



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A$  состоит из одинаковых цифр  $\Rightarrow A = 1111 \cdot K$ , где  $K \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq K \leq 9$ .

$$A = 1111 \cdot K = 11 \cdot 101 \cdot K. \quad 101, 11 - \text{простые}$$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot K \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow \text{Видим } C : 101, \text{ т.к. } C < 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = \{101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909\}$$

$$\text{но т.к. у числа } B \text{ есть цифра "2"} \Rightarrow B = 202. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot K \cdot 2 \cdot 101 = n^2 = 101^2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot K \Rightarrow C : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\} \Rightarrow C = 33, \text{ т.к. в } C \text{ цифра "3"}$$

$$\Rightarrow n^2 = 101 \cdot 11 \cdot K \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot K \Rightarrow K : 6, K = \{1, 3, 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 6 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 6666 \\ B = 202 \\ C = 33 \end{array}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y}{yx} + \frac{x}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{2+x+y}{xy}$$

$$\frac{2+x+y}{xy} = \frac{2+(x-1)+(y+1)}{(x-1)(y+1)} = \frac{2+x+y}{xy+x-y+1}, \text{ т.к. } x, y > 0 \Leftrightarrow 2+x+y > 0$$

$$\Rightarrow xy = xy + x - y - 1 \Rightarrow \underline{y+1=x} \Rightarrow x-y=1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = \underbrace{(x-y)}_1 (x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy =$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1^2 = \underline{1} \Rightarrow \underline{M=1}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☒4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. С границы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi(x+y))$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x+y) + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi(x+y) + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x+y + 2k \\ 2x = -x-y + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 2k \\ y = -3x + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} (x; 2k+x) \\ (x; -3x+2k) \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \underbrace{\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x}{5}}_{\frac{\pi}{2}} + \pi$$

$$\arccos \frac{y}{4} < \arccos \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

Т.к.  $\arccos a \in [0; \pi] \Rightarrow$  единственный случай когда

меняется знак  $\geq$ , когда  $\arccos \frac{y}{4} = \pi$ ,  $\arccos \frac{x}{5} = 0$ , т.к.  $\arccos \frac{y}{4} \leq \pi$ ,  $\arccos \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} \geq \pi$ .

Значит  $\begin{cases} \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5 \\ \frac{y}{4} = -1 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$  подходит ли эти корни в ур-ие в а).  
 $5 - 2k = 5 \Rightarrow 2k = 0, \text{ а } y = -4: 2 \Rightarrow k = 0$   
 $5 - 15 + 2k = -4 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$  не подходит.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Знает ли пацани, что  $x$  и  $y$ ? Будет выполняться  
пер-во. ~~что~~ ~~то~~ могут быть корнями ур-ня в  $\mathbb{Z}$   
 $x \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Т.к.  $y = x^2 \pmod{5}$  или  $-3x^2 \pmod{5} \Rightarrow$  четность сохраняется.

Если  $x \equiv 2 \pmod{5}$  и наоборот,  $4 \leq y \leq 4 \Rightarrow$  ур-ня  
 $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 \Rightarrow$  5 четных и 4 нечетных.

Зафиксировав  $x$  прибавляя или убавляя по 2 мы дойдем  
до либо всех четных  $y \leq 4$  или нечетных  $-4 \leq y \leq 4$ , зави-  
сит от четности  $x$ .  $\Rightarrow$  Для  $x \equiv 2$ , подходящих  $y$  -  
5 штук, а для  $x \equiv 1$  - 4 штуки.

Между  $-5 \leq x \leq 5$  6 нечетных  $x$  и 5 четных  $x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  всего пер  $6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 49$ . Ответ: 49.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть было  ~~$y$~~   $y$ -учеников и  $x$ -билетов в конце  
месяца  ~~$A_n = \frac{n!}{(n-k)!}$~~   $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Вероятность получить в начале года билеты  $\Pi$  и  $B$ :

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot (y-2)(y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} \cdot C_2 = \frac{A_y^2 \cdot A_{y-2}^2}{A_y^4} = \text{ка-ва-ва}$$

$=$  (ка-во вариантов получить билеты  $\Pi$  и  $B$ ) / (ка-во вариантов  
раздать оставшиеся билеты оставшимся  $y-2$  ученикам  
(ка-во все возможных вариантов раздать 4 билета  
ученикам)).

