



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = n \cdot 1111, \text{ где } n \in [1; 9]$$

$$A = n \cdot 101 \cdot 11$$

$\Downarrow$

$$B : 101$$

Единственное число кратное 101, содержащее 2^2 и яв-я трёхзнач-ным - это ~~202~~ 202

$\Downarrow$

$$B = \del{202} 202$$

$$C : 11 \Rightarrow C = 33, \text{ т.к. } C - \text{содержит } 3$$

$$A \cdot B \cdot C = 33 \cdot 202 \cdot 101 \cdot 11 \cdot n = 1111^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n$$

$\Downarrow$

$$n = 2 \cdot 3$$

Ответ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{(y+1) + (x-1) + 2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\text{т.к. } x+y+2 \neq 0$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$y = x - 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$\text{Ответ: } 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \left(2 \cos \left(\frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2n \\ x - y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x - 1 - 2k \\ y = 1 - 3x + 2n \end{cases}, \text{ где } k, n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$$

$$\frac{x}{5} \neq 1 \text{ и } \frac{y}{4} \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Для целых $(x; y)$ выражения $(y = x - 1 - 2k)$ и $(y = 1 - 3x + 2n)$ равнозначны, т.к. $\rightarrow 1 - 3x + 2n \Rightarrow 1 - x + 2(n - x)$ а $(x - 1)$ и $(1 - x)$ одинаковой чётности

Тогда решения: $(-5; 2p)$, $(-4; 2q - 1)$, $(-3; 2p)$, $(2q - 1; 2p)$, $(2p; 2q - 1)$, где $p \in \mathbb{Z}$

Тогда ответ: $(2z + 1; 2p)$, $(2k; 2q - 1)$, где $z \in [-2; 3]$, $p \in [-2; 2]$
где точка $(5; -4)$ - выкапана $k \in [-2; 2]$, $q \in [-1; 2]$, $p, k, z \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего пар всевозможных пар учеников: ~~C_k^2~~ C_k^2 , где k -
количество учеников.

$$C_k^2 = C$$

количество вариантов раздать n билетов, k ученикам:

$$C_k^n$$

когда Петя и Васа будут вместе: C_{k-2}^{n-2}

$$\text{Вероятность: } \frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^n} = \frac{(k-2)!}{(n-2)!(k-n)!} \cdot \frac{n!(k-n)!}{k!} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$

Условие: $\frac{4(x-1)}{k(k-1)} = \frac{x(x-1)}{k(k-1)} \Rightarrow x(x-1) = 4(x-1) \Rightarrow x = 6$

Условие: $2,5 \cdot \frac{4(4-1)}{k(k-1)} = \frac{x(x-1)}{k(k-1)} \Rightarrow x(x-1) = 30 \Rightarrow x = 6$

Ответ: 6 билетов

$$\angle ABK = 180^\circ - (2 + 180^\circ - 2L) = 2 \Rightarrow AK = BK = \frac{12}{12}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

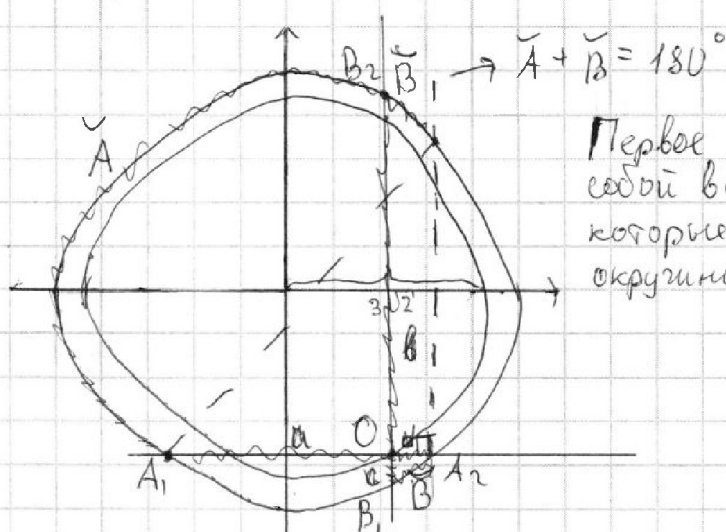
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - \sqrt{3} \cos \alpha)(y - \sqrt{3} \sin \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} (x - \sqrt{3} \sin \alpha)(y - \sqrt{3} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Изобразим:



