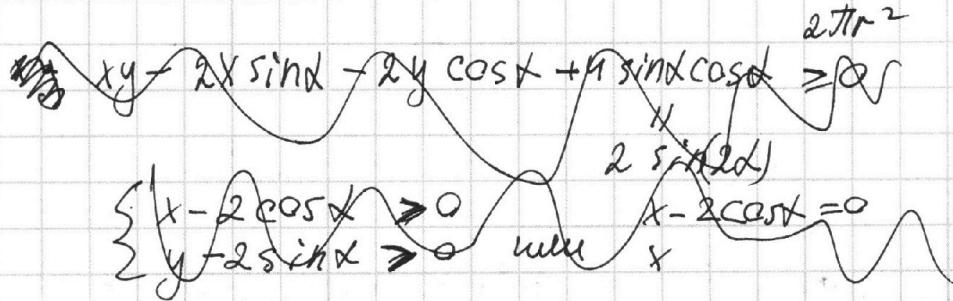
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 \leq 9 \quad \text{окр. } (0;0) \quad r=3$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \alpha \\ y &= 2 \sin \alpha \\ x - 2 \cos \alpha &> 0 \\ 2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha &> 0 \\ x - 2 \sin \alpha &< 0 \end{aligned}$$

$$x, y - \text{const}$$

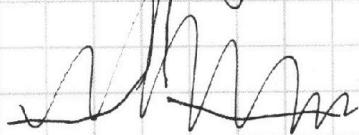
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy}$$

$$f(x, y) = f(y, x)$$

$$y^3 - f^3 - 2\pi r \quad 2\pi r$$

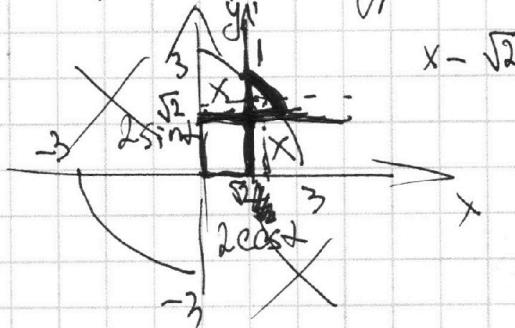
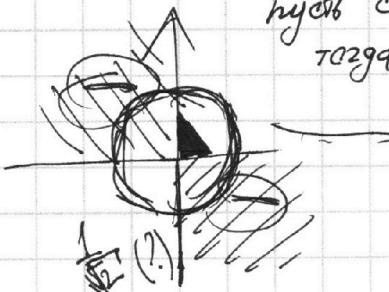


$$1 + \frac{1}{x} = ky - \frac{4}{x}$$

$$y = \frac{1 + \frac{1}{x}}{k - \frac{4}{x}}$$

нужен $\cos \alpha \cos \alpha \sin \alpha = 0$
то есть гр. = I
 $600 x \geq 2$

$$\sqrt{2}x$$



$$x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 +$$

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + &\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} \\ &+ \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - xy^2 - 2x^2 - 4xy - 3x \\ + xy - y^3 - y - 2xy - 4y^2 - 3y = 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$x+y+1 = \frac{xy}{x-3} + \frac{xy}{y+3} + \frac{xy}{xy-3y+3x-9}$

~~$AB^2 + AC^2 - 2\cos A = BC^2$~~

~~$x^2y + 3x^2 - 3xy - 9x + xy^2 + 3xy - 3y^2 - 9y$~~

~~$+ xy + 3x - 3y - 9 =$~~

~~$xy^2 + 3xy + x^2y - 3xy + xy$~~

~~$1 \neq 1$~~

$\angle BOC = \angle BPC = 2\angle BAC$

$\angle ACP = \angle PAC$

$PA = PC$

$\cancel{A^2 + AC^2 - 2\cos A \cdot PA \cdot AC = PC^2 / PA = 3,2}$

$\angle PAC :$

$AC = 2\cos A \cdot PA$

$\cos A = \frac{AC}{2 \cdot PA} = \frac{4}{6,4} = \frac{5}{8}$

$AC = 4$

$PC = 3,2$

$\frac{64}{3,9} = \frac{25}{8}$

$\cos A = \frac{5}{8}$

$\sin A = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!