Вероятность получить в конце года билеты  $\Pi$  и  $B$ :

$$C_2 = \frac{A_x^2 \cdot A_{y-2}^{x-2}}{A_y^x} = \frac{\text{(вер-ка-во вар. получить 2 билета \Pi и B)} \cdot \text{(ка-во вер. получить оставшиеся } x-2 \text{ билета } y-2 \text{ ученикам)}}{\text{ка-во вар раздать все } x \text{ билетов } y \text{ ученикам.}}$$

$$2,5 C_1 = C_2$$

$$\frac{2,5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (y-2)(y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} = \frac{x(x-1) \cdot (y-2)(y-3) \cdot \dots \cdot (y-x+1)}{y(y-1)(y-2) \cdot \dots \cdot (y-x+1)}$$

$$\frac{30}{y(y-1)} = \frac{x(x-1)}{y(y-1)} \Rightarrow 30 = x(x-1), \text{ т.к. } x > 0 \Rightarrow \boxed{x=6.1}$$

$y > 4$ , т.к. изначальная вероятность для  $\text{отк} = 1$ , а  $\Rightarrow C_2 = 2,5$ ,  
это невозможно.

$$\text{Если } y \leq x \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{4 \cdot 3 \cdot (y-2)(y-3)}{y(y-1)(y-2)(y-3)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{12}{y(y-1)} \Rightarrow y(y-1) = 30 \Rightarrow y \geq 6, \text{ т.к. } y > 0 \Rightarrow \text{для } \forall x \geq y \text{ уга.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

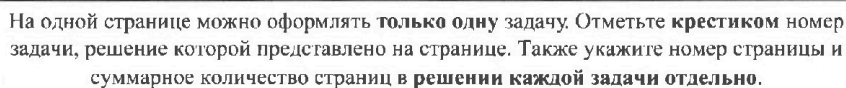
|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

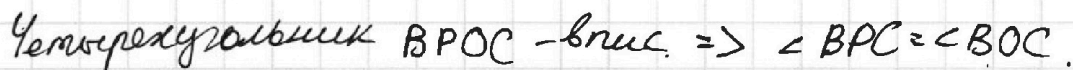
Значит если учеников было 6, то  
билетов в конце года было  $\geq 6$ . Если учеников  
 $\neq 6 \Rightarrow$  билетов было  $\boxed{6}$ .





СТРАНИЦА  
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$  - центральный угол и впис. опир на одну дугу.

Прочитав  $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow \angle BPC = 2\alpha$ .

$$\angle BAC + \angle ACD = \angle BPC \text{ (Exterior angle)} \quad \angle ACD = \angle BPC - \angle BAC = 26^\circ - 13^\circ$$
$$\Rightarrow \angle BAC = \angle PCA \Rightarrow \triangle PAC \sim \triangle PAB, \text{ yf } PA = PC \Rightarrow PC = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Найдем  $L$  по Т. Кошиков для  $\Delta ACP$ :

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos 2$$

$$\frac{225}{4} = \frac{225}{4} + 81 - 15 \cdot 9 \cdot \cos 2$$

$$15 \cdot g \cdot \cos \alpha = g \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{15} = \frac{2}{5}, \text{ т.к. } \triangle ABC - \text{остроугольный}$$

Now  $\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{5} = \frac{4}{5}$ .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot \frac{15 \cdot 10}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 5 \cdot 9 = 45$$

