



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одноклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одноклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одноклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = n \cdot 1111, \text{ где } n \in [1; 9]$$

$$A = n \cdot 101 \cdot 11$$

↓

$$B : 101$$

Единственное число кратное 101, содержащее  $\overset{2}{\cancel{2}}$  и дв-я трёхзнач-ици - это ~~202~~ 202

↓

$$B = \cancel{2}0\overset{2}{\cancel{2}}02$$

$$C : 11 \Rightarrow C = 33, \text{ т.к. } C \text{- содержит } 3$$

$$A \cdot B \cdot C = 33 \cdot 202 \cdot 101 \cdot 11 \cdot n = 1111^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n$$

↓

$$n = 2 \cdot 3$$

$$\text{Ответ: } (6666; 202; 33)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{(y+1)+(x-1)+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\text{т.к. } x+y+2 \neq 0$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$y = x-1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \left( 2 \cos \left( \frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} x \neq y = x - 1 - 2k \\ y = 1 - 3x + 2n \end{cases}, \text{ где } k, n \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \arccos \frac{y}{4} \in [0, \pi]$$

$$\frac{x}{5} \neq 1 \text{ и } \frac{y}{4} \neq -1 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Для целых  $(x; y)$  выражения  $(y = x - 1 - 2k)$  и  $(y = 1 - 3x + 2n)$  равнозначны, т.к.  $\rightarrow 1 - 3x + 2n \Rightarrow 1 - x + 2(n - x)$  с одинаковой чётностью

Тогда решения:  $(-5; 2p), (-4; 2p+1), (-3; 2p),$   
 $(-2p+1; 2p), (-2p; 2p-1), \text{ где } p \in \mathbb{Z}$

Тогда ответ:  $\{(2z+1; 2p), (2k; 2p-1), \text{ где } z \in [-2; 3], p \in [-2; 2]\}$   
 $\text{где точка } (5; -4) \text{- исключена, } k \in [-2; 2], q \in [-1; 2], p, q \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего пар всевозможных пар учеников:  $C_n^2$ , где  $k$ -  
количество учеников.  
 $C_k^2 = C$

Количество способов раздать  $n$  билетов,  $k$  ученикам:

$$C_k^n$$

когда Петя и Вова будут вместе:  $C_{k-2}^{n-2}$

Вероятность:  $\frac{C_{k-2}^{n-2}}{C_k^n} = \frac{(k-2)!}{(n-2)!(k-n)!} \cdot \frac{n!}{k!} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}$

Д. Условие:  $\frac{4(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)}{k(k-1)}$

Условие: 2, 5.  $\frac{4(x-1)}{k(k-1)} = \frac{x(x-1)}{k(k-1)} \Rightarrow x(x-1) = 30 \Rightarrow x=6$

Ответ: 6 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



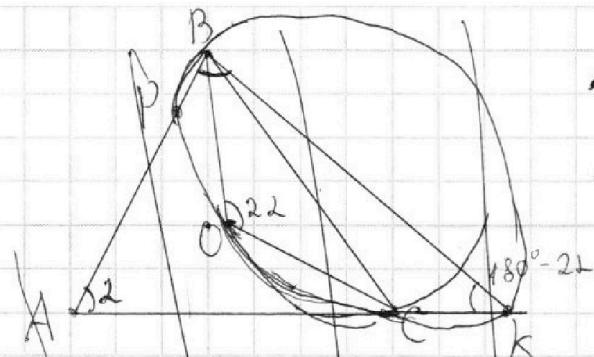







СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5, AC = 9$$

$$AB = \frac{25}{2}$$

$K$  - пересечение  $w_2$  и прямой  $AC$  ~~Чертёж с ошибка~~

$ABC$  - ~~односторонний~~

$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$AK = \frac{12^5}{12} \Rightarrow CK = \frac{17}{12}$$

$$\angle A = 2 \Rightarrow \angle BOC = 22 \Rightarrow \angle BKC = 180^\circ - 22$$

$$\angle ABK = 180^\circ - (2 + 180^\circ - 22) = 2 \Rightarrow AK = BK = \frac{12^5}{12}$$

$$BK^2 = AB^2 + AK^2 - 2 \cos 2 \cdot AB \cdot AK$$

$$\cos 2 = \frac{AB^2}{2AB \cdot AK} = \frac{AB}{2AK} = \frac{25}{2} \cdot \frac{6}{17} = \frac{75}{17}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

