



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A -состоит из однаковых членов $\Rightarrow A = 111 \cdot K$, где $K \in \mathbb{N}$
 $1 \leq K \leq 9$.

$$A = 1111 \cdot K = 11 \cdot 101 \cdot K. \quad 101, 11 - \text{простые}$$

Но $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot K \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow$ Вместе с 101 , т.к. $C < 100 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$

но т.к. у числа B есть член $"2"$ $\Rightarrow B = 202 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot K \cdot 2 \cdot 101 \cdot C = n^2 \Rightarrow 101^2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot K \cdot C \Rightarrow C : 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\} \Rightarrow C = 33, \text{т.к. } 6 \mid C \text{ Элемент } "3"\}$$

$$\Rightarrow n^2 = 101 \cdot 11 \cdot K \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot K \Rightarrow K : 6, \quad K = \{1, 3, 5, 6, 9, 15\}$$

$$\Rightarrow K = 6 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 6666 \\ B = 202 \\ C = 33 \end{array}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y}{yx} + \frac{x}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{2+x+y}{xy}.$$

$$\frac{2+x+y}{xy} = \frac{2(x-1)+(y+1)}{(x-1)(y+1)} = \frac{2x+y}{xy+x-y-1}, \text{ тк. } x, y > 0 \Leftrightarrow 2x+y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow xy = xy + x - y - 1 \Rightarrow \underline{y+1=x} \Rightarrow x-y=1.$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = \underset{\pi}{\cancel{(x-y)}}(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^3 - xy + y^2 - 3xy = \\ = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1^2 = 1, \Rightarrow M = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$① (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi(x+y))$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x+y) + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi(x+y) + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x+y + 2k \\ 2x = -x-y + 2k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 2k \\ y = -3x + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x; 2k+x) \\ (x; -3x+2k) \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ 4 \leq y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \underbrace{\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x}{5}}_{\frac{\pi}{2}} + \pi$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \arccos \frac{x}{5} + \pi \Rightarrow$$

т.к. $\arccos a \in [0; \pi] \Rightarrow$ единственный случай когда

может быть знак $>$, когда $\arccos \frac{y}{4} = \pi$, $\arccos \frac{x}{5} = 0$, т.к. $\arccos \frac{y}{4} \leq \pi$, $\arccos \frac{x}{5} + \pi \geq \pi$.

Значит $\begin{cases} \frac{x}{5} = -5 \Rightarrow x = -25 \\ \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$ подходит ли эти корни в ур-ие б) а).

$5 \cdot 2k + 5 = \Rightarrow 2k + 5 \neq 287$, а $y = -4 : 2 \Rightarrow k = -150$ не подходит, т.к. $-150 \notin \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит мы получили, что $X \neq Y$: Будем выкладывать
пер-во. ~~значит~~ то, что могут быть корнями ур-ия в с)

$$X = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

т.к. $y = X^2$ и $-3X^2$ \Rightarrow генность сохраняется.

Если $X \geq 2 \Rightarrow Y \geq 2$ и наоборот, т.к. $-4 \leq Y \leq 4 \Rightarrow$ уз решения
 $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 \Rightarrow$ 5 генных и 4 негенных.

Задано условие X прибавляется к 2 и мы делим
до и до всех генных $Y \leq 4$ и к негенным $-4 \leq Y \leq 4$, зале-
сив от генности X . \Rightarrow Для $X \geq 2$, поддающихся $y =$
~~и~~ 5 штук, а для $X \leq 2$ – 4 штуки.

Между $-5 \leq X \leq 5$ 6 негенных X и 5 генных $X \Rightarrow$
 \Rightarrow Всего есть $6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 49$. Ответ: 49.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть было y -учеников и x -дней в конце месяца. $A_{y-1}^x \cdot A_{y-2}^{x-1} \cdot \dots \cdot A_2^1 = \frac{y!}{(y-x)!}$

Вероятность получить в начале года баллов P и B :

$$C_1 = \frac{A_y^2 \cdot A_{y-2}^{x-2} \cdot A_{y-4}^{x-4} \cdots}{A_y^x} = \frac{A_y^2 \cdot A_{y-2}^2 \cdots}{A_y^4} = \text{коэффициент}$$

(коэффициент вероятности получить P и B) (коэффициент вероятности разделить оставшееся баллы оставшиеся $y-2$ ученикам (коэффициент всех возможных вариантов разделить y баллами ученикам)).