Omben: 45

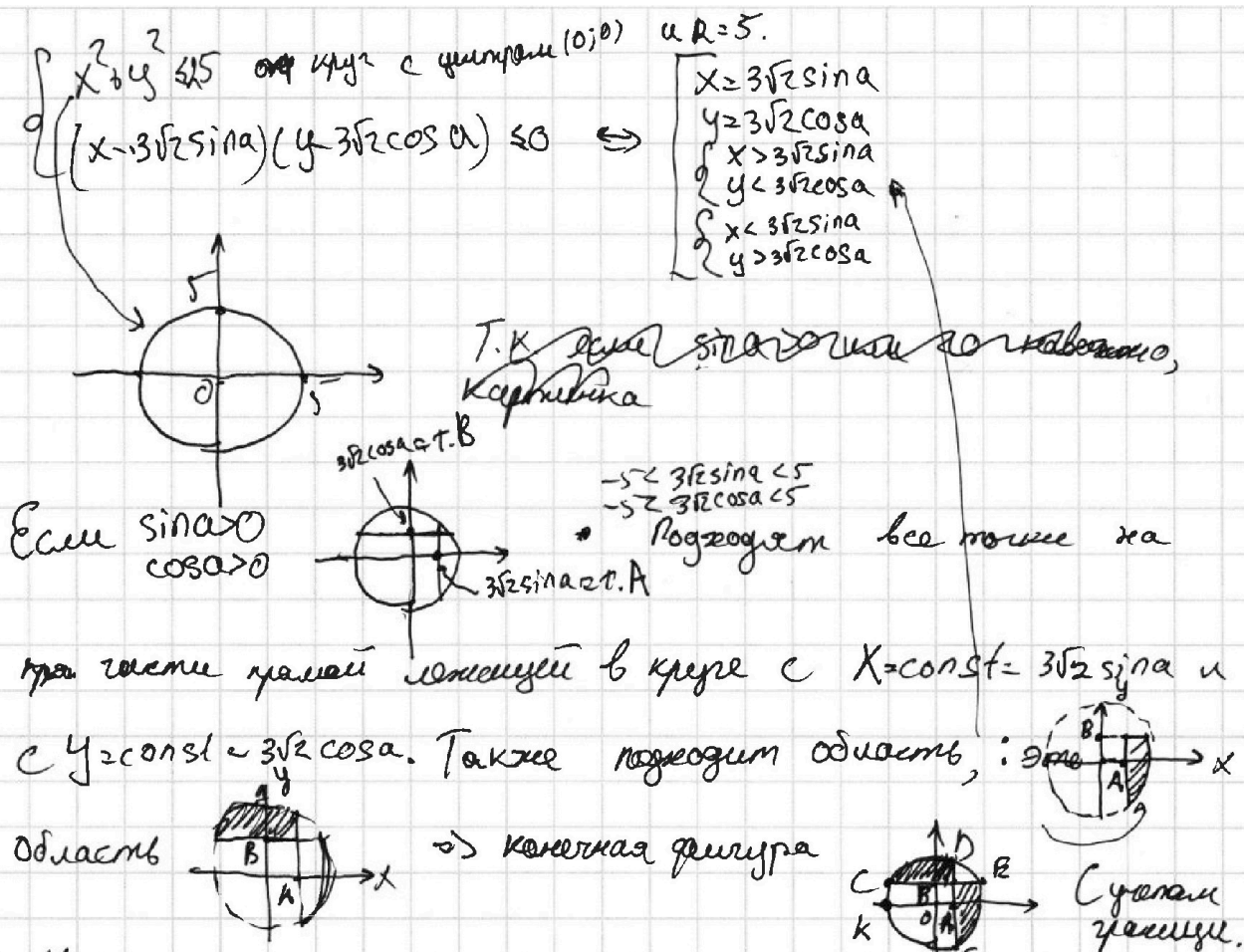


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найдем длину дуг  $CD + EF$ . Пусть  $\angle EOA = \alpha$ ,  $\angle AOF = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$  дуга выкается углом  $\angle DOA = \angle AOF$  в силу