Первое уравнение представляет собой все ~~прямые~~ ^{пары прямых} которые пересекаются на окружности: $(x^2 + y^2 = 18)$

Т.к. сумма дуг образованная пересечением двух ^{под прямым углом} хорд AB (В данно случае $A + B$), всегда равна половине длины окружности (т.к. если перенести одну из хорд, как на рисунке сумма останется неизменной, а т.к. угол прямой то сумма, равна половине длины окружности)

Тогда нужно максимизировать сумму хорд.

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 \rightarrow \max$$

$$O(a, \sqrt{18-a^2}); A_2(\sqrt{7+a^2}, \sqrt{18-a^2}); A_1(\sqrt{7+a^2}, -\sqrt{18-a^2})$$

$$B_1(a, \sqrt{25-a^2}); B_2(a, -\sqrt{25-a^2})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A, A_2 = 2\sqrt{7+a^2}; B, B_2 = 2\sqrt{25-a^2}$$

$$A, A_2 + B, B_2 = 2(\sqrt{7+a^2} + \sqrt{25-a^2}) \leq 2(\sqrt{2}\sqrt{7+a^2+25-a^2}) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$$

$$A, A_2 + B, B_2 \leq 16$$

$$\text{Равенство при } (\sqrt{7+a^2} = \sqrt{25-a^2}) \Rightarrow a = \pm 3$$

При а Тогда точка О может иметь координаты:

$$(\pm 3; \pm 3), \text{ тогда } L = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{А периметр площадь: } 5\pi + 16$$

Ответ: $(5\pi + 16)$ - периметр

$$L = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$$

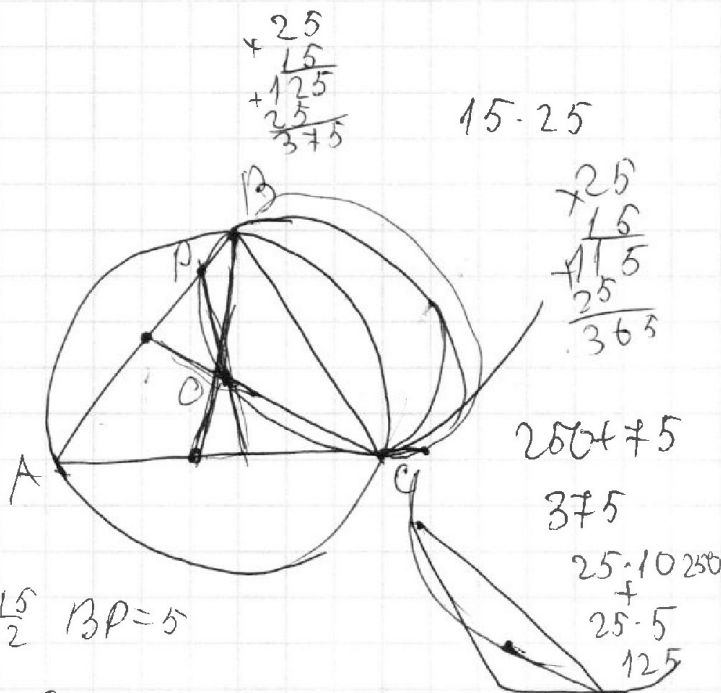
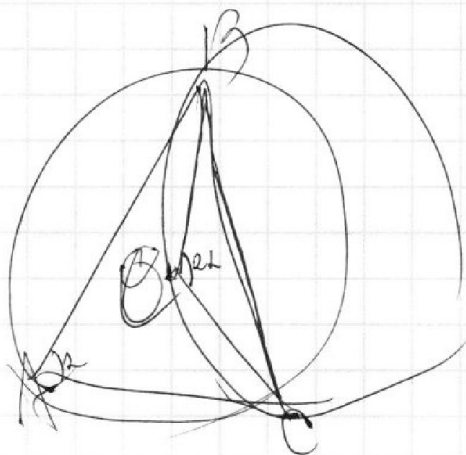


