



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} - \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~1

П.к. число A - четырехзначное из одинаковых цифр, то $A = x \cdot 1111$ (x - цифра от 1 до 9)

$$\Rightarrow A \cdot B = x \cdot 11 \cdot 101$$

101 - простое

C - двузначное

$A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow B : 101 \\ B - \text{трехзначное} \\ \text{в } B \text{ есть цифра } 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 101$$

$$\left. \begin{array}{l} x : 11 \\ x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C - \text{полный квадрат} \end{array} \right\} \Rightarrow C : 11$$

C - двузначное
в C есть цифра 5

$$\Rightarrow C = 55$$

$$\text{Тогда } x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 55 - \text{полный квадрат} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Получим, что $A = 5555$

$$B = 101$$

$$C = 55$$

- эти тройка
подходят

$$5555 \cdot 101 \cdot 55 = 5^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 - \text{полный квадрат.}$$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad | : (x+y+1), \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \Rightarrow x+y+1 > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$3x - 3y = 9$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3(3xy) =$$
$$= 3(x^2 + xy + y^2 - 3xy) = 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27.$$

$$\Rightarrow M = 27$$

(например, при $x = 4$ и $y = 1$)

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1}$$

$$M = 64 - 1 - 9 \cdot 4 = 63 - 36 = 27. \quad)^a$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3(a)

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x \right] (1)$$

$$(1) \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} - \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) \right)$$

$$0 = 2 \cos \frac{\pi(x-y) + 2\pi x}{2}$$

$$\cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0$$

$$\left[\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \right.$$

$$\left. \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0 \right]$$

$$\left[\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \right]$$

$$\left[x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. 3x-y = 1+2k \right]$$

$$\left[y = -x + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. y = 3x - 1 - 2k \right]$$

Полученные решения являются любыми парами

$$(n; -n+1+2k) \text{ или } (n; 3n-1-2k)$$

для любого действительного n и целого k .

Ответ: $(n; -n+1+2k) \quad n \in \mathbb{R}$
 $(n; 3n-1-2k) \quad k \in \mathbb{Z}.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 3(6)$

$\arccos(a)$ — принимает значения от 0 до π

$\Rightarrow$ нам не подойдут только

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} = 2\pi$$

при этом $\begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$

все остальные пары чисел будут подходить под это неравенство.

$$(n; -n+1+2k)$$

$$(n; 3n-1-2k)$$

если $n \in \mathbb{Z}$, то и второе число пары тоже целое.

Поставим все целые n , и посчитаем подходящие пары:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

$x = -4 \Rightarrow \begin{cases} y = -n+1+2k \\ y = n-1+2n+2k \end{cases}$ — любое нечетное, кроме -9 .

итого: 5 чисел

$x = -3 \Rightarrow y$ — любое четное = 9 вариантов

$x = -2$ — 10 вариантов пар

$x = -1$ — 9 пар

$x = 0$ — 10 пар

$x = 1$ — 9 пар

$x = 2$ — 10 пар

$x = 3$ — 9 пар

$x = 4$ — 10 пар

Итого $9 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 95$ пар подходящих пар.

Ответ: 95.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4

Пусть всего a одинадцатиклассников и b билетов на концерт выделены в конце месяца.

Посчитаем вероятность того, что Вась и Нете вместе поедут на концерт, если всего 4 билета: количество способов добраться к ним двоим 2 одинадцатиклассников и $(a-2)$ делить на все варианты выбрать 4 из a .

Получаем:

$$\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} = \frac{\frac{(a-2)!}{2 \cdot (a-4)!}}{\frac{a!}{24 \cdot (a-4)!}} = \frac{12}{a(a-1)}$$

Аналогично посчитаем для b билетов ($b > 4$):

$$\frac{C_{a-2}^{b-2}}{C_a^b} = \frac{\frac{(a-2)!}{(b-2)! \cdot (a-b)!}}{\frac{a!}{b! \cdot (a-b)!}} = \frac{b(b-1)}{a(a-1)}$$

По условию, вероятность воураша в 3,5 раза

$$\Rightarrow \frac{b(b-1)}{a(a-1)} = 3,5 \cdot \frac{12}{a(a-1)}$$

$$b^2 - b = 42$$

$$b^2 - b - 42 = 0$$

$$(b-7)(b+6) = 0$$

$$\begin{cases} b = 7 \\ b = -6 \end{cases}$$

П.к. $b > 4$, то $b = 7$.

Ответ: 7.



