



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Н.к А - пятизначное и состоит из однаковых цифр, то  $A : 1111 = 11 \cdot 101$ , тогда одно из чисел В или С : 101 (н.к если В и С не делится на 101, то  $ABC \nmid 101$ , но  $ABC \times 101^2 \Rightarrow ABC$  не квадрат на чётном числе), н.к С пятизначное, то  $C \neq 101$  ( $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$ : всего 6 чисел),  $B \times 11 \Rightarrow C : 11$ , тогда  $C = 11$  (из чисел 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 всего 1 число, 6 которых есть цифра "1"), тогда если  $B = 707$ , то  $B : 7$ , тогда осталось из чисел А и С : 7,  $C = 11 \Rightarrow A : 7$ ,  $A : 1111 = 7$   
 $A = 77777$

Ответ:  $A = 77777$ ,  $B = 707$ ,  $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

Изложим условие в виде  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} +$

+  $\frac{3}{(x-4)(y+4)}$  приведем к одному знаменателю

отдельно левую часть разберем и отдельно правую.

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$  из того, что  $x > 0, y > 0$

следует, что  $y+4 > 0, xy > 0, x+y+3 > 0$ , тогда

если  $y$  будет равен ненулевому числу,

не равен 0, если равен, то знаменатель

уподобим равен  $xy = (x-4)(y+4)$  ( $x \neq 4$ )

$xy = xy + 4x - 4y - 16 \quad x-y = 4$ , заменим, что

$x^3 - y^3 - 12xy - 64 = (x-y-4)(x^2 + y^2 + 16 + xy + 4x - 4y)$ ,

тогда  $x^3 - y^3 - 12xy = (x-y-4)(x^2 + y^2 + 16 + xy + 4x - 4y) + 64$

$x-y=4 \Rightarrow x^3 - y^3 - 12xy = 64 = M$

Ответ:  $M = 64$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ тогда}$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right),$$

$$\text{получаем: } \sin \pi y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos \pi y$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y+x)\right) \cdot \sin \pi y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos \pi y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) =$$

$$- \sin \pi y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \quad x+y = 1+2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \pi y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) - \sin \pi y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x\right) = 0 \quad 3y - x = 1+2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Получаем решения  $(t_1; 2k+1-t_1)$  и

$$(t_2; \frac{2n+1+t_2}{3}), \quad t_1 \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(значе эти решения могут пересекаться)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

записано

записано

записано

записано

$\sqrt{3}$  (нужен нечетн)

$$\text{5) } \arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{x} \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{одз:}$$

$x \in [-\gamma; \gamma]$ ,  $y \in [-\gamma; \gamma]$ , заметим, что

$$\arccos \frac{x}{y} \geq 0, -\arcsin \frac{y}{x} \geq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$\arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{x} \geq -\frac{\pi}{2}$  не нулю

также  $\arccos \frac{x}{y} = 0, -\arcsin \frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2}$  означает

$x \neq \gamma$   $y \neq \gamma$  оговариваем тогда ~~если~~ неравенству

это выполнимо наим:  $x \in [-\gamma; \gamma]$ ,  $y \in [-\gamma; \gamma]$

и  $x \neq \gamma$   $y \neq \gamma$ , заметим что уравнение

$x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ , заметим, что уравнение из

нужна "и" удовлетворяют же наим  $x$  и  $y$ ,

также  $x$  - четное,  $y$  - четное или

$y$  - нечетное,  $x$  - четное, при  $x$  - нечетном

если варианты  $x = \gamma; y \in \{-\gamma; -2; 0; 2\}$  и др.

и  $x \in \{-\gamma; -5; -3; -1; 1; 3; 5\}$   $y \in \{-\gamma; -2; 0; 2; 4\}$

35 вариантов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

При  $x$  - четное:  $x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$ ,

$y \in \{-3; -1; 1; 3\}$  28 вариантов

Всего вариантов:  $4 + 35 + 28 = 67$  вариантов

Объем: а)  $(t_1; 2k+1-t_1)$ ,  $(t_2; \frac{2n+1+t_2}{3})$ ,

$t_1 \in \mathbb{R}$ ,  $t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

67 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$  (продолжение)

Пусть дополнителью было получено  $a$ -ий листов, тогда всего листов  $n+a$ , всего вариантов распределения листов среди оставшимся. В конце мысль :  $C_n^{a+n} = \frac{n!}{(a+n)!(n-a)!}$ , вариантов, когда первые  $n$  листов получат фильмы в коробке мысль :  $C_{n-2}^{a+2} = \frac{(n-2)!}{(a+2)!(n-a)!}$  (дадим два фильма первым и т.д., в итоге по одному), а оставшимся  $a+4$  фильма распределены по остальным  $n-2$  коробкам), вероятность получения листов первых и всех одновременно в коробке мысль :  $\frac{(n-2)!}{(a+2)!(n-a)!} \cdot \frac{(a+n)!(n-a)!}{\cdot n!} = \frac{(a+3)(a+4)}{(n-1)n}$