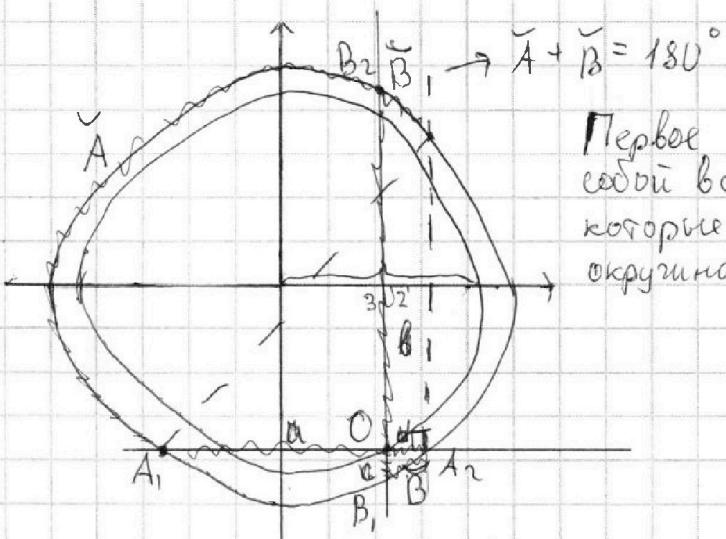
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

( $x - \sqrt{2} \sin \alpha$ )<sup>2</sup>

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Изобразим:



Первое уравнение представляет собой все прямые, которые пересекаются на окружности:  $(x^2 + y^2 = 18)$

Т.к. сумма дуг, образованных пересечением двух хорд (В данном случае  $\hat{A} + \hat{B}$ ), всегда равна половине длины окружности (т.к. если перенести одну из хорд, как на рисунке, сумма останется неизменной, а т.к. угол прямой  $\hat{O}$  сумма половины длины окружности)

Тогда нужно максимизировать сумму хорд.

$$A_1A_2 + B_1B_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$O(a; \sqrt{18-a^2}); A_1(\sqrt{7+a^2}; \sqrt{18-a^2}); A_2(\sqrt{7+a^2}; -\sqrt{18-a^2})$$

$$B_1(a; \sqrt{25-a^2}); B_2(a; -\sqrt{25-a^2})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A_1, A_2 = 2\sqrt{7+a^2}; B_1, B_2 = \sqrt{2}\sqrt{25-a^2}$$

$$A_1, A_2 + B_1, B_2 = 2(\sqrt{7+a^2} + \sqrt{25-a^2}) \leq 2(\sqrt{2}\sqrt{7+a^2+25-a^2}) = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$$

$$A_1, A_2 + B_1, B_2 \leq 16$$

$$\text{Равенство при } (\sqrt{7+a^2} = \sqrt{25-a^2}) \Rightarrow a = \pm 3$$

При каких точках  $O$  может иметь координаты:

$$(\pm 3, \pm 3), \text{ т.к. } 2 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$A \text{ периметр} = 5\pi + 16$$

