



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{a} b = n \stackrel{\text{def}}{\iff} b : a^n, \text{ но } b \nmid a^{n+1}$$

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\Rightarrow A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, \quad 11, 101 - \text{простые числа}$$

Заметим, что $C < 101$, т.к. $0 < C < 101$

$\Rightarrow B : 101$, т.к. $\nmid_{101} A = 1$, т.к. $a \neq 11 \times 101$

Но ~~стен~~ $\nmid_{101} ABC = 2k \Rightarrow \nmid_{101} B$ - неч.

Но $101^3 > B \Rightarrow \nmid_{101} B = 1 \Rightarrow B = 101 \cdot b, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$

Откуда $B \in \{101, 202, 303, \dots, 909\} = \emptyset$

Заметим, что числа в мн-ве \emptyset не делятся на 11 $\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C \in \{11, 22, 33, \dots, 99\}$

Но т.к. одна из цифр $C = 5 \Rightarrow C = 55$

$$ABC = (a \cdot 101)_A \cdot (b \cdot 101)_B \cdot 55_{C} = \underbrace{5ab \cdot (101 \cdot 11)^2}_{\text{точн. квадрат}} \text{ / } \times \text{багаж}$$

\Rightarrow Одна из цифр $B = 1 \Rightarrow B = 101$

$$\Rightarrow ABC = (a \cdot 101 \cdot 11)_A \cdot (101)_B \cdot 55_C - \text{точн. квадрат}$$

$$\Rightarrow 5a - \text{точныи квадрат} \stackrel{a \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}}{\Rightarrow} a = 5$$

(следовательно, подходит только $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(2)

из условия:

OD3:

$$\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -3 \\ y \neq 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \begin{array}{l} ; x+y+1 \neq 0 \\ \text{(случай, когда } x+y+1=0 \text{ рассмотрен} \\ \text{нельзя)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$\Rightarrow 3x - 3y - 9 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0 \Rightarrow x = y + 3$$

Поставим $x = y + 3$ в M :

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Откуда $M = 27$

Доразберём случай $x+y+1=0$.

По условию $x, y > 0$

Следовательно, $x+y+1 > 0+0+1 > 0$

Откуда $x+y+1=0$ не может случиться

Следовательно получим $TOL6KO M = 27$

Ответ: $M = 27$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(3) 8)

✓

одн:

$$\begin{aligned} -4 \leq x \leq 4 \\ -3 \leq y \leq 9 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} < 2\pi - \arccos \frac{y}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \\ \arccos \frac{y}{5} \leq \pi \end{array} \right\} \stackrel{(14.08)}{\Rightarrow} \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{5} < 2\pi$$

кроме $(x, y) = (-4, -9)$

Перенесем полученные в пункте

(a) серии реш в следующем виде:

$$I: (x, y) = (a, 3a - 2k - 1) \quad \text{и} \quad II: (x, y) = (a, 2n + 1 - a)$$

Будем делать перебор по x

т.е. для $\forall a \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Нам надо рассмотреть случай $x=0$

т.е. это будет перебор 9 случаев.

$$1) x = -4$$

в I серии:

$$y = -12 - 2k - 1$$

$$-5 \leq -12 - 2k - 1 \leq 9$$

$$3 \leq -2k - 1 \leq 21$$

$$a \leq -2k \leq 22$$

$$-11 \leq k \leq -2 \quad \text{исключаем } \rightarrow \text{т.е. такие } k \text{ нет}$$

в II серии:

$$-9 \leq 2n + 1 + 4 \leq 9$$

$$-14 \leq 2n \leq 4$$

$$-7 \leq n \leq 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

yo бo пeрвoй cepии:

$$9, -7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, \cancel{9}$$

$(-4; -9)$ бoтъ нe възъ

бo втoрoй cepии:

$$-9, -7$$

такие же

т.е. мы получили 9 реш.

2) $x = -3$

1-я серия

$$y = -9 - 2k - 1$$

$$-9 \leq -9 - 2k - 1 \leq 9$$

$$0 \leq -2k - 1 \leq 18$$

$$1 \leq 2k \leq 19$$

$$1 \leq k \leq 9 \Rightarrow 9 \text{ реш.}$$

=27 реш.

2-я серия

идёт по тем же

самым значениям

Утв. четн. x без огз дают 10 реш.

т.е. $-2, 0, 2$ дают 10 реш.)

а x -неч - 9 реш.

т.е. получим

$$\text{коц-60} \text{ нап. } 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 85$$

коц-60
неч неч
нап. (-4; -9)

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4)

Пусть в классе n человек.

Посмотрим какая вероятность в начале.