Проверка по условию  $11 \cdot \frac{12}{(n-1)n} = \frac{(a+3)(a+4)}{(n-1)n} \Rightarrow a = -15$  (не подходит) или  $a = 8$  (подходит), в итоге мысль виделось  $a+4 = 12$  фильмов

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{4}$ 

Пусть всего  $n$  - одиннадцать классиков, тогда  
 всего вариантов распределения блоков в начале  
 месяца  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$  ( $n > k$ , т.к. если  $n \leq k$ , то  
 вероятность получит блоки все и никто  
 в начале 1, в конце меньше 1), а вероятность  
 не больше 1), ~~вероятность~~ того, что Петя и  
 Вася получат блоки в начале месяца

$C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}$  (задача № 1 блоку Васе  
 и Петя, а остальные 2 распределены по оставшим)

вероятность полученных блоков в начале месяца

однозначно Петя и Вася?  $\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 4!}{n!} =$

$$= \frac{12}{(n-1) \cdot n}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

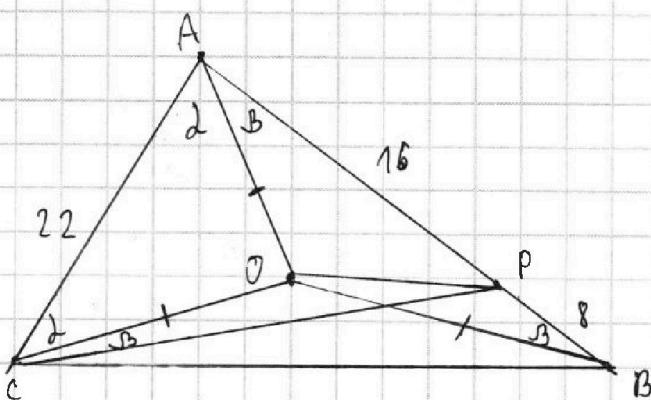


- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5}$$



Пл.к. о - центр описанной окружности  $\triangle ABC$ , но

$AO = OB = OC$ , т.к.  $\angle CAO = \alpha$ ,  $\angle BAO = \beta$ , тогда

$\angle ACO = \gamma$  ( $\triangle AOC$  - равнод.),  $\angle ABO = \beta$  ( $\triangle AOB$  - равнод.),

из биссектрисами  $COPB \Rightarrow \angle OCP = \angle OBP = \beta$

(также, они лежат на 1 хорде), тогда

$\triangle APC$  - равнод ( $\angle ACP = \angle PAC = \alpha + \beta$ )  $\Rightarrow CP = 16$

по Т. cos-ову для  $\triangle APC$ :  $16^2 = 22^2 + 16^2 -$

$$- 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 22 \cdot 16 \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}, \quad \alpha + \beta < 60^\circ$$

$$\text{тогда} \quad \sin(\alpha + \beta) > 0, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)}$$

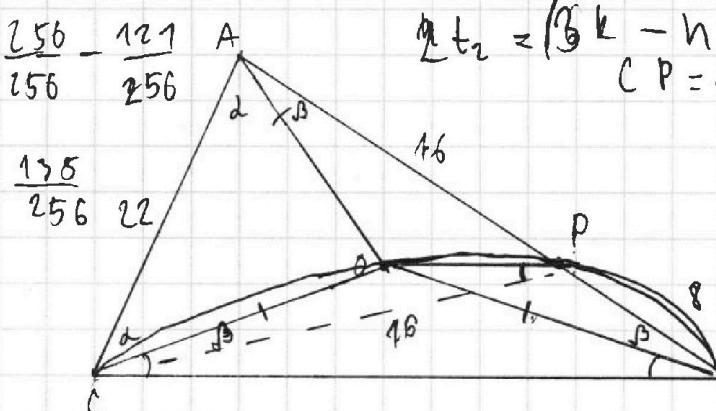
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot AC \cdot AB = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 16 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \quad \text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$t_2 = (3k - n + 1)$$

$$CP = 16$$

$$x \in [-7; 6]$$

$$y \in [-4; 3]$$

$$n+y \in [-11; 9]$$

$$n+y = 1+2k$$

$$2n+1+t_2 = 6k+3-3t_2$$

$$16^2 = 22^2 + 16^2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 22 \cdot 16$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cdot 16 \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}$$