$$\text{Отв.: } (5\pi + 16) - \text{периметр}$$

$$2 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$$

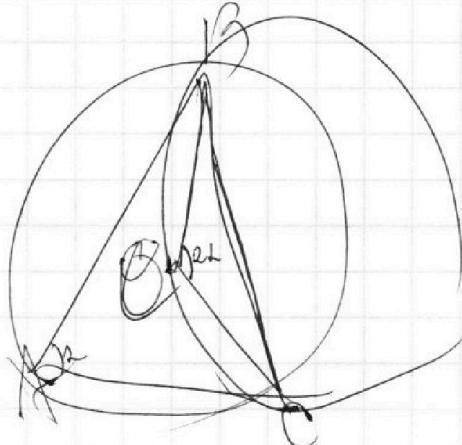


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

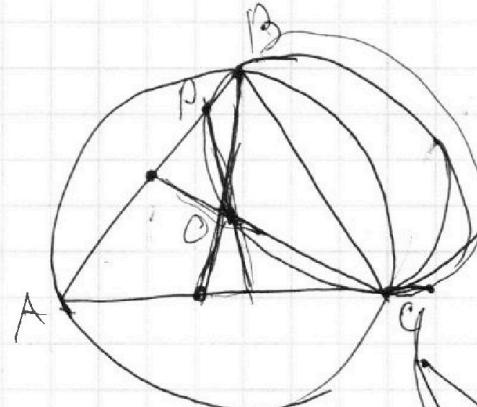
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 25 \\ + 15 \\ + 125 \\ \hline 25 \\ 375 \end{array}$$

$$15 \cdot 25$$



$$\begin{array}{r} 25 \\ + 15 \\ + 115 \\ + 25 \\ \hline 365 \end{array}$$

$$260+5$$

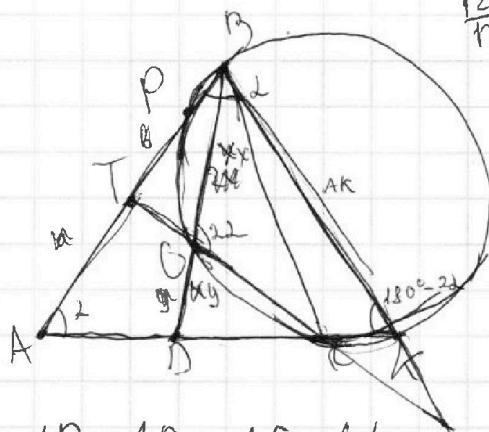
$$375$$

$$\begin{array}{r} 25 \cdot 1025 \\ + 25 \cdot 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

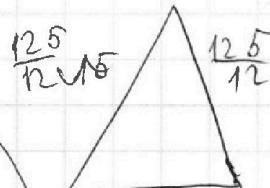
$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5$$

$$AC = 9$$

$$\frac{125}{6} \approx 20 \frac{5}{6}$$

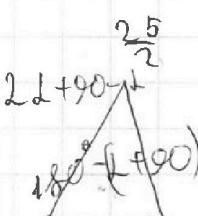


$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$



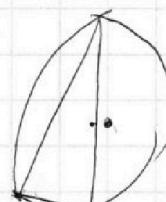
$$\frac{15}{2} + \frac{10}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{15}{2} + 5$$



$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BO}{OP} \cdot \frac{DC}{CK}$$

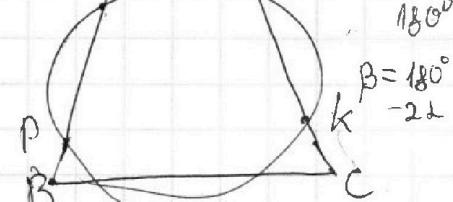
$$\begin{array}{l} 22 + \beta = \\ 180^\circ \end{array}$$



$$\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = AK \quad AK = \frac{125}{12}$$

$$CK = \frac{125}{12} - 9 = \frac{17}{12}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 9 \\ \hline 234 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 234 \\ 180 - 90 \\ \hline 180 - 21 \\ 180 - 90 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

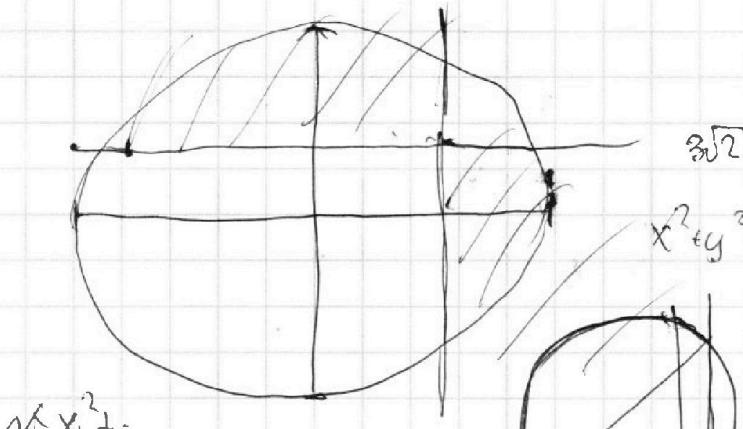
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin(\pi/2)) (y - 3\sqrt{2}\cos(\pi/2)) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