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

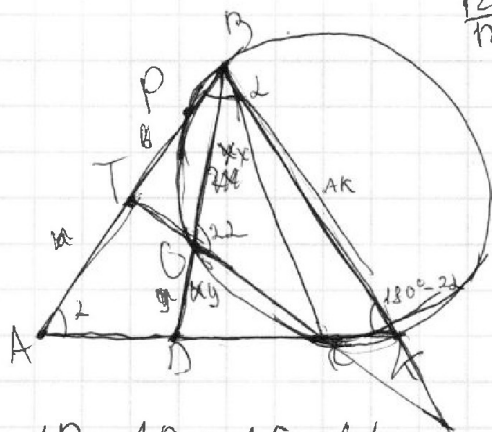
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5$$

$$AC = 9$$



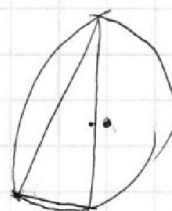
$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$\frac{15 \cdot \frac{25}{2}}{9} = AK$$

$$AK = \frac{125}{12}$$

$$CK = \frac{125}{12} - 9 = \frac{17}{12}$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 234 \\ \hline \end{array}$$



$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BO}{OP} \cdot \frac{PC}{CA}$$



$$\begin{array}{r} 234 \\ 180^\circ - 90^\circ \\ - 22 \\ \hline 180^\circ - 90^\circ \\ 180^\circ - 22 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

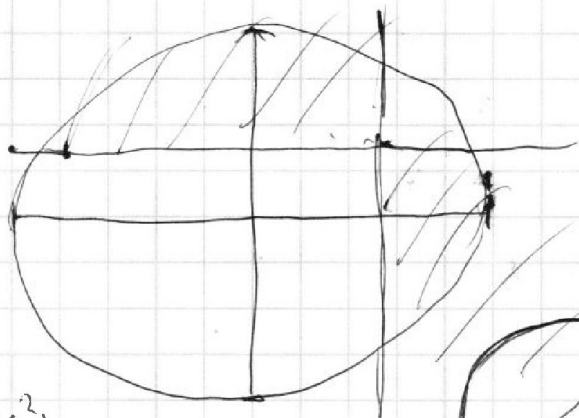
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



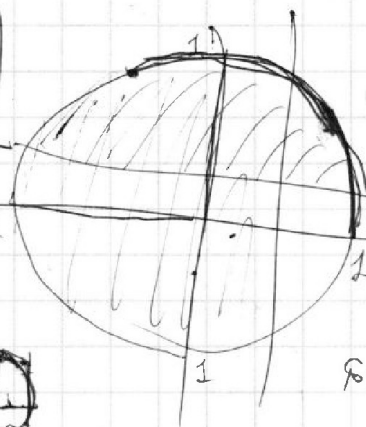
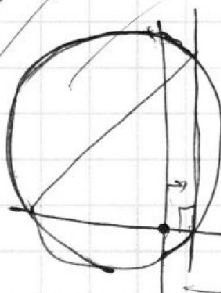
*

$$9 \cdot 2 = 18 \quad y^2 = 18 - x^2$$

$$8\sqrt{2} = 18 \quad y = \sqrt{18 - x^2}$$

*

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha)$$



$\frac{a+b}{2}$
 $\frac{a+b}{2}$

$\frac{a+b}{2}$

$a+b+c+d$

$a+d$

$$(x; \sqrt{18-x^2})$$

$$(a+b) (c+d) (a+c) (b+d)$$

$$2a+b+c \quad 2(\sqrt{25-x^2} + \sqrt{7+x^2})$$

$2\sqrt{5}$
 $10\sqrt{5}$

$$x = \sqrt{25-y^2}$$

$$\sqrt{25-18+x^2}$$

$$2\sqrt{7+x^2}$$

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

MAX

12, 2, 5

$$a+c+b+d$$

$$(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}) \rightarrow \sqrt{2a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$\rightarrow \text{MAX} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$a+b+c+d \rightarrow \text{MAX}$$