Вероятность получить в конце года баллов P и B :

$$C_2 = \frac{A_x^2 \cdot A_{y-2}^{x-2}}{A_y^x} = \frac{\text{(вероятность вер. получить 2балла П и В)} \cdot \text{(коэффициент вер. получить оставшиеся } x-2 \text{баллы } y-2 \text{ ученикам)}}{\text{коэффициент вер. разделить все } x \text{ баллы } y \text{ ученикам.}}$$

$$2,5 C_1 = C_2$$

$$\frac{2,5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (y-2)(y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} = \frac{x(x-1) \cdot (y-2)(y-3) \cdots (y-x+1)}{y(y-1)(y-2) \cdots (y-x+2)}$$

$$\frac{30}{y(y-1)} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)} \Rightarrow 30 = x(x-1), \text{ т.к. } x > 0 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

При $y > 4$, т.к. изначально вероятность одна для $x=1$, а $\Rightarrow C_2=35$, это невозможно.

$$\text{Если } y \leq x \Rightarrow C_2=1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (y-2)(y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} = \frac{2}{5} = \frac{12}{y(y-1)} \Rightarrow y(y-1) = 30 \Rightarrow y=6, \text{ т.к. } y>0 \Rightarrow \text{так как } x \geq y \text{ и } y > 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит если учеников было 6, то
бывало в конце года было ≥ 6 . Если учеников
 $\neq 6 \Rightarrow$ бывало было 6.

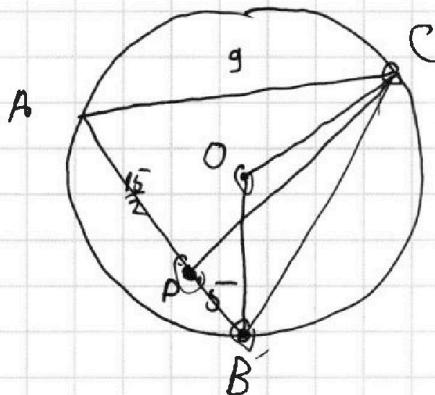


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Четырехугольник BPOC - впис. $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC$.

$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$ - центральный угол и впис., следовательно они равны.

Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow \angle BPC = 2\alpha$.

$\angle BAC + \angle ACP = \angle BPC$ (внешний угол) $\Rightarrow \angle ACP = \angle BPC - \angle BAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$

$\Rightarrow \angle PAC = \angle PCA \Rightarrow \triangle PAC - \text{р.д.}, \text{ где } PA = PC \Rightarrow PC = \frac{15}{2}$.

Найдем $\angle L$ по т. Кошицова для $\triangle ACP$:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{225}{4} = \frac{225}{4} + 81 - 15 \cdot 9 \cdot \cos \alpha$$

$15 \cdot 9 \cdot \cos \alpha = 9 \cdot 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, т.к. $\triangle ABC$ - остроугольный $\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 5 \cdot 9 = 45$$

Ответ: 45

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

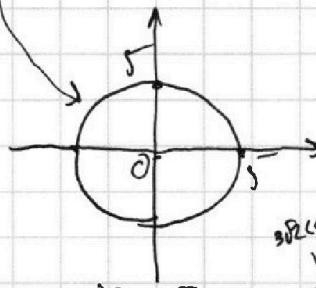
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

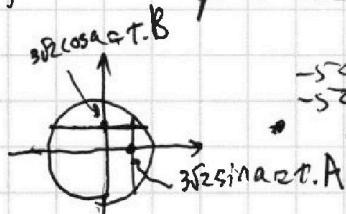
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 5 \\ ((x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{окружность с центром } (0; 0) \text{ и } R = 5.$$

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x > 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y < 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x < 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y > 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$



Т.к. радиусы окружности равны, картина

Если $\sin\alpha > 0$
 $\cos\alpha > 0$

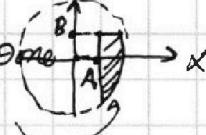


$$-5 \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \leq 5$$

$$-5 \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \leq 5$$

* Рассмотрим все возможные

轨迹, которые можно получить в круге с $X=\text{const} = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y=\text{const} = 3\sqrt{2}\cos\alpha$. Так же подходит область:



область



⇒ конечная фигура



Сумма

участков.

