



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad \forall a, b = n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} b : a^n, \text{ но } b \nmid a^{n+1}$$

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\Rightarrow A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, \text{ 11, 101 - простые числа}$$

Заметим, что $C \nmid 101$, т.к. $0 < C < 101$

$$\Rightarrow B : 101, \text{ т.к. } \sqrt[101]{A} = 1, \text{ т.к. } a \text{ и } 11 \nmid 101$$

$$\text{Но так как } \sqrt[101]{ABC} = 2k \Rightarrow \sqrt[101]{B} - \text{неч.}$$

$$\text{Но } 101^3 > B \Rightarrow \sqrt[101]{B} = 1 \Rightarrow B = 101 \cdot b, b \in \{2, \dots, 9\}$$

$$\text{Откуда } B \in \{101, 202, 303, \dots, 909\} = \mathcal{D}$$

Заметим, что числа в мн-ве $\mathcal{D}$ не делятся

$$\text{на 11} \Rightarrow C : 11 \Rightarrow C \in \{11, 22, 33, \dots, 99\}$$

$$\text{Но т.к. одна из цифр } C = 5 \Rightarrow C = 55$$

$$ABC = \left(a \cdot \underbrace{101}_{\text{т.к.}} \right) \cdot \left(\overset{B}{b \cdot 101} \right) \cdot \underbrace{5 \cdot 11}_{\text{т.к.}} = 5ab \cdot \underbrace{(101 \cdot 11)}_{\text{т.к. квадрат}}$$

$$\text{а) Одна из цифр } B = 1 \Rightarrow B = 101$$

$$\Rightarrow ABC = \left(a \cdot \underbrace{101}_{\text{т.к.}} \cdot \underbrace{11}_{\text{т.к.}} \right) \cdot \left(\underset{B}{101} \right) \cdot \underset{C}{55} - \text{т.к. квадрат}$$

$$\Rightarrow 5a - \text{точный квадрат} \stackrel{a \in \{2, \dots, 9\}}{\Rightarrow} a = 5$$

$$\text{Следовательно, подходит только } (A, B, C) = (5555; 101; 55)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

Из условия:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \begin{array}{l} x+y+1 \neq 0 \\ \text{случай, когда} \\ x+y+1=0 \text{ рассмотреть} \\ \text{потом} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$\Rightarrow 3x - 3y - 9 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0 \Rightarrow x = y + 3$$

Подставим $x = y + 3$ в М:

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Откуда $M = 27$

Доразберём случай $x+y+1=0$.

По условию $x, y > 0$

Следовательно, $x+y+1 > 0+0+1 > 0$

Итак $x+y+1=0$ не может случиться
Следовательно подходят только $M = 27$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ 8)

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$



ОДЗ:

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{4} < 2\pi - \arccos \frac{y}{9}$$

$$\arccos \frac{x}{4} \leq \pi$$

$$\arccos \frac{y}{9} \leq \pi$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

кроме $(x, y) = (-4, -9)$

Перепишем полученные в пункте

(a) серии решений в следующем виде:

$$I: (x, y) = (a, 3a - 2k - 1) \quad \text{и} \quad II: (x, y) = (a, 2n + 1 - a)$$

Будем делать перебор по x

т.е. для $\forall a \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Нам надо рассмотреть случай $x = a$

т.е. это будет перебор 9 случаев.

1) $x = -4$

В I серии:

$$y = -12 - 2k - 1$$

$$-9 \leq -12 - 2k - 1 \leq 9$$

$$3 \leq -2k - 1 \leq 21$$

$$4 \leq -2k \leq 22$$

$$-11 \leq k \leq -2$$

Исключая $\rightarrow$ т.е. не все x подходят

В II серии:

$$-9 \leq 2n + 1 + 4 \leq 9$$

$$-14 \leq 2n \leq 7$$

$$-7 \leq n \leq 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

у в первой серии:

9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9

(-4, -9) быть нельзя

во второй серии:

-9, -7

такие же

т.е. мы получили 9 реш.

2) $x = -3$

1-ая серия

$$y = -9 - 2k - 1$$

$$-9 \leq -9 - 2k - 1 \leq 9$$

$$0 \leq -2k - 1 \leq 18$$

$$1 \leq 2k \leq 19$$

$$1 \leq k \leq 9 \Rightarrow 9 \text{ реш.}$$

итогом:

2-ая серия

идёт по тем же самым значениям

УТВ. четн. x без орг дают 10 реш.

т.е. -2, 0, 2 дадут 10 реш.,

а x-неч - 9 реш.