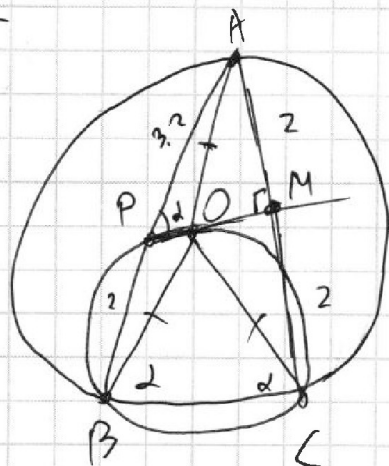
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н 5



$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$\Rightarrow$ нужно найти $\frac{BC}{R} = ?$

α O - центр ~~впис.~~ ^{опис.} ~~окр.~~ ^{окр.} $\triangle ABC$

$$\Rightarrow BO = OC \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB = \alpha$$

$$PO \perp BC - \text{вписанный в } \omega_2 \Rightarrow \angle APO = \angle OCB = \alpha$$

$$\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \alpha$$

как $\angle$ вписанный в ω_1

$\Rightarrow$ $PO \perp AC = M$

$$\Rightarrow \angle PMA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$$

OAC - равнобедренный $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M - \text{середина } AC \Rightarrow AM = MC = 2$$

$$PM = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{256 - 100}{25}} = \frac{\sqrt{156}}{5}$$

$\cos \alpha = \frac{PM}{AB}$

$$\sin \alpha = \frac{2}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\text{то м. синусов } \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{R} = 2 \cos \alpha = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{16 \cdot \sqrt{39}}{4 \cdot 8} = \frac{5,2 \cdot \sqrt{39}}{4}$$

Ответ:

$$\frac{5,2 \cdot \sqrt{39}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

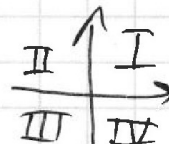
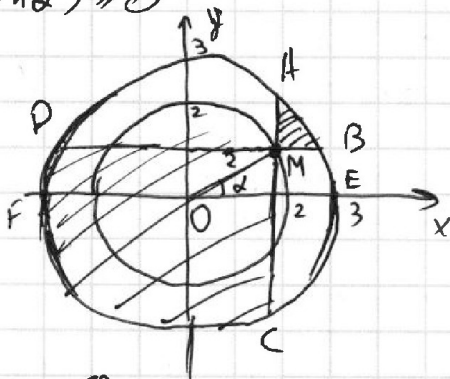
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6

$x^2 + y^2 \leq 9$ - круг, с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3.

$$(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \\ x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$$



Построим кривую $P(\alpha)$.

Не утратив общности $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$

т.к. при $45^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ $P(\alpha)$ симметрична $P(45^\circ - \alpha)$ относительно прямой $y = x$

при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $P(\alpha)$ симметрична $P(180^\circ - \alpha)$

$P(\beta)$ $45^\circ < \beta \leq 90^\circ$ симметрична $P(\alpha)$ относительно $y = x$

$P(\gamma)$ $90^\circ < \gamma \leq 180^\circ$ симметрична $P(\alpha)$ или $P(\beta)$ относительно Oy

$P(\rho)$ $180^\circ < \rho < 360^\circ$ симметрична $P(\alpha)$, или $P(\beta)$, или $P(\gamma)$

относительно Ox $\Rightarrow$ ~~прямая~~ периметр будет такой же)

Периметр состоит из нескольких отрезков и двух дуг. Расположим сумму двух дуг.

Пусть $\cup AB$ - в I четверти, $\cup CD$ во всех остальных

$$\cup CD \cap Ox = F.$$

Пусть E - симметрична F относительно Oy .

т.к. $\cup AB$ исходный круг симметричен относительно Oy , то $\cup DF$ симметричен $\cup BE$.

$$\Rightarrow \cup DF = \cup BE.$$

A и C - симметричны относительно Ox $\Rightarrow E \in Ox$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (продолжение 1)

$\Rightarrow \sqrt{AE}$ симметрична $\sqrt{EC} \Rightarrow \sqrt{AE} = \sqrt{EC}$

Тогда $\sqrt{AB} + \sqrt{CD} = \sqrt{AE} + \sqrt{CF} = \sqrt{ECF}$ -
- половина окружности радиуса $\frac{3}{2} \Rightarrow$
сумма длин наименьших дуг равна $\frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{2} = 3\pi$.

$$AC \cap BD = M.$$

Получа оставшиеся части периметра равна
 $AM + MD + BM + MC = AC + BD$.

$$2 \cos \alpha = k \quad \text{Тогда} \quad AC = 2 \cdot A_y$$

A_y - ~~абсцисса~~ ордината т. А.