К однородным.  $a$  - гор. диаметр

$$(\sin(\pi y) - \sin(\pi x)) \sin(\pi y) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi x)) \cos(\pi y)$$

$$\sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \quad 11 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{16} = \frac{9\sqrt{15}}{2}$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin^2(\pi y) + \cos(\pi x + \pi y) - \cos(\pi x - \pi y) =$$

$$= 2 \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x + \pi y) + \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2(\sin^2(\pi y) - \cos^2(\pi y)) = 2 \cos(\pi x - \pi y)$$

$$(n+y-1)(n^2+y^2+16+ny+4n-4y) = n^3 + 2y^2 + 16x + x^2y + xy^2 - 4ny$$

$$-5y^2 - y^3 - ny - 2y^2 - 4xy + ny^2 - 4x^2 - 4y^2 - 8n - 4ny - 16x + 16y =$$

2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 = 11 \cdot 101 \quad 1 \ 2$$

$$A : 101 = 11 \cdot 101$$

$$B : 101 \quad B = 707 \quad C = 11$$

$$A = 7777 \quad B = 707 \quad C = 11$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \quad x^3 - y^3 - 12xy .$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+x} + \frac{3}{xy+4x-4y-16}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy+4x-4y-16}$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \quad x - y = 4 \quad x = y + 4$$

$$x^3 - y^3 - 3 \cdot 4xy = (x - y - 4)(x^2 + y^2 + 16 + xy - 4y + 4)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) =$$

$$= a^3 + ab^2 + ac^2 - \cancel{ab^2} - abc - \cancel{ac^2} + \cancel{ba^2} + b^3 +$$

$$bc^2 - \cancel{a^2b^2} - \cancel{b^2c} - abc + \cancel{a^2c} + \cancel{b^2c} + c^3 -$$

$$-abc - \cancel{b^2c^2} - \cancel{ac^2} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$(x - y - 4)(x^2 + y^2 + 16 + xy - 4y + 4x) =$$

$$= (x^3 + xy^2 + 16x + 2^2y - 4xy + 4x^2) - 2^2y$$

$$-y^3 - 16y - xy^2 + 2y^2 - 4xy - 4x^2 - 4y^2 - 64$$

$$-4xy + 16y - 16x = x^3 - y^3 - 12xy - 64$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha y - \sin \alpha x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \alpha y$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \sin \pi y =$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos \pi y$$

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \quad \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cdot x+y = 1+2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \sin \pi y = \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos \pi y =$$

$$= 0; \cos(\pi y + \frac{\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x) = 0$$

$$\frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 3y - x = 1+2k,$$

$$\cdot 3y - x = 1+2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} > -\frac{\pi}{2} \quad \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} > -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in [-1; 1], \quad y \in [-1; 1]$$

$$x+y \in [-1; 1] \quad \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x \cdot \cos(\arcsin y) + y \cdot \cos(\arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-y^2} \quad \sin(\arcsin y) = y$$

$$y^2 + t^2 = 1 \quad t^2 = 1 - y^2 \quad t = \pm \sqrt{1-y^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число вариантов  $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$   
 $x=3, 2, 1$

№ Где получили:

1) Всего вариантов:  $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} \quad (x \geq n) \quad \frac{x!}{n!(x-n)!}$

Решим и Васи получим одинаково:  $\frac{(x-2)(x-3)}{2}$

2) Всего вариантов:  $x(x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-a)$

$$C_x^{n+a} = \frac{x!}{(n+a)!(x-n-a)!}$$

Решим и Васи получим одинаково:  $x-2 \geq n$

$2+a$  одинаково  $C_{x-2}^{2+a} = \frac{(x-2)!}{(2+a)!(x-n-a)!}$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2} \cdot \frac{n}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ = 11 \cdot \frac{(x-2)!}{(a+3)!(x-n-a)!} \cdot \frac{(x+a)!(x-n-a)!}{x! (x-1) n} = (a+3)(a+n)$$

$$\frac{182}{x(x-1)} = \frac{2(a+3)(a+n)}{(x-1)x} \quad a=8 \quad \text{число } 12$$

$$a^2 + 13a - 120 = 0 \quad (a-8)(a+15)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

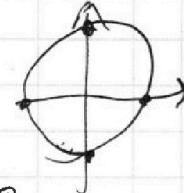
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sin^2 \pi y - 2\sin \pi x \sin \pi y = 2\cos^2 \pi y + 2\cos \pi x \cos \pi y$$

$$2\sin^2 \pi y$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$



$$\cos(\pi x + \pi y) = \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$

$$2\sin^2 \pi y + \cancel{\cos(\pi x + \pi y)} - \cos(\pi x - \pi y) =$$

$$= 2\cos^2 \pi y + \cos(\pi x - \pi y) + \cancel{\cos(\pi x + \pi y)}$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) \cdot \cos$$

$$\sin \pi y - \sin \pi x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\cos \pi y + \cos \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\sin \pi y \cdot (\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)) = \cos \pi y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\text{II} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0 \quad \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x+y = 1 + 2k$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ \hline + 101 \\ \hline 101 \\ \hline 111 \end{array}$$