симметрии. отн.  $OK \Rightarrow \angle DOA = \beta$ .  $\angle EOK = \angle EOA$  в силу

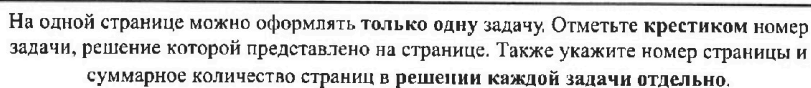
сим. отн.  $Oy \Rightarrow \angle COK = \alpha \Rightarrow \angle COD = 180^\circ - \angle EOA - \angle COK =$

$= 180^\circ - \beta - \alpha \Rightarrow CD + EF$  выкается углом в  $\angle DOA = 180^\circ - \beta - \alpha$

$\Rightarrow |CD + EF| = \frac{2\sqrt{2}R}{2} = \sqrt{2}R$ . Тогда сумма дуг  $DE + EF$  тоже  $\sqrt{2}R$ .

Получим, что длина дуг  $\text{const}$ , независимо от  $\sin\alpha$  и  $\cos\alpha$ , а так же и знаков. Вспомогательная. Осталось еще посчитать

2 отрезка  $CE$  и  $DF$ . их длина не зависит от знака  $\sin\alpha$  и  $\cos\alpha$



7

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D(3\sqrt{2}\sin a; \sqrt{25-(3\sqrt{2}\sin a)^2}) \Rightarrow D(3\sqrt{2}\sin a; \sqrt{25-18\sin^2 a})$$

$$F(3\sqrt{2}\sin a; -\sqrt{25-(3\sqrt{2}\sin a)^2}) \Rightarrow F(3\sqrt{2}\sin a; -\sqrt{25-18\sin^2 a})$$
$$DFt(E) \rightarrow \max 2 \left( \sqrt{\frac{25-18\cos^2\alpha}{8\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{7+18\cos^2\alpha}{8\cos\alpha}} \right) \rightarrow \max$$

$$\bullet 4(32 + 2\sqrt{(25-18\cos^2 a)(7+18\cos^2 a)}) \rightarrow \max \rightarrow$$

$$\sqrt{(25-18\cos^2\alpha)(7618\cos^2\alpha)} \rightarrow \max \quad t = \cos^2\alpha \geq t \geq 0$$

$$(25 - 18 \cos^2 \alpha)(7 + 18 \cos^2 \alpha) = (25 - 18t)(7 + 18t) = 175 + 18^2 t - 18t^2$$

$$X_B = \frac{18^2}{2 \cdot 18^2} = \frac{1}{2} \quad Y_B = 175 + \frac{324}{2} - \frac{324}{4} = 175 + 162 - 81 = 175 + 81 =$$

$= 256_v$  т.к. старший коэф.  $\leq 0$ ,  $x_B$  лежит на отрезке

$$[0; 1] \Rightarrow \max(175 + 18^2 t - 18^2 t^2) \text{ na } [0; 1] = y_6 = 256 \Rightarrow t = \frac{1}{2} = \cos^2 \alpha$$

Joga  $DF + EF = 2(\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{7+18\cos^2\alpha}) = \max$ , jika  $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow DFIEF = 2(\sqrt{16} + \sqrt{16}) = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow \max M =$$

$$= \max(DF+EF) + CD+EF = 16 + 5 = 21$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

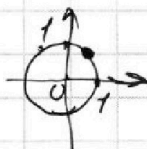
7  
☐

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Максимум достигается при  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



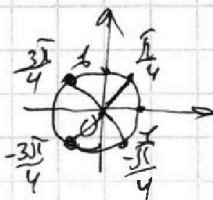
Как уже сказано ранее

если подходит  $\cos \alpha$ , то подойдет  $-\cos \alpha$ , если

$\sin \alpha$  подходит, то и  $\sin \alpha$  подходит  $\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