Найдем длину дуг $CD+EF$. Пусть $\angle EOA = \alpha$, $\angle AOF = \beta$,

\Rightarrow дуга CD выражается углом $\alpha + \beta$. $\angle DOA = \angle AOF$ фиксированы.

относ. углы. $\angle DOA = \angle AOF$. $\angle EOK = \angle FOK$ в силу симметрии. отнс. угл. $\angle COK = \angle DOK \Rightarrow \angle COD = 180^\circ - \angle EOK - \angle DOA - \angle COK =$

$$= 180^\circ - \beta - \alpha \Rightarrow \angle COD + \angle EOF = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ$$

$\Rightarrow |\angle COD| = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$. Тогда сумма дуг $DE+CF$ тоже πR .

Понятно, что фигура дуга $const$, независимо от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а так же от знаков. Осталось еще показать

2 ломтика CE и DF . их длина не зависит от знака $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

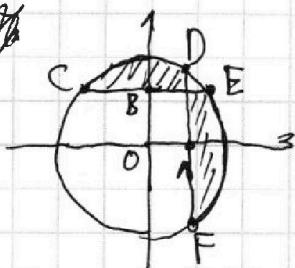
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда получим $\sin \alpha$, $\cos \alpha$. В дальнейшем кратчайше $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ обозначим $\pm \cos \alpha$; $\pm \sin \alpha$
 $\mp \cos \alpha$; $\mp \sin \alpha$.

№



Найдем $DF + CE$:

$$D(3\sqrt{2}\sin \alpha; \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin \alpha)^2}) \Rightarrow D(3\sqrt{2}\sin \alpha; \sqrt{25 - 18\sin^2 \alpha})$$

$$F(3\sqrt{2}\sin \alpha; 2 - \sqrt{25 - (3\sqrt{2}\sin \alpha)^2}) \Rightarrow F(3\sqrt{2}\sin \alpha; 2 - \sqrt{25 - 18\sin^2 \alpha})$$

$$\Rightarrow \text{длина } DF = 2\sqrt{25 - 18\sin^2 \alpha}. \text{ Аналогично } CE = 2\sqrt{25 - 18\cos^2 \alpha} = 2\sqrt{7 + 18\sin^2 \alpha}.$$

$$DF + CE \rightarrow \max 2(\sqrt{25 - 18\cos^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18\sin^2 \alpha}) \rightarrow \max \Rightarrow$$

$$\bullet 4(25 - 18\cos^2 \alpha + 7 + 18\sin^2 \alpha + 2\sqrt{(25 - 18\cos^2 \alpha)(7 + 18\sin^2 \alpha)}) =$$

$$\bullet 4(32 + 2\sqrt{(25 - 18\cos^2 \alpha)(7 + 18\sin^2 \alpha)}) \rightarrow \max \Rightarrow$$

$$\bullet \sqrt{(25 - 18\cos^2 \alpha)(7 + 18\sin^2 \alpha)} \rightarrow \max t = \cos^2 \alpha \Rightarrow t \geq 0$$

$$(25 - 18\cos^2 \alpha)(7 + 18\sin^2 \alpha) = (25 - 18t)(7 + 18t) = 175 + 18^2 t - 18^2 t^2$$

$$X_B = \frac{18^2}{7 + 18^2} = \frac{1}{2} \quad Y_B = 175 + \frac{324}{2} - \frac{324}{4} = 175 + 162 - 81 = 256, \text{ т.к. симметричный квадрат } CO = K_B \text{ лежит на отрезке } [O, I] \Rightarrow \max(175 + 18^2 t - 18^2 t^2) \text{ на } [O, I] = Y_B = 256 \Rightarrow t = \frac{1}{2} = \cos^2 \alpha$$

$$\text{Тогда } DF + EF = 2(\sqrt{25 - 18\cos^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18\sin^2 \alpha}) = \max, \text{ при } \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DF + EF = 2(\sqrt{16} + \sqrt{16}) = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow \max M =$$

$$\max(DF + EF) + CD + EF = \boxed{16 + 50}$$



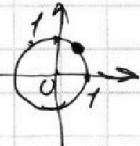
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Максимум достигается при $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