т.е. получим

$$\text{кол-во пар: } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кол-во} \\ \text{неч}}}{5} \cdot 10 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кол-во} \\ \text{неч}}}{4} \cdot 9 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{пара} (-4, -9)}}{1} = 85$$

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☒

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Нюмча QR-кода недопустима!

④ Пусть в классе n человек.

Посмотрим какая вероятность в начале.

Вероятность P_1 того, что пойдут Петя и
Вася вместе = вероятность того, что пойдёт Петя $\times$
вероятность того, что пойдёт Вася при условии,
что Петя пошёл $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$

Аналогично, если билетов x :

$$P_2 = \frac{x \cdot (x-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{По условию } P_1 = \frac{P_2}{\frac{1}{3,5}} \Rightarrow \frac{1}{3,5} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (x-7)(x+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=7$$

Ответ: 7

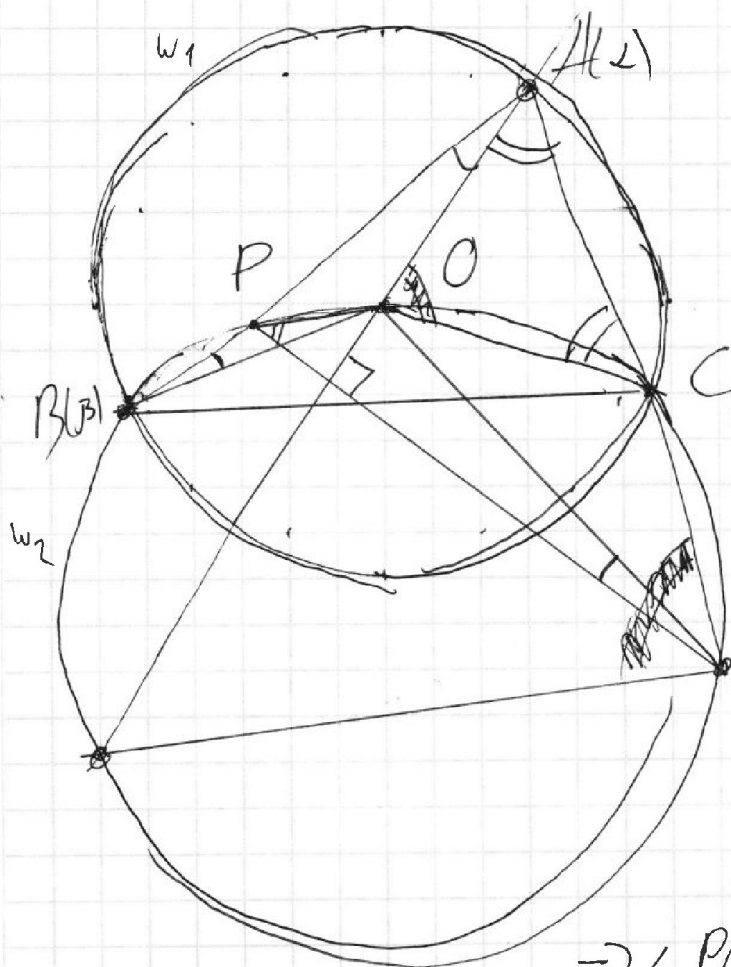


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC \cap w_2 = Q$$

По Th о секущих:

$$AB \cdot AP = AC \cdot AQ$$

$$C_{12} \Rightarrow AQ = \frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}}{4} = \frac{104}{25}$$

$$\Rightarrow CQ = \frac{4}{25}$$

Известный факт:

$$\triangle APQ \sim \triangle ACB$$

$$\angle OAP = \angle OBA, \text{ т.к. } AO = OB$$

$$\angle OBP = \angle PQO, \text{ т.к. } BPOQ - \text{цикл}$$

$$\Rightarrow \angle PQO = \angle PAO$$

$$\text{Аналогично, } \angle OAQ = \angle OPQ$$

У нас $\triangle APQ$ подобен $\triangle ACB$ является композ

Есть H_A^K о $\angle_{AI}$: $\triangle APQ \rightarrow \triangle AQR$, поэтому

↑
гомотетия

↑
симметрия
отн. AI

из A

направление на центр опис. ~~многоугольника~~ $\triangle ABC$

— направление на высоты $\triangle APQ$

$$\Rightarrow AO \perp PQ, \text{ а мы уже знаем, что } \angle OAP = \angle OBA \text{ и } \angle OBP = \angle PQO$$

$$\Rightarrow O - \text{ортоцентр } \triangle PAQ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть O^* — центр опис $\triangle APQ$

M — середина $[PQ]$, R^* — радиус (APQ)

Общезвестный факт:

$$AO = 2O^*M \quad (\text{т.к. } O^* - \text{ортоцентр } \triangle APQ)$$

$$\Rightarrow AO = 2R^* \cdot \sin \angle A \Rightarrow \sin \angle A = \frac{AO}{2R^*} = \frac{1}{2} \frac{R}{R^*}$$