Вероятность P_1 , что попадут Петя и

Вася вместе = вероятность $\frac{1}{n(n-1)}$, что попадёт Петя,

вероятность $\frac{1}{n(n-1)}$, что попадёт Вася при условии,

что Петя прошёл $= \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)}$

Аналогично, если билетов x :

$$P_2 = \frac{x \cdot (x-1)}{n(n-1)}$$

По условию $P_1 = \frac{P_2}{3,5} \Rightarrow \frac{12}{n(n-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

$$\Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \quad (=) \quad (x-7)(x+6) = 0 \stackrel{x>0}{=} x=7$$

ОТВЕТ: 7

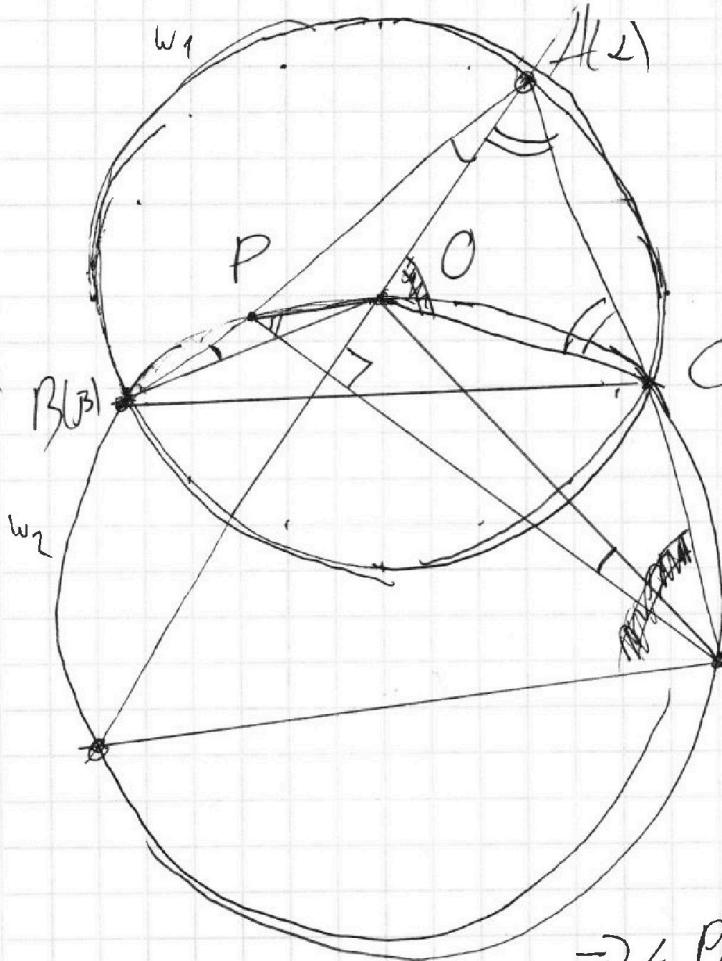


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC \cap w_2 = Q$$

По Th о секущей:

$$AB : AP = AC : AQ$$

$$\begin{aligned} C_2 \Rightarrow AQ &= \frac{\frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}}{4} = \frac{104}{25} \\ &\Rightarrow CQ = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

Известные факты:

$$\triangle APQ \sim \triangle ACB$$

$$\angle OAP = \angle OBA, \text{ т.к. } AO = OB$$

$$\angle OBP = \angle PQO, \text{ т.к. } BPOQ - \text{вн.}$$

$$\Rightarrow \angle PQO = \angle PAC$$

Аналогично, $\angle OAQ = \angle OPQ$

У нас $\triangle APQ$ подобен ~~является~~ композит

Есть H_A^K о f_{AI} : $\triangle APQ \rightarrow \triangle AQP$, поэтому

\uparrow
гомотия \uparrow
симметрия относ. AI

направление на центр опис. ~~окружности~~ $\triangle ABC$

- направление т.e. высоты $\triangle APQ$

$$\Rightarrow AO \perp PQ, \text{ а мы уже знаем, что } \angle OAP = \angle OBA \text{ и } \angle OBP = \angle PQO$$

$\Rightarrow O$ - ортоцентру $\triangle PAQ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть O^* - центр опис $\triangle APQ$

М. М - середина $[PQ]$, R^* -радиус (APQ)

Обычный факт:

$$AO = 2O^*M \quad (\text{т.к. } O \text{- центр } \triangle APQ)$$

$$\Rightarrow AO = 2R^* \cdot \sin \angle \Rightarrow \sin \angle = \frac{AO}{2R^*} = \frac{1}{2} \frac{R}{R^*}$$