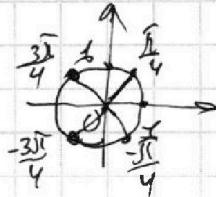
Как уже сказали ранее

если подходит $\cos \alpha$, то подходит $-\cos \alpha$, если

$\sin \alpha$ подходит, то и $-\sin \alpha$ подходит $\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}}$$

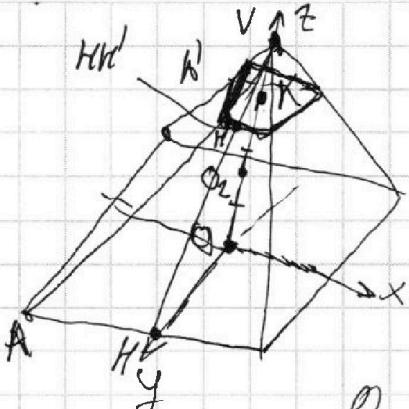


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



O_1 -центр Δ

O_2 -центр Δ .

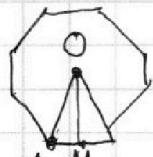
Проведем оси O_x, O_y, O_z . В

среду симметрии пирамиды

O_1 и O_2 лежат на O_z , причем

Т.к. O_1 из O_2 на основание лежит и на O_z , то
постр. т. $O(0;0;0)$, Т.к. $(0;0;2r)$, $\Rightarrow r$ - радиус Δ .

Пусть в основании лежит n -угольная правильная
шестиугольника. \Rightarrow



Мыть длина стороны основания
 $= 1 \Rightarrow A \text{.} x = -\frac{1}{2}, A \text{.} z = 0, A \text{.} y = \frac{1}{2}$

Т.к. в гранет $\angle AOM = \frac{\pi}{n} \Rightarrow A \text{.} y = \frac{1}{2 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}; 0)$

Но найдем A' . V -вершина до пирамиды $V(0,0,h) \Rightarrow$

направляющий вектор, т.к. $A'A' = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}; h)$.
 $A'z = 2r$. $\Rightarrow A'x + \frac{1}{2} = \frac{A'y - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}}{-\frac{1}{2 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}} = \frac{2r - h}{h} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A'x = \frac{4r}{h} - 2,5$$

$$A'y = -\frac{r}{h \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{4r}{h} - 2,5; -\frac{r}{h \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}\right)$$

Тогда длина стороны верхнего основания

$$\Rightarrow \left| \frac{4r}{h} - 2,5 - \left(2,5 - \frac{4r}{h} \right) \right| = \left| \frac{8r}{h} - 5 \right|$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Моштаем тангенс кинчего основания:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot OH \cdot n = AH \cdot OH \cdot n = \frac{OH \cdot n}{2} \Rightarrow OH = \frac{1}{2\pi R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{осн}} = \frac{\pi R^2}{4\pi R} = \frac{\pi R}{4}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1 + \left[\frac{8R}{n} - 8 \right]}{2} \cdot HH' = \frac{1 + \frac{8R}{n} - 8}{2} \cdot HH'$$

так как $AH \perp ZH$ и $ZH \perp HH'$ \Rightarrow $HH' \perp ZH$

$$HZ^2 = \frac{1}{4\pi R^2 \left(\frac{n}{2} \right)} + h^2 = \frac{1}{4 \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 1 \right)} + h^2 = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{4 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)} + h^2 = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4\pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right)}{4 \cos \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\sin \angle ZHO = \frac{ZO}{HZ} = \frac{h \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4\pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HH' = \frac{2\pi}{\sin \angle ZHO} = \frac{\pi \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4\pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right)}}{h \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = \frac{1 + \left[\frac{8R}{n} - 8 \right]}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4\pi \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right)}}{h \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(7+18t)(25-18t) = 324$$