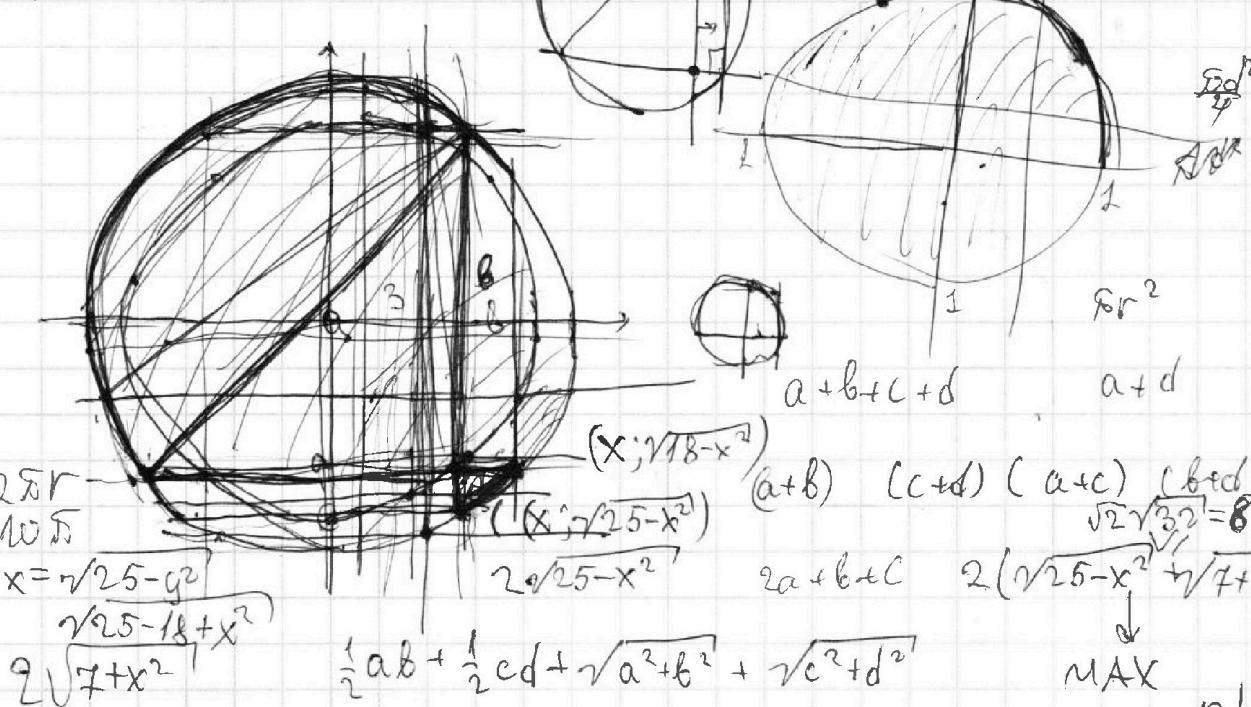
$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



$$9 \cdot 2 = 18 \quad y^2 = 18 - x^2$$

$$3\sqrt{2} = 6 \quad y = \sqrt{18 - x^2}$$

$$(x - 3\sqrt{2}\sin(\pi/2))(y - 3\sqrt{2}\cos(\pi/2))$$



$$a+b+c+d \quad a+d$$

$$(a+b)(c+d)(a+c)(b+d) \quad \sqrt{2}\sqrt{32}=8$$

$$2\sqrt{25-x^2} \quad 2\sqrt{25-x^2} \quad 2\sqrt{25-x^2} + \sqrt{4+x^2}$$

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \quad \text{MAX}$$

$$12 \cdot 2,5 \quad a+c+b+d + \underbrace{(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})}_N \rightarrow \text{MAX} \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$a+b+c+d \rightarrow \text{MAX}$$