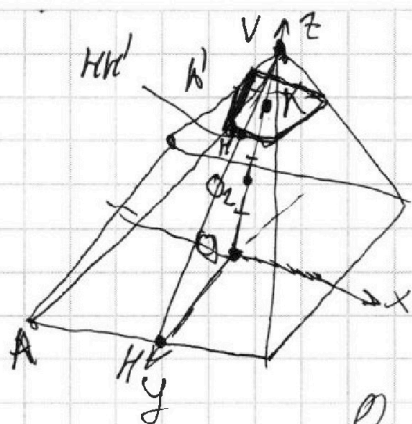


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$O_1$  - центр  $\Sigma$

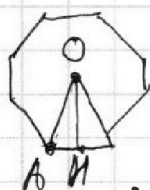
$O_2$  - центр  $W$ .

Введем оси  $Ox, Oy, Oz$ . В  
плоскости симметрии пирамиды

$O_1$  и  $O_2$  лежат на  $Oz$ , причем

т.к.  $\perp$  из  $O_2$  на основание лежит на  $Oz$ , то  
пусть. т.о.  $(0; 0; 0)$ , т.к.  $(0; 0; 2R)$ , где  $R$  - радиусу  $W$ .

Пусть в основании лежит  $n$ -угольная правильная  
длина.  $\Rightarrow$



Пусть длина стороны основания  
 $= 1 \Rightarrow A_x = -\frac{1}{2}, A_z = 0$

т.к.  $n$  граней  $\Rightarrow \angle AON = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow A_y = \frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{n})} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{n})}; 0)$

Найдем  $A'$ .  $V$  - вершина пирамиды  $V(0; 0; h) \Rightarrow$

направляющий вектор прямой  $AA' = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{n})}; h)$ .

$A'z = 2R$ .  $\Rightarrow \frac{A'_x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{A'_y - \frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{n})}}{-\frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{n})}} = \frac{2R - h}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'_x = \frac{4R - 2.5}{h}$

$A'_y = -\frac{R}{h \tan(\frac{\pi}{n})} + \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})}$

$\Rightarrow A'(\frac{4R - 2.5}{h}; -\frac{R}{h \tan(\frac{\pi}{n})} + \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})})$

Тогда длина стороны верхнего основания

$\Rightarrow |\frac{4R - 2.5}{h} - (2.5 - \frac{4R}{h})| = |\frac{8R}{h} - 5|$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассчитаем площадь нижнего основания:

$$\frac{1}{2} \cdot 2AH \cdot OH \cdot n = AH \cdot OH \cdot n = \frac{OH \cdot n}{2} \Rightarrow OH = \frac{1}{2bg(\frac{\pi}{n})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{осн}} = \frac{n}{4tg(\frac{\pi}{n})}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1 + |\frac{8h}{n} - 8|}{2} \cdot HH = \frac{1 + |\frac{8h}{n} - 8|}{2} \cdot HH$$

$$tg \angle ZHO = \frac{h}{2bg(\frac{\pi}{n})} \Rightarrow$$

$$HZ^2 = \frac{1}{4bg^2(\frac{\pi}{n})} + h^2 = \frac{1}{4(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - 1)} \neq h^2 = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{4(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n})} + h^2 =$$

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4h^2(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n})}{4 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{n}}$$

$$\sin \angle ZHO = \frac{ZO}{HZ} = \frac{h \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4h^2(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n})}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HH' = \frac{2r}{\sin \angle ZHO} = \frac{r \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4h^2(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n})}}{h \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{бок}} = \frac{1 + |\frac{8h}{n} - 8|}{2} \cdot \frac{r \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + 4h^2(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n})}}{h \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