Но $\frac{R}{R^*}$ - коэффиц похождия $\triangle APQ \sim \triangle ACB$

$$\text{т.л. } \frac{R}{R^*} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sin \angle = \frac{1}{2} \frac{AC}{AB}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC \cdot AB}{AB \cdot AP} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{AB \cdot AC^2}{AP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{26}{5} \cdot 4^2}{\frac{16}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{26 \cdot 16}{80} =$$

$$= \frac{13}{2}$$

Ответ: $\frac{13}{2}$



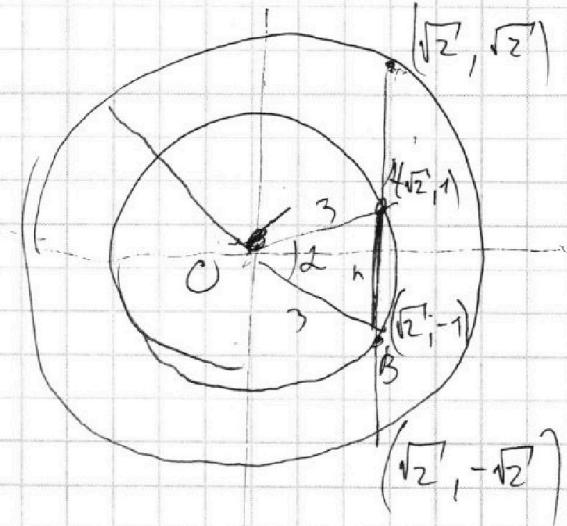
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
Ч ИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Начинаем периметр M:



$$h = 1 - (-1) = 2$$

Th cos ∠AOB:

$$\begin{aligned} 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle AOB &= 2^2 \\ \Rightarrow \cos \angle AOB &= \frac{2}{9} \\ \Rightarrow \sin \angle AOB &= \end{aligned}$$

Что добавили

$$\Rightarrow \text{Периметр } M = 2\pi R - 2 \cdot \underbrace{\frac{\arccos \frac{2}{9}}{2\pi} \cdot 2\pi R + 2 \cdot AB}_{\text{часть окр., которую удалили}}$$

часть окр., которую удалили

\Rightarrow Периметр M =

$$= 8\pi - 2 \cdot \boxed{8\pi \left(1 - \frac{\arccos \frac{2}{9}}{2\pi} \right) + 2}$$

$\frac{\pi}{4}$
Ответ.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

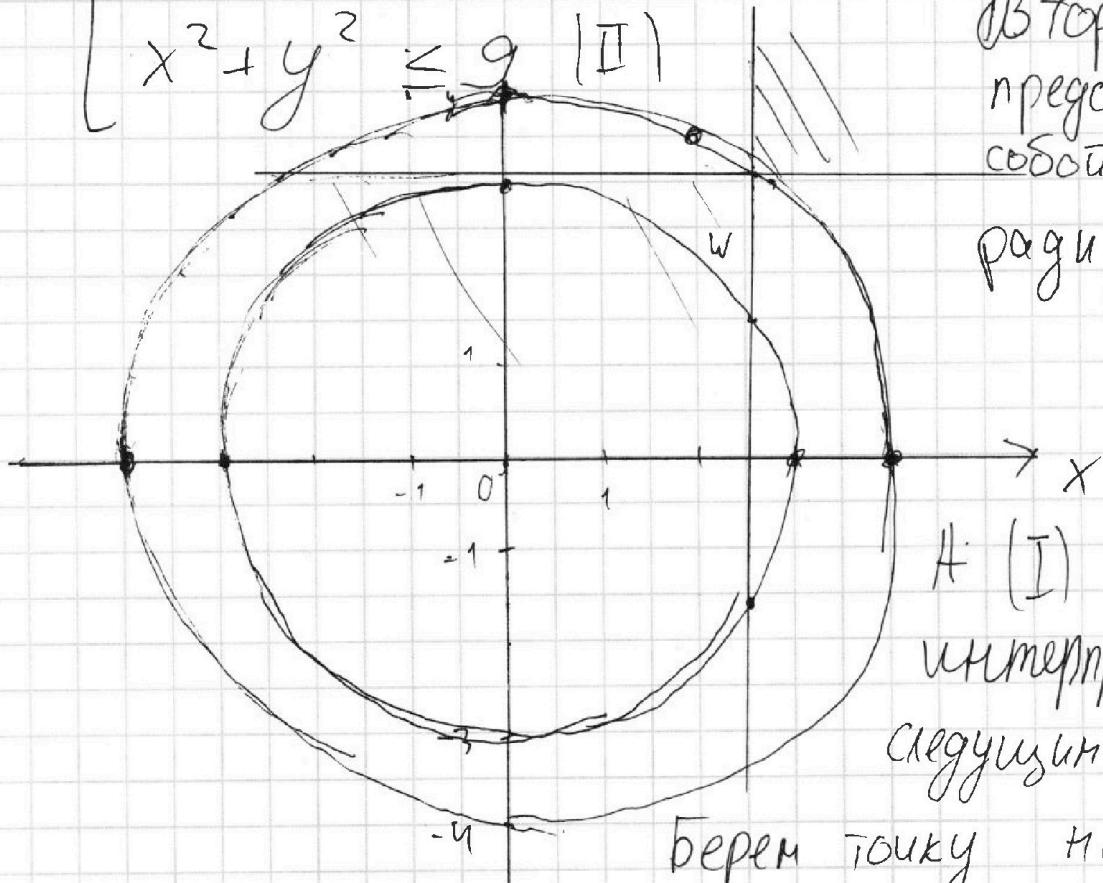
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6