Но $\frac{R}{R^*}$ — коэффициент подобия $\triangle APQ$ и $\triangle ACB$

$$\text{т.е. } \frac{R}{R^*} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sin \angle A = \frac{1}{2} \frac{AC}{AB}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC \cdot AB}{AB \cdot AC} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{AB \cdot AC^2}{AB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{26}{5} \cdot 4^2}{\frac{16}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{26 \cdot 4^2}{16} =$$

$$= \frac{13}{2}$$

Ответ: $\frac{13}{2}$



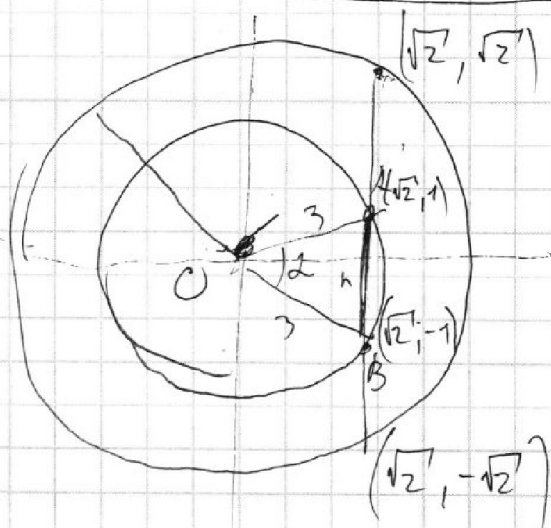
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем периметр M :



$$h = 1 - |-1| = 2$$

Th $\cos \angle AOB$:

$$3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle AOB = 2^2$$

$$\Rightarrow \cos \angle AOB = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \sin \angle AOB$$

что
добавили

$$\Rightarrow \text{Периметр } M = 2\pi R - 2 \cdot \frac{\arccos \angle AOB}{2\pi} \cdot 2\pi R + 2 \cdot AB$$

часть окр., которую
удалили

$$\Rightarrow \text{Периметр } M =$$

$$= 8\pi - 2 \cdot \left[8\pi \left(1 - \frac{\arccos \frac{7}{9}}{2\pi} \right) + 2 \right]$$

↑
ОТВЕТ.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥

НУО будем считать $a \geq 0$ и $b \geq 0$,
т.к. карта. Случаи симм. отн. O_x, O_y и a, b
дают одинаковый периметр. $\boxed{a^2 + b^2 = 4}$

$y = a$ пересекает ω в $(-\sqrt{4-a^2}; a)$ и $(\sqrt{4-a^2}; a)$
 $x = b$ пересекает ω в $(b; -\sqrt{4-b^2})$ и $(b; \sqrt{4-b^2})$

Когда мы заменим ω условно заменим
периметр окружности на хорды в
периметре, тем самым мы уменьшаем
периметр поэтому мы хотим, чтобы то
что мы изменили было как можно
меньше. т.е. хотим $\min(2\sqrt{4-a^2} + 2\sqrt{4-b^2})$
 $(\Rightarrow \min(\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2}))$ из условия $a^2 + b^2 = 4$
 $\Rightarrow b^2 = 4 - a^2$

$$\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} = \sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-(4-a^2)} = f(a)$$

$$f'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a}{\sqrt{4-a^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{4-a^2}} = a \left(\frac{1}{\sqrt{4-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-a^2}} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

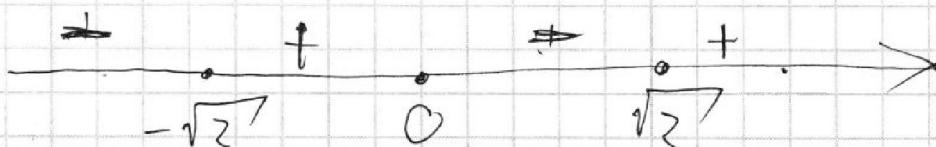
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥

$$f'(a) = 0$$

$$a \left(\frac{-1}{\sqrt{5+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 5+a^2 = 9-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \min \text{ при } a = \sqrt{2} \text{ (т.к. } a > 0)$$

$$\Rightarrow \max \text{ периметра при } a = \sqrt{2}$$

Вспомним, что $2 \sin \angle = \phi = a \Rightarrow 2 \sin \angle = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \angle = \frac{\sqrt{2}}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \Rightarrow \angle = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \Rightarrow \angle = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Но как мы выяснили ранее нам также подходят углы полученные из этих отрезков симметрией отн. Ox, Oy, O , но эти углы для этих для нашего $\angle$ попадают в серию $\Rightarrow \angle = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