$$2x^2 = 18$$

$$x = 3$$

$$x^2 - x = 12$$

$$a+b+c+d \rightarrow \text{MAX}$$

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$c+d \leq \sqrt{2(c^2+d^2)}$$

$$2x^2 = 18 \quad x = 3$$

$$x^2 - x - 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

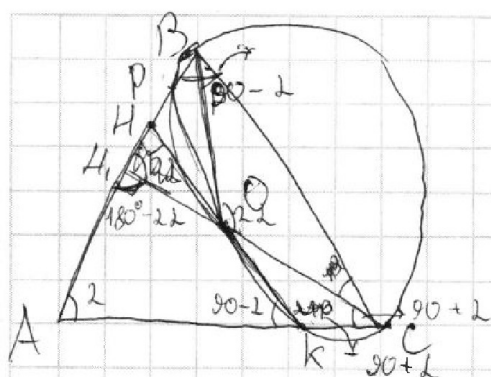
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

$$AB = \frac{25}{2}$$

$$AK \cdot AC = AP \cdot AB$$

$$AK = \frac{AP \cdot AB}{AC} = \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2}}{9} = \frac{375}{36} \Rightarrow KC = 9 - \frac{375}{36}$$

$$\angle OCB = \angle OCB \Rightarrow \angle OCK = \angle OCB \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$$

$$\angle OBC + \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow \angle OCB = 180^\circ - 22$$

$$\angle OCK = \angle OCB = -(180^\circ - 22) + 180^\circ = 90 + 22$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

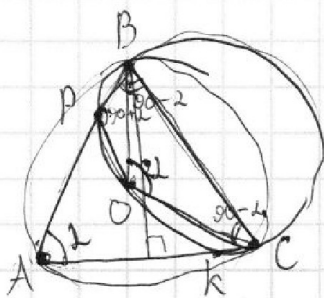
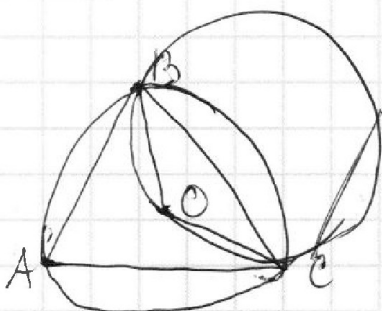
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

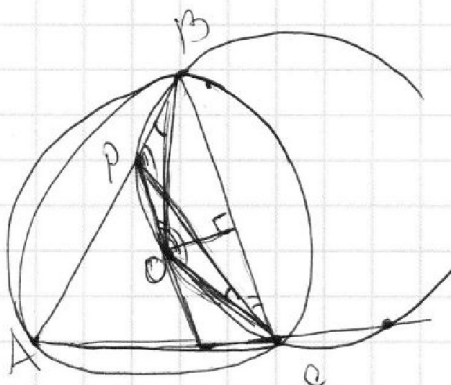
4+x

П и В



S_{ABC}

$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$



а-учеников $\frac{c!}{(x+4)! \cdot (c-x-4)!}$

1 2 3 $(x+3)! \cdot (c-x-4)!$

12

23

13

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$C_a^2 = \frac{a!}{2! \cdot (a-2)!} = \frac{(a-1)a}{2}$$

$$\frac{C_c^4}{C_{c-1}^3} = \frac{\frac{c!}{4! \cdot (c-4)!}}{\frac{(c-1)!}{3! \cdot (c-4)!}} = \frac{c! \cdot 3!}{4! \cdot (c-1)! \cdot (c-4)!} = \frac{c}{4} \cdot \frac{4}{c}$$