$$A_y = \sqrt{9 - k^2}$$

$$AC = 2\sqrt{9 - k^2}$$

$$BD = 2 \cdot B_x \quad (B_x - \text{абсцисса т. B})$$

$$2 \sin \alpha = \sqrt{4 - k^2}$$

$$B_x = \sqrt{9 - (2 \sin \alpha)^2} = \sqrt{5 + k^2} \Rightarrow BD = 2\sqrt{5 + k^2}$$

$$BD + AC = 2\sqrt{9 - k^2} + 2\sqrt{5 + k^2} \quad - \text{найдём максимум}$$

$$(2\sqrt{9 - k^2} + 2\sqrt{5 + k^2})' = \frac{-2k}{\sqrt{9 - k^2}} + \frac{2k}{\sqrt{5 + k^2}}$$

$$\text{Экстремумы:} \quad k = 0 \quad \text{или} \quad \frac{-1}{\sqrt{9 - k^2}} + \frac{1}{\sqrt{5 + k^2}} = 0$$

$$\sqrt{5 + k^2} = \sqrt{9 - k^2}$$

$$2k^2 = 4$$

$$k = \sqrt{2}$$

$k = -\sqrt{2}$ - не подходит, т.к. при $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$
 $k = 2 \cos \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \approx & 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} \quad \sqrt{6} + 2\sqrt{5} \\ & 2\sqrt{7} \quad \sqrt{3} + \sqrt{5} \\ & 28 \quad \sqrt{14} + 6\sqrt{5} \\ & \text{или } 7 \quad \sqrt{3} \sqrt{5} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 6 (продолжение 2)

$49 > 45 \Rightarrow$ при $\alpha = 52$ периметр максимален,
 то есть при $\alpha = 45^\circ$ | при $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$

Тогда периметр равен:

$$3\pi + BD + AC = 3\pi + 4\sqrt{7}.$$

Также значения будем при $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

, $k \in \mathbb{Z}$ (пока в силу симметрии)

или же $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{7}$

достигается при

~~также~~ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$
 $k \in \mathbb{Z}$



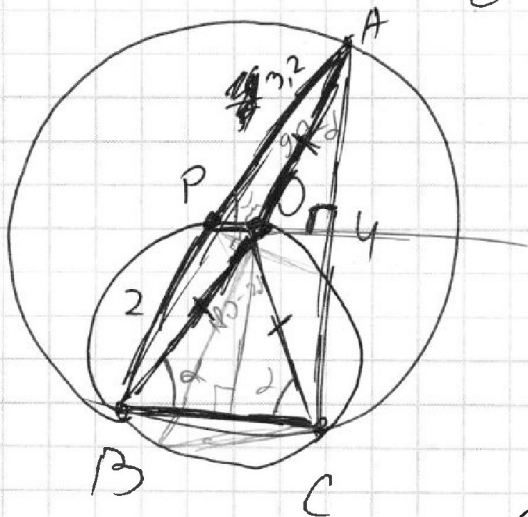
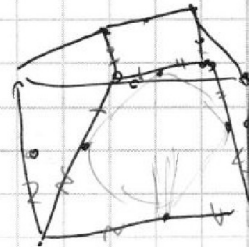
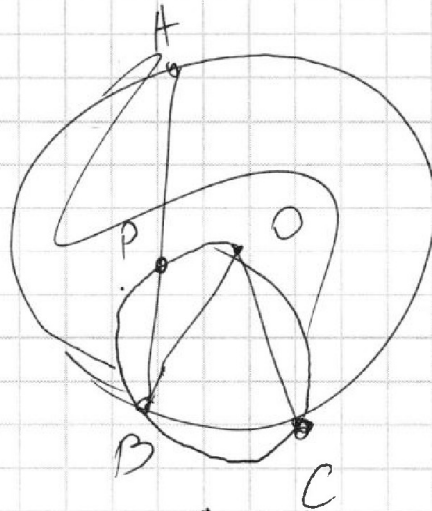
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



3,2

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = S$$

$$a \cdot b \cdot c = 4RS$$

$$a \cdot b \cdot c = 4RS$$

$$\frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{c}{R}$$

$$c = 2R \cos \alpha$$

$$2R = \frac{c}{\cos \alpha}$$

$$\frac{c}{\cos \alpha} = 2R$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$R^2 \cdot \sin^2 \alpha + R^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+3}{4} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x &= \\ = 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} = \pi x \quad \text{или} \quad \frac{\pi(x-y)}{2} = \pi x + \pi$$

$$\cos \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) - \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} - \pi x \right) + \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) \right)$$

$$\tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = 0$$

$$\begin{aligned} x+y &= 1 + 4n \\ y &= -x + 1 + 4n \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\pi x - \pi y}{2} + \pi x \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\pi \left(\frac{x-y}{2} + x \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{3x-y}{2} = \frac{1}{2} + 2k$$

$$3x - y = 1 + 4k$$

$$y = 3x - 1 - 4k$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{5} \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{4} = -1$$

$$x = -4$$

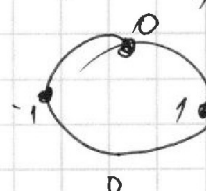
$$x = -4 \Rightarrow y = 9; 5; 1; -3; -7$$

$$-3 \Rightarrow$$

$$x = -4$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\arccos(-1) = \pi$$



$$\begin{aligned} (x; -x+1+4k) \\ (x; 3x-1+4k) \\ -4; -13; -9; \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие

$2\cos\delta = K$
 $4\cos^2\delta + 4\sin^2\delta = 4$
 $4\sin^2\delta = 4 - K^2$

$12 \cdot 12 \cdot 5 =$
 $= 12 \cdot 60 =$
 $= 720$

$\frac{83}{83} \cdot \frac{26}{26} = \frac{6100}{416}$

$AF \cdot AC = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$
 $x(4-x) = \frac{16 \cdot 26}{25}$
 $4x - x^2 = \frac{16 \cdot 26}{25}$
 $x^2 - 4x + 4 + \frac{16 \cdot 26}{25} - 4 = 0$
 $(x-2)^2 + \frac{316}{25} = 0$

$a \cdot b \cdot c = 483$
 $4\sqrt{7} \vee 3 + 2\sqrt{5}$
 $16 \cdot 7 \vee 9 + 20 + 12\sqrt{5}$
 $83 \vee 12\sqrt{5}$

$\varphi(t)$
 $x^2 + y^2 \leq 9$
 $x = 0$

$y^2 \leq 7$
 $-9 \leq y \leq 17$
 $10 - 2 = \sqrt{7}$
 $2\sqrt{7} + 2\sqrt{9} = 4\sqrt{7}$

$x = \sqrt{2} = y$
 $-\sqrt{7} \leq y \leq 17$
 $4\sqrt{7}$
 $3 + 2\sqrt{5}$
 $y^2 \leq 5$
 2

$(x^2 + y^2)' = 2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 0$
 $(x^2 + y^2)' = 0,5 \cdot 3^{0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $(2\cos\delta - x, 2\sin\delta - y)$
 $(x - 2\cos\delta)(y - 2\sin\delta) \geq 0$
 $x > 2\cos\delta$
 $y > 2\sin\delta$
 $x \leq 2\cos\delta$
 $y \leq 2\sin\delta$
 $x = 2\cos\delta$
 $y = 2\sin\delta$
 $x^2 + y^2 = 2^2$
 $y^2 = \sqrt{9 - x^2}$
 $2\sqrt{9 - x^2} + 2\sqrt{9 - y^2}$
 $2\sqrt{9 - x^2} + 2\sqrt{9 - y^2}$
 $= \frac{2\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

~4

$\pi; \beta$

a - отрицат.

$$C_a^{24} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24}$$

$$C_{a-2}^2 = \frac{(a-2)(a-3)}{2} - \text{вычитаем}$$

$$\frac{(a-2)(a-3)}{2} = \frac{12}{a(a-1)} - \text{вычитаем.}$$

$$C_a^b = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-b+1)}{b!}$$

$$C_{a-2}^{b-2} = \frac{(a-2)(a-3) \cdot \dots \cdot (a-b+1)}{(b-2)!}$$

$$\frac{C_{a-2}^{b-2}}{C_a^b} = \frac{\frac{1}{(b-2)!}}{\frac{a(a-1)}{b!}} = \frac{b \cdot (b-1)}{a(a-1)} = 3,5 \cdot \frac{12}{a \cdot (a-1)}$$

$$3,5 \cdot \frac{12}{a \cdot (a-1)}$$

$$b(b-1) = 42$$

$$b^2 - b - 42 = 0$$

$$(b-7)(b+6) = 0$$

$$b = 7, \text{ т.к. } b > 0$$

-3

$$-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9$$

$$-8; -6; -4; -2$$

$$5 \cdot 9 + 10 \cdot 4 = 45 + 40 = 95$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{7-x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{7-x^2} = \sqrt{9-x^2}$$

$$7-x^2 = 9-x^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~¹
 $A = \frac{11 \cdot 101 \cdot X}{101} = 11 \cdot 101 \cdot X$ *целая дробь*
 $B_A : 101$
 $C : 11$

N2
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$ $\left| \cdot xy(x-3)(y+3) \right.$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$xy^2 + 3xy - 3y^2 - 3y + x^2y + 3x^2 - 3xy - 9x + xy + 3x - 3y - 9 =$$

$$= xy^2 + 3xy - 3y^2 - 3y + x^2y + 3x^2 - 3xy - 9x + xy + 3x - 3y - 9 =$$

$$3x^2 - 3y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

4; 1.

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$0 = x - y - 3$$

$$x - y = 3$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$$

$$= 3(x^2 + xy + y^2) - 9xy = 3(x^2 - 2xy + y^2) =$$

$$= 3(x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27.$$