$$\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$2x^2 = 18$$

$$x=3$$

$$x^2 - x = 12$$

$$\sqrt{2}d$$

$$a+b \leq \sqrt{2}(a^2+b^2)$$

$$c+d \leq \sqrt{2}(c^2+d^2)$$

$$2x^2 = 18$$

$$x=3$$

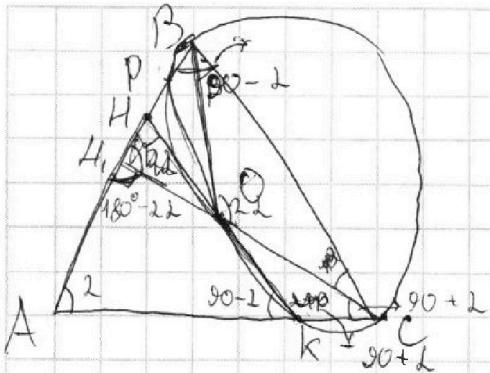


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2} \quad BP = 5 \quad AC = 9$$

$$AB = \frac{25}{2}$$

$$Ak \cdot AC = AP \cdot AB$$

$$Ak = \frac{AP \cdot AB}{AC} = \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2}}{9} = \frac{375}{36} \Rightarrow kC = 9 - \frac{375}{36}$$

$$\angle OCB = \beta \Rightarrow \angle Oke = \angle B \Rightarrow \angle OBC = \beta$$

$$\angle OBC + \angle OCK = 180^\circ \Rightarrow \beta + 23 = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 23$$

$$\angle OKC = \angle OCK = -(\angle OBC) + 180^\circ = 90 + L$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.







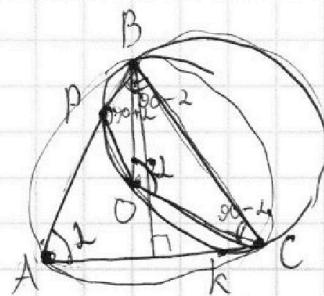
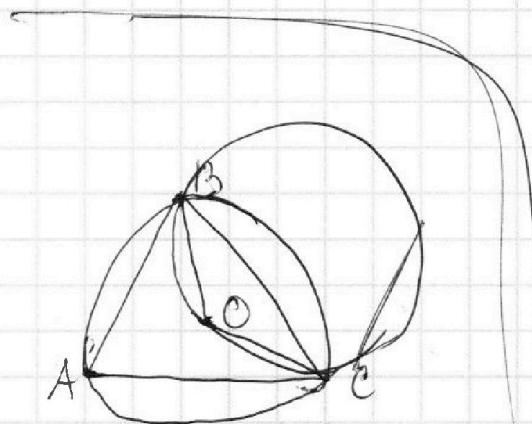
СТРАНИЦА  
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

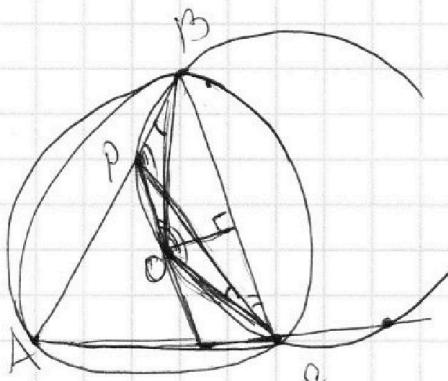
$4+x$

№ и 13



$S_{APC}$

$$AP = \frac{15}{2}, \quad BP = 5, \quad AC = 9$$



а-членников  $\frac{c!}{(x+4)!(c-x-4)!}$

1 2 3  $(x+3)!(c-1)(c-4)$

12  
23  
13

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$C_a^2 = \frac{a!}{2!(a-2)!} = \frac{(a-1)a}{2}$$

$$\frac{C_c^4}{C_{c-1}^3} = \frac{\frac{c!}{4!(c-4)!}}{\frac{c!}{3!(c-3)!}} = \frac{c-3(c-4)!}{4!(c-4)(c-3)!} = \frac{1}{4} \frac{c}{c}$$

$$\frac{C_c^4}{C_{c-1}^3} = \frac{x+4}{c}$$

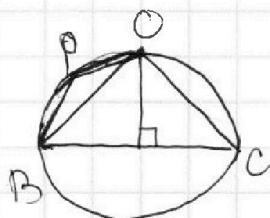
$$\frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{c} = \frac{x+4}{c}$$