$$\frac{C_c^{x+4}}{C_{c-1}^{x+3}} = \frac{x+4}{c}$$

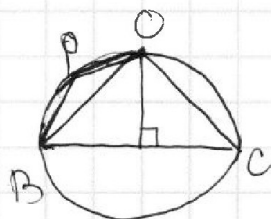
$$\frac{4}{c} \cdot 2,5 = \frac{x+4}{c}$$

$$x+4 = 12$$

$$x = 8$$

12

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin 2x + \sin 2y) \sin 2x = (\cos 2x + \cos 2y) \cos 2x \quad \cos(x+y) =$$

$$\sin^2 2x + \sin 2y \cdot \sin 2x = \cos^2 2x + \cos 2y \cdot \cos 2x \quad \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\cos 22x + \cos(2x+2y) = 0$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos(22x) \cos\left(\frac{32x+2y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-2y}{2}\right) = 0$$

$$\cdot \sin \frac{y-x}{2}$$

$$\frac{32x+2y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$2p+1 \in [-3; 3]$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2}$$

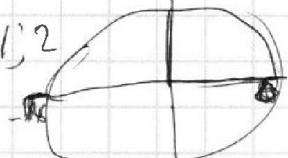
$$3x+y = 1+2n$$

$$2p-1 \in [-3; 3]$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{2x-2y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$p \in [-1; 2]$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x-y = 1+2k$$

$$\arccos(\cos 4) = \pi$$

$$3x+y = 1+2n$$

$$2z-1 \in [-2; 3]$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \quad \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \quad [0; \pi]$$

$$-2x$$

$$1-x+2n$$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} \leq \frac{x}{5} \neq 1$$

$$\begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$$-1 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$\frac{y}{4} \neq 1$$

$$\pi - \pi \quad \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$y = 1-3x+2n$$

$$y = 1+12+2n$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = x-1-2k = -5-1-2k = -\frac{3}{2}$$

$$-6-2k$$

$$1+2n$$

$$x = -4 \quad y = -5-2k$$

$$x = -2 \quad y = -3-2k$$

$$x = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$x = -5$$

$$x = -4$$

$$x = -2$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$(-5; -4) \quad (-5; -2) \quad (-5; 0) \quad (-5; 2)$$

$$(-5; -4) \quad (-2; 0) \quad (2; 4)$$

$$2q$$

$$(-4; -3) \quad (-1; 1) \quad (1; 3)$$

$$1-15+2n$$

$$-14+2n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(A; B; C)$

$(aaaa)$

$(\overline{2bb}, \overline{b2b}, \overline{bb,2})$

$A \cdot B \cdot C$

$4a + 2 + b + b + 3 + c$

$4a + 5 + b + b + c$

$a + b + b + c + 2 \mid 2$
 $2, 01 \pmod{3}$

$B = 202$

$C = 33$

33

101

101

202

$\begin{array}{r} \times 13 \\ 7 \\ \hline 91 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 00 \\ 41 \\ \hline 35 \\ 61 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ + 101 \\ \hline 1111 \end{array}$

98

105

101

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 7 \\ \hline 119 \end{array}$

$$1111 = 101 \cdot 11$$

$$2222 = 2 \cdot 101 \cdot 11$$

$$3333 = 3 \cdot 101 \cdot 11 = 101 \cdot 33$$

$$202 \cdot 33 = 6666$$

$$6666 \cdot 202 \cdot 33 = 6666^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{y(y+1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$y+y+1+2=2y+3$$

$$\frac{1}{(x-1)} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{(y+1)} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{2}{x} \right) = 0$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y(y+1)}$$

$$\frac{y+1-2x}{x(x-1)(y+1)} + \frac{x-2y-2}{y(y+1)x}$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{2}{xy}}$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$x$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$x^3 - 3xy - y^3$$

$$\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$(y-1)^3 - 3y(y-1)$$

$$\frac{y+1}{xy} + \frac{x+1}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} > 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 3y^2 + 3y - y^3$$

$$(1-y)$$

$$(y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1)$$

$$\frac{y+1+x+1}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$x = y+1$$