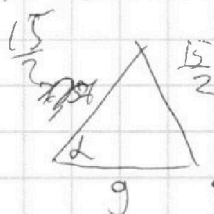
$$(7+18t)(25-18t) = 324$$

$$= 175 + 18t^2 - 18t^2$$

$$\begin{aligned} 18 \cdot 15 \\ - 81 + 162 + 175 \\ 81 + 175 = 256 \end{aligned}$$

$$-18t^2 + 18t^2 + 175$$

$$-18 \cdot \frac{1}{4} + 18 \cdot \frac{1}{2} + 175$$



$$\sqrt{7+18\sin^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha}$$

$$32 + 2\sqrt{(7+18\sin^2\alpha)(25-18\sin^2\alpha)}$$

$$\frac{225}{4} = \frac{225}{4} + 81 - \frac{238}{15} \cdot 15 \cdot 9 \cdot \cos\alpha$$

$$15\cos\alpha = 9$$

$$\cos\alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{25-81}}{15} = \frac{\sqrt{44}}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) = \sqrt{25-18\cos^2\alpha}$$

$$25 - 18\cos^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin\alpha$$

$$\sqrt{25-18\cos^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha} = \sqrt{7+18\sin^2\alpha} + \sqrt{25-18\sin^2\alpha}$$

$S_{ABC}$

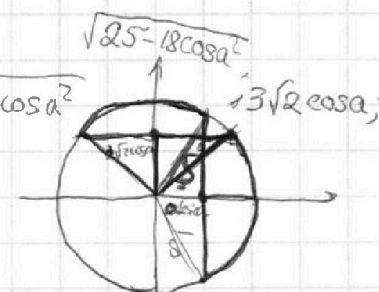
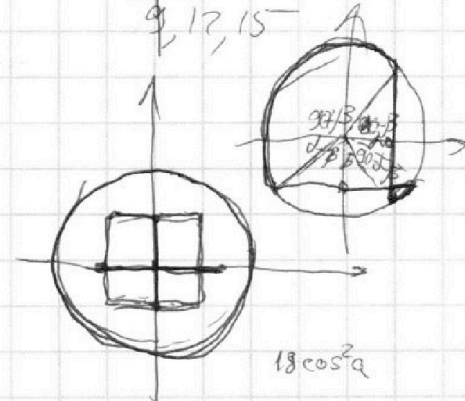
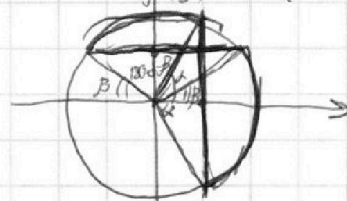
$$PC = 7,5$$

$$3 > 2$$

$$-5 - 4$$

$$\frac{18^2}{18^2 \cdot 2}$$

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ \begin{cases} x > 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y < 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y > 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \end{cases}$$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A - 4 \text{ эк. } 1111 \cdot 10^3$$

$$B - 3$$

$$C - 2$$

$$A \cdot B \cdot C = K^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot K \cdot B \cdot C = K^2$$

$$B = 101 \cdot C = 202$$

$$11 \cdot 101 \cdot K \cdot 2 \cdot 101 \cdot C = K^2$$

$$101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot K \cdot C = K^2$$

$$101^2 \cdot 22 \cdot K \cdot C$$

$$101^2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot K \cdot 3 \cdot 11$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{2+x+y}{xy} = \frac{2+x+y}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = xy + x - y - 1 \Rightarrow 0 = x - y - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy &= (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = \\ &= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1 = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \quad \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) \quad \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \sin A + \sin B \quad 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} =$$

$$A = 1111 \cdot K = 11 \cdot 101 \cdot K$$

$$6666 \cdot 202 \cdot 33 =$$

$$= 6 \cdot 1111 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 =$$

$$= 6 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 32 \cdot 101 \cdot 11 =$$

$$= 6^2 \cdot 101^2 \cdot 11^2$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy - ?$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y + \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y + \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos(\pi(x+y))$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi(x+y))$$