$$= 175 + 18^2 t - 18t^2$$

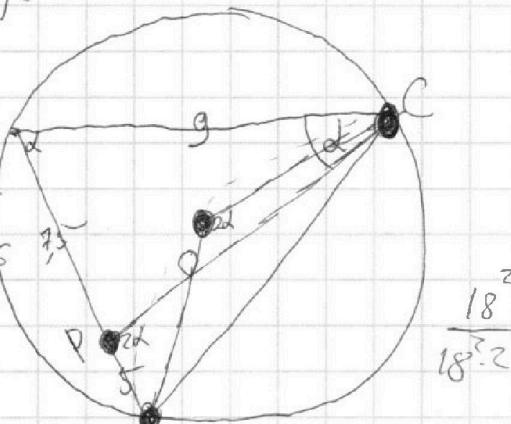
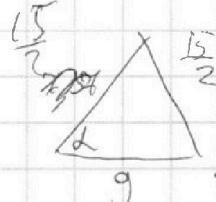
$$18$$

$$-8t + 162 + 175$$

$$8t + 175 = 256$$

$$-18t^2 + 18^2 t + 175 =$$

$$-18 \cdot \frac{1}{4} + 18^2 \cdot \frac{1}{2} + 175 =$$



$$7 + 18 \sin^2 \alpha = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{225}{4} = \frac{225}{4} - 81 - \cancel{\frac{225}{4} \cdot 15 \cdot g \cdot \cos \alpha}$$

$$15 \cos \alpha = 9$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{225-81}}{15} = \frac{\sqrt{144}}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) - \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} \cdot \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} =$$

$$25 - 18 \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha$$

$$\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} =$$

S_{ABC}

$$PC = 7, 5$$

$$3 > 2$$

$$-5 < -4$$

$$\frac{18}{18^2 \cdot 2}$$

$$X = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

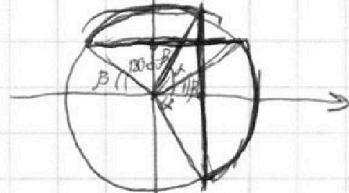
$$Y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$X > 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

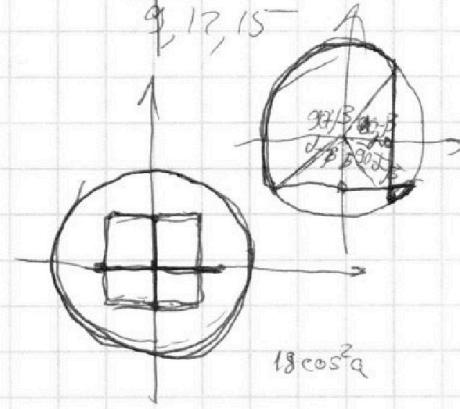
$$Y < 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$X < 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$Y < 3\sqrt{2} \cos \alpha$$



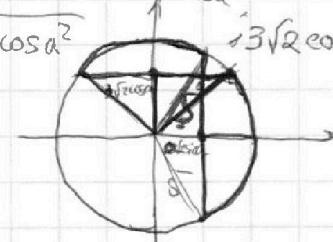
$$g, 12, 15$$



$$18 \cos^2 \alpha$$

$$\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$13\sqrt{2} \cos \alpha;$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4 \text{ балла}}{X \text{ в конце}} \quad ? \cdot \frac{C_4^2 \cdot C_{y-2}^2}{C_y^4} = \frac{C_x^2 \cdot C_{y-2}^{x-2}}{C_y^x \cdot C_{y-2}^{x-1}}$$

$\frac{8 \cdot 4}{2}$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot C_4^2 \cdot C_{y-2}^2}{C_y^4} = \frac{C_x^2 \cdot C_{y-2}^{x-2}}{C_y^x \cdot C_{y-2}^{x-1}}$$

C_5^3

$\frac{180}{30} = 6$

$\frac{180}{30} = 6$

$$\frac{15 \cdot (y-2)! \cdot 4! \cdot (y-4)!}{2(y-4)! \cdot y!} = \frac{X! \cdot (y-2)! \cdot X! \cdot (y-4)!}{2!(x-2)! \cdot (X-2)! \cdot (y-4)! \cdot y!} = \frac{X!^2 \cdot 5 \cdot 4}{2^2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{180}{(y-1)y} = \frac{y(y-1)}{2}$$