$$\begin{cases} (x - 2 \cdot \cos \alpha)(y - 2 \cdot \sin \alpha) \geq 0 \quad (I) \\ x^2 + y^2 \leq 9 \quad (II) \end{cases}$$



второе
представляя
собой круг

радиуса 3

и (I) можно

интерпретировать
следующим образом

берем точку на

окружности радиуса 4 и проводим условную
декартову систему координат. Тогда в ней
наи подходят I и III четверти.

Пусть эта "условная" декартова система
координат задана прямими $y=0$ и
 $x=6$. А? (понятно, что ^{один при радиусе 4} из "четвертей" не)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(6)

НУО будем считать $a \geq 0$ и $b \geq 0$,
 т.к. карта случай симм отн. Ox, Oy и об
 дают одинаковый периметр. $\boxed{a^2 + b^2 = 4}$
 $y=a$ пересекает в b $(-\sqrt{9-a^2}; a)$ и $(\sqrt{9-a^2}; a)$
 $x=b$ пересекает в b $(b; -\sqrt{9-b^2})$ и $(b; \sqrt{9-b^2})$

Когда мы заменили мы условно заменили
 периметр окружности на хорды в
 периметре. Текущий мы уменьшили
 периметр поэтому мы хотим, чтобы то
 что мы уменьшили было как можно
 меньше. т.е. хотим $\min(\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2})$
 $(\Rightarrow \min(\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2}))$ из условия $a^2 + b^2 = 4$
 $\quad \quad \quad b^2 = 4 - a^2$

$$\sqrt{9-a^2} + \sqrt{9-b^2} = \sqrt{9-a^2} + \sqrt{5+a^2} = f(a)$$

$$f'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a}{\sqrt{9-a^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5+a^2}} = a \left(\frac{1}{\sqrt{5+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 4

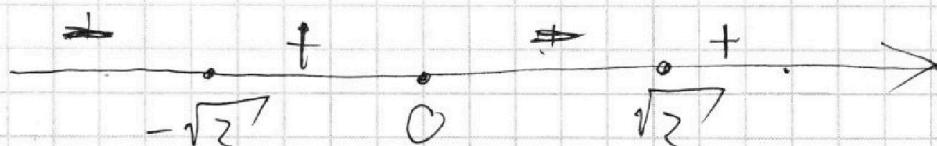
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(6)

$$f'(a) = 0$$

$$a \left(\frac{-1}{\sqrt{5+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \frac{1}{\sqrt{5+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 5+a^2 = 9-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \min \text{ при } a = \sqrt{2} (\text{т.к. } a > 0)$$

$\Rightarrow \max$ перицентра при $a = \sqrt{2}$

Вспомним, что $2 \sin \angle = y = a \Rightarrow \sin \angle = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \angle = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k \Rightarrow \angle = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Но как мы выяснили ранее нам также подходят ~~для~~ углы полученные из этих отрицательных симметрий отн. Ох, Оу, О, но для углов для этих групп нашего \angle подходит в серию $\Rightarrow \angle = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

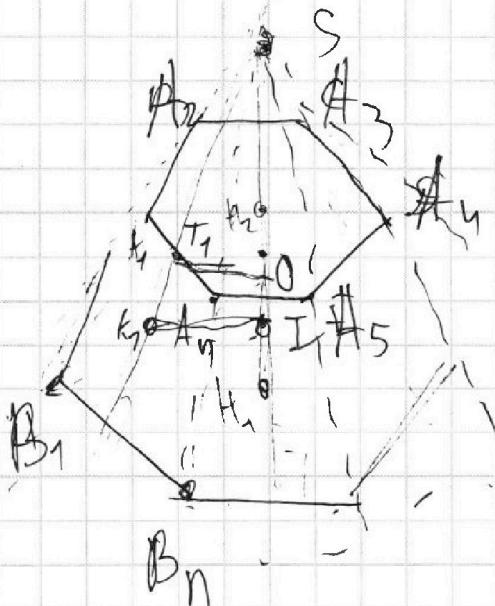


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим
полную пару
правильных
перемен.