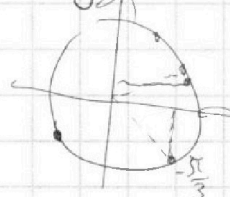
$\cos$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi(x+y) + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi(x+y) + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x+y+2k \\ 2x = -x-y+2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 2k \\ 3k = -y + 2k \end{cases}$$

$$x = y + 2k$$

$$x - 2k = y$$



$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{5}$$

$$-5, -4, -3,$$

$$-2, -1, 0, 1$$

$$0, \pi$$

$$\frac{x-2k}{4}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

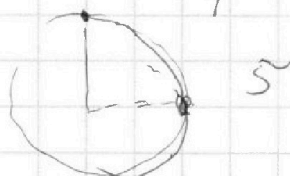
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x-2k}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arcsin$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x-2k}{4} < \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x}{5} + \pi$$

$$\arccos \frac{x-2k}{4} < \arccos \frac{x}{5} + \pi$$

$$\frac{x-2k}{4} =$$





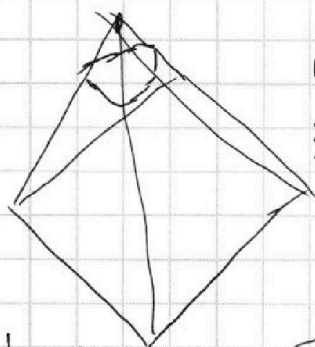


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

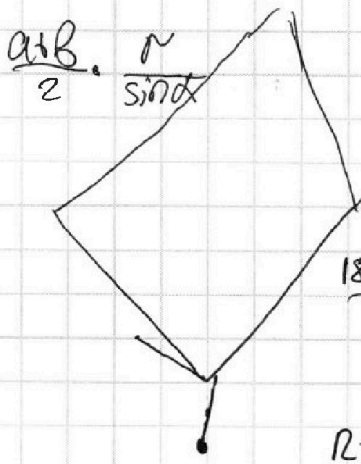
|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

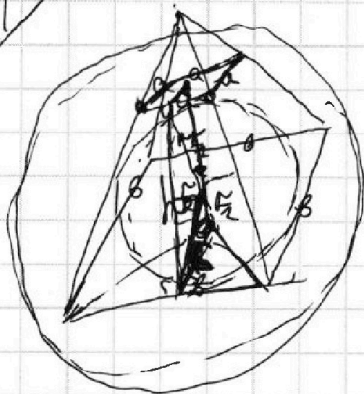
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



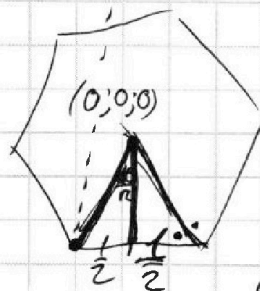
$$\frac{h}{\sin \alpha} \geq h$$



$$\frac{180(n-2)}{2R}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



$n$ -угольник

$$\frac{2 \tan \left( \frac{90(n-2)}{n} \right)}{n}$$

$$C_2 = \frac{ac}{b}$$

$$C_2 = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$A(0;0;0)$

$$B(0;0;\frac{h}{2})$$

$$C(0;0;H)$$

A

$$\left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \tan \frac{180}{n}}; h \right)$$

$$\left( 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \tan \frac{180}{n}}; 0 \right)$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$n \cdot b \cdot c$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{b^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d_1}{d_2}$$

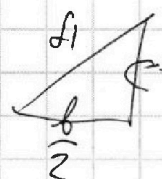
$$H^2 + d_2^2 = H^2 - 2Hh + h^2 + d_1^2$$

$$d_2^2 = h^2 - 2Hh$$

$$d_2^2 - d_1^2 = h^2 - 2Hh$$

$$H^2 - \frac{b^2}{4} + H^2 = \frac{ac^2}{b^2} + \frac{a^2}{4} + (h-H)^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} C^2 + \frac{h^2}{4} &= r^2 \\ C^2 + \frac{b^2}{4} + H^2 &= \frac{ac^2}{b^2} + \frac{a^2}{4} + (h-H)^2 \end{aligned} \right.$$



$$\frac{a+b}{2} h \tan \left( \frac{90(n-2)}{n} \right)$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено болес одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