$X\text{-баллов в конце}$
 $y\text{-баллов}$

$$\frac{5 \cdot C_4^2 \cdot C_{y-2}^2}{C_y^4} = \frac{2 \cdot C_x^2 \cdot C_{y-2}^{x-2}}{C_y^x \cdot C_{y-2}^{x-1}}$$

$$\frac{30}{y(y-1)} = \frac{x(x-1)(y-2)}{y(y-1)}$$

$$\frac{15 \cdot (y-2)!}{2 \cdot 4 \cdot 4!} \cdot \frac{4! \cdot (y-4)!}{y!} = \frac{X!}{2(x-2)!} \cdot \frac{(y-2)!}{(x-2)!(y-x)!} \cdot \frac{y!}{x!(y-x)!} = \frac{X!^2 \cdot (y-4)!}{y!^2}$$

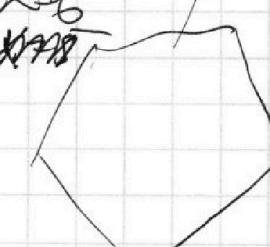
$$\frac{180}{y(y-1)} = \frac{x^2(x-1)^2}{2y(y-1)}$$

$$\frac{360 \cdot 25}{95 \cdot 2 \cdot 72} = \frac{144 \cdot 25}{4}$$

$$\frac{6 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

2 2 3 4 5 - бал.

~~X=6~~
~~X=7~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 4 \text{ тыс. } 111, \overset{m^2}{\dots}, 9999$$

$$B = 3$$

$$C = 2$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot k \cdot B \cdot C = k^2$$

$$B = 101 \cdot l = 202$$

$$11 \cdot 101 \cdot k \cdot 2 \cdot 101 \cdot C = k^2$$

$$101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot k \cdot C = k^2$$

$$101^2 \cdot 22 \cdot k \cdot C$$

$$101^2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot k \cdot 3 \cdot 11$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{2+x+y}{xy} = \frac{2+x+y}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = xy + x - y - 1 \Rightarrow 0 = x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1.$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy = \begin{cases} (\sin \alpha x + \sin \beta y) \sin \alpha x = \\ x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1 \\ = (\cos \alpha x + \cos \beta y) \cos \alpha x \end{cases}$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \quad \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) \quad \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin A + \sin B \quad 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y + \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y + \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos(\pi(x+y))$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi(x+y))$$

COS

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x+y) + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi(x+y) + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x+y+2k \\ 2x = -x-y+2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y+2k \\ 3x = -y+2k \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5}, \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4}$$

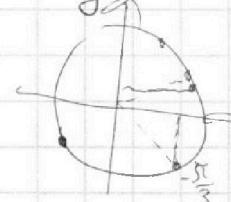
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x}{5} + \pi$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \arccos \frac{x}{5} + \pi$$

$$\frac{y}{4} =$$

$$x = y + 2k$$

$$x - 2k = y$$



$$\begin{matrix} x \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Diagram illustrating a regular n -sided pyramid inscribed in a circle with center O_2 . The pyramid has height $h - H$, slant height $\sqrt{\frac{n}{\sin \frac{180}{n}}}$, and base side length $a + b$.

Key points and coordinates:

- Center of the base circle: $O_2(0,0; H)$
- Top vertex: $A(0,0, \frac{h}{2})$
- Bottom vertex: $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$
- Base vertices: $(1,0,0), (0,1,0), (-1,-1,0)$
- Slant height formula: $\sqrt{\frac{n}{\sin \frac{180}{n}}}$
- Volume formula: $\frac{a+b}{2} \cdot h \cdot R \cdot B \cdot C$
- Surface area formula: $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{\frac{n(n-2)}{2 \tan \frac{180(n-2)}{n}}}$
- Radius of the circumscribed sphere: $\sqrt{\frac{(a+b)^2 + h^2}{4} + R^2}$
- Height of the pyramid: $h = \sqrt{R^2 + \frac{(a+b)^2}{4}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!