Программы решения задач пересечения в S.

Так существует впис. сферы
=> суммы высот из 5 на ребра
равны. Так же известный факт,
что сумма углов через один ребро
другой сумме углов через 1 (если $n \geq 2$)

У нас есть сорта, которых
касается всех $p_{\text{dS}}^{\text{sep}}$, ее генети-
ческое наследство $S_{H_1-H_2}$
(Нерн. из S на плоскости проекции
мии) Такие на этой предыдущей
генетике несуществует.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отметим точки касания T_1 и K_1

$OI^2 = R^2 - r^2$. |. O и S наши сферы
геометрически

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{ST_1}{SK_1} = \frac{\sqrt{SO^2 + OT_1^2}}{\sqrt{SI^2 + SK_1^2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ а) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi x = 0$$

По формуле суммы косинусов это равносильно

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} & (I) \\ x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} & (II) \end{cases}$$

Из I получаем: $(x, y) = \left(\frac{1+2k+q}{3}, a\right)$,
 $\exists q \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

Из II получаем: $(x, y) = (1-a+2n, a)$, $\exists q \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$



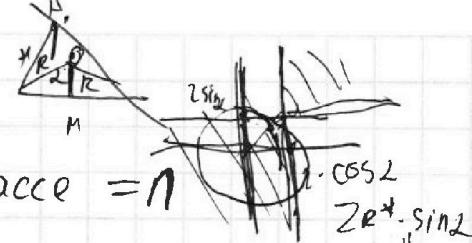
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4) \quad \sqrt{s-a^2} + \sqrt{s-b^2} - \min$$



Пусть кол-во человек в классе = n

* Посчитаем кол-во чет общей кол-во четверок:
(без учета порядка)

$$n \times \text{кол-во} = n! \cdot C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

* Посчитаем кол-во четверок содержащих

$$\frac{P}{n^2} = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} \cdot \frac{k}{n} =$$

$$x^2 - x - 4x = 0 \quad \text{OK.}$$

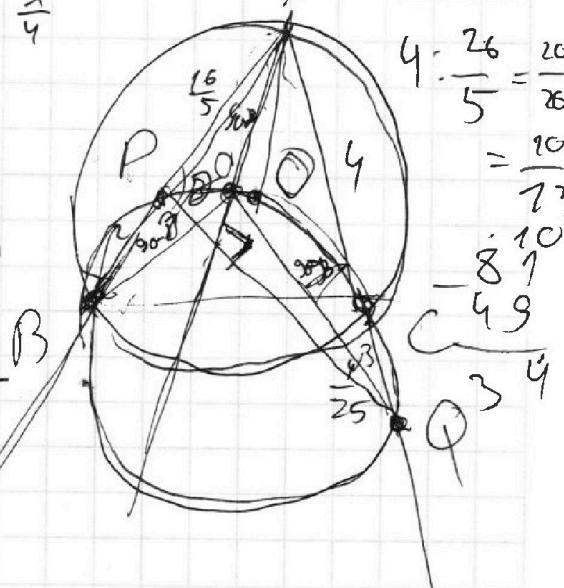
$$(x-7)(x+6) \Rightarrow x=7, \quad \text{т.е. } \frac{P}{n^2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \cdot \frac{k}{n} = \frac{AP}{AQ} = \frac{4 \cdot 25}{4 \cdot 25}$$

$$3,5 \cdot \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{1}{C_n^{x-2}} \cdot \frac{C_n^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\arccos \frac{x}{4} < 2\pi - \arccos \frac{4}{x}}{4} \cdot 104$$

$$3,5 \cdot \frac{n(n-1) \cdot 4!}{2! \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)} = 104$$

$$\frac{16 \cdot 25}{25} = \frac{100 \cdot (100-x)}{25}$$

$$\frac{4 \cdot 26}{25} = \frac{106}{25}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\begin{aligned} (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) &= \\ = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y &= \boxed{27} \end{aligned}$$

$$x = -y - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arccos < \pi$$

$$\frac{n(n-1)}{\frac{n(n-1)}{2}} : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{26}{5} - \frac{16}{5} = 4x$$