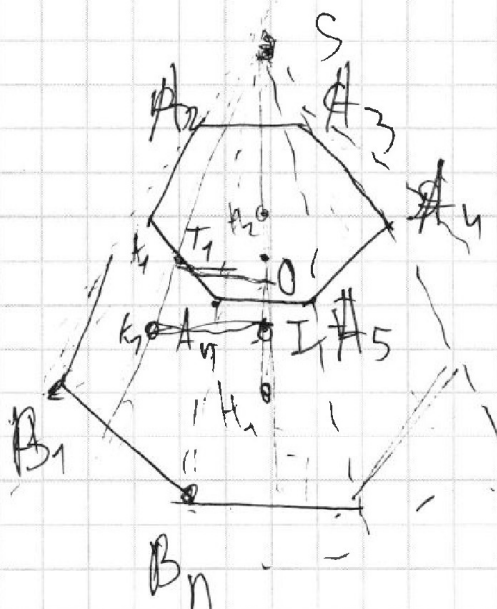
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим
полную пирамиду
правильную
пирамиду.
Продлим рёбра
до пересечения в S .

Раз существует впис. сфера
 $\Rightarrow$ длины высот из S на рёбра
равны. Так же известный факт,
что сумма углов через один равна
другой сумме углов через 1 (если $n \geq 2$)

У нас есть сфера, которая
касается всех рёбер, её центр
лежит на прямой $S-H_1-H_2$
(Перп. из S на плоскости основания
ний) Также на этой прямой
лежит центр впис. сферы



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отметим точки касания T_1 и K_1

$OI^2 = R^2 - r^2$. $\therefore$ W и Σ наши сферы
гомотетичны

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{ST_1}{SK_1} = \frac{\sqrt{SO^2 + OT_1^2}}{\sqrt{SI^2 + IK_1^2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$③ \text{ а) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi x = 0$$

По формуле суммы косинусов это равносильно

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} & (I) \\ x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} & (II) \end{cases}$$

Тогда I даёт систему реш: $(x, y) = \left(\frac{1+2k+a}{3}, a\right)$,
где $a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}$

А II даёт: $(x, y) = (1-a+2n, a)$, где $a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

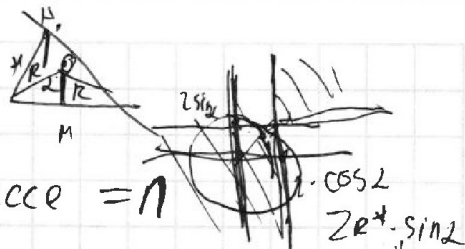
1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4)

$$\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2} = \min$$



Пусть кол-во человек в классе = n

* Посчитаем кол-во ~~чет~~ ^{общее} кол-во четверок:
 (без учета порядка)

$$\text{их кол-во} = n \cdot C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

* Посчитаем кол-во четверок содержащих

$$\frac{16}{n^2} = \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$$

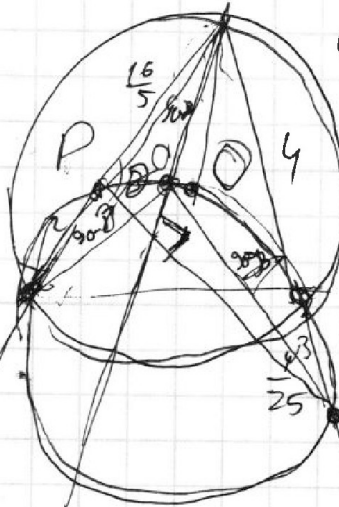
$$x^2 - x - 48 = 0 \quad \text{р.к.}$$

$$(x-7)(x+6) \Rightarrow x=7, \text{ т.е. } \neq \text{случаев выделено}$$

$$3,5 \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{C_n^{x-2}}{C_n^x}$$

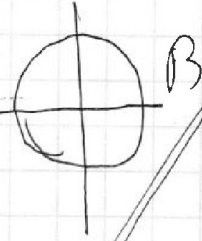
$$3,5 \cdot \frac{n(n-1) \cdot 4!}{2! \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)} = \text{т.е.}$$

$$\arccos \frac{x}{4} < 2\pi - \arccos \frac{x}{4}$$



$$4 \cdot \frac{26}{5} = \frac{20}{25} = \frac{10}{25}$$

$$\frac{16 \cdot 26}{25} = \frac{100 \cdot (100-x)}{25}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☒

3
☒

4
☒

5
☒

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) =$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

$$x = -y - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k$$

$$\arccos < \pi$$

$$\frac{n(n-1)}{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\frac{26}{5} - \frac{18}{5} = 4x$$