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$$

$$x+4=12$$

$$x=8$$

12



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \quad \cos(x+y) =$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x \quad \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos(2\pi x) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \quad \cdot \sin \frac{\pi x}{2}$$

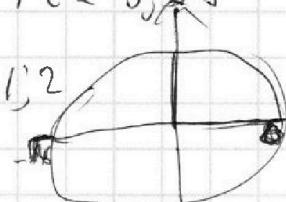
$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$2p+1 \in [-3, 3]$$

$$3x+y = 1+2n$$

$$2p-1 \in [-3, 3]$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad p \in \mathbb{Z} - 1, 2$$



$$x-y = 1+2k$$

$$3x+y = 1+2n$$

$$2z-1$$

$$z \in [-2, 3]$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \quad [0, \pi]$$

$$-2x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \quad \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} / 2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} / 2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} \leq 1 \quad \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$$-1 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} / 2 = \frac{\pi}{4}$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$\frac{y}{4} \neq -1 \quad y = 1 - 3x + 2n$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} / 2 = \frac{\pi}{4}$$

$$y = 1 + 12 + 2n$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$13 + 2n$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = -5 - 2k$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$-6 - 2k$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$x = -2$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = -3 - 2k$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$(-5, -4) (-5, -2) (-5, 0) (-5, 2)$$

$$1 - 15 + 2n$$

$$(-5, (-4, -2, 0, 2, 4))$$

$$-14 + 2n$$

$$(-4, (-3, -1, 1, 3))$$

$$29$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(A; B, C)$$

(~~aaaa~~)

$$\left( \begin{array}{l} 288, \\ 626, \\ 662 \end{array} \right)$$

A · B · C

$$4a + 2 + b + b_1 + 3 + c \cancel{+ b_2}$$

$$4a + 5 + b + b_1 + c \cancel{+ b_2}$$

$$a + b + b_1 + c + 2 \cancel{+ b_2}$$

2 ; 01 (найд 3)

33

101

101

2e 2

x 13

$$\begin{array}{r} 111111 \\ \times 11 \\ \hline 111111 \\ 11 \quad \cancel{11} \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111111 \\ \times 11 \\ \hline 111111 \\ 11 \quad \cancel{11} \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111111 \\ \times 11 \\ \hline 111111 \\ 11 \quad \cancel{11} \\ \hline 101 \end{array}$$

101

$$\begin{array}{r} 111111 \\ \times 11 \\ \hline 111111 \\ 11 \quad \cancel{11} \\ \hline 101 \end{array}$$

$$1111 = 101 \cdot 11$$

$$2222 = 2 \cdot 101 \cdot 11$$

$$3333 = 3 \cdot 101 \cdot 11 = 101 \cdot 33$$

$$B = 202$$

$$202 \cdot 33 = 6666$$

$$C = 33$$

$$6666 \cdot 202 \cdot 33 = 6666^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

~~$$M = \frac{x^3 - y^3 - 3xy}{x(x^2)}$$~~

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{y(y+1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} \quad \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$y+y+1+2=2y+3 \quad \left( \frac{1}{x-1} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{y+1} \right) + \frac{1}{y} \left( \frac{1}{y+1} - \frac{2}{x} \right) \right) = 0$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y(y+1)} \quad \frac{y+1-2x}{x(x-1)(y+1)} + \frac{x-2y-2}{y(y+1)x} \quad x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \geq 3\sqrt[3]{2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

X

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$x^3 - 3xy - y^3$$

$$\frac{1}{x} \left( 1 + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{y} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$(y-1)^3 - 3y(y-1)$$

$$\frac{y+1}{xy} + \frac{x+1}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} \geq 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - 3y^2 + 3y - y^3$$

$$\frac{y+1+x+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

(Nag)

$$(y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1)$$

$$xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y$$

I

$$x = y+1$$