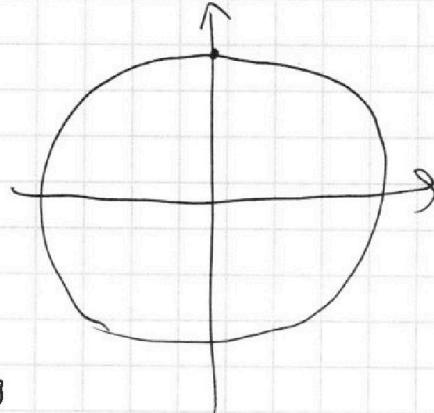
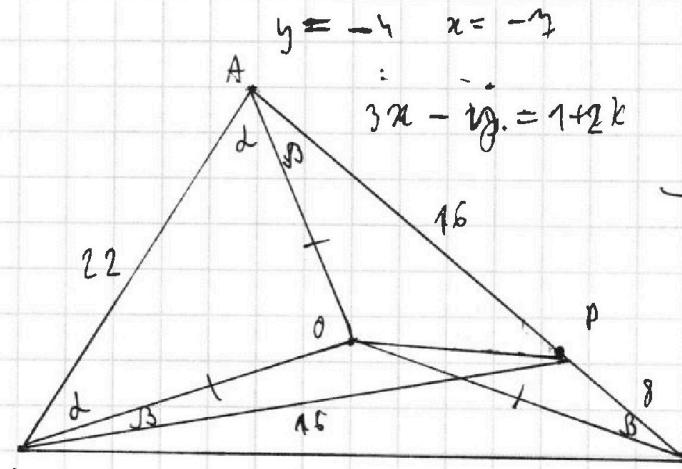
$$\text{II} \sin\left(\frac{\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x\right) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$16^2 = 22^2 + 16^2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 16 \cdot 22 \quad \arcsin \left[ -\frac{R}{r} ; \frac{R}{r} \right]$$

$$22^2 = 2 \cos(\alpha + \beta) \cdot 16 \cdot 22 \quad \arccos [0; \pi]$$

$$11 = 16 \cos(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{11}{16}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$\frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{33\sqrt{15}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{11}{22} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} \cdot 2 = \frac{33\sqrt{15}}{16}$$

$$x+y = 1+2k \quad \text{или} \quad 3x-y = 1+2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\pi}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad \arccos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$x \neq y \quad y \neq 1 \quad x+y = 1+2k \quad 3x-y = 1+2k$$

$$x \in [-7; 6]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

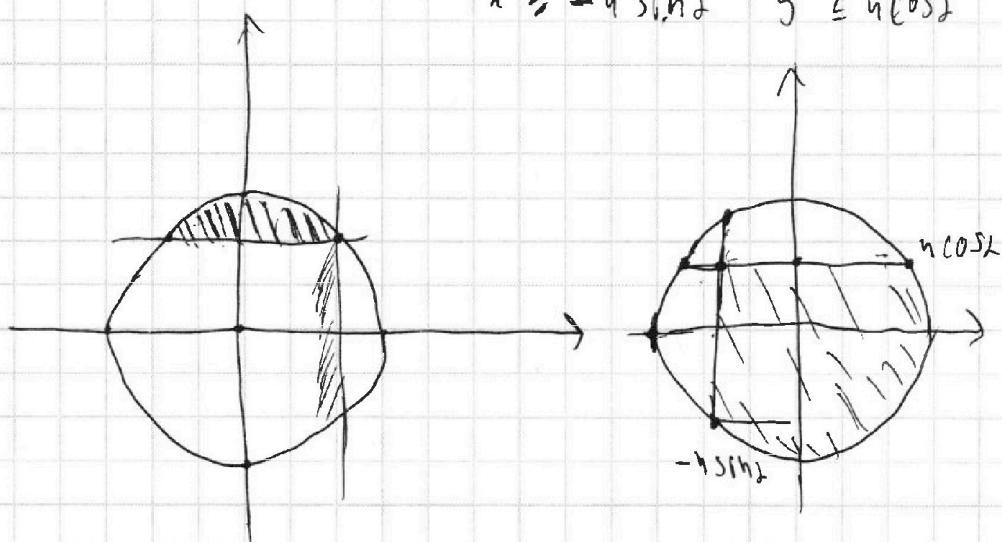
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!