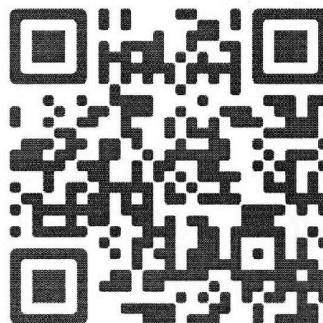


МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Пусть  $A = \overline{aaaa}$ , тогда  $A = a \cdot 11 \cdot 101$ . т.к. число  $ABC$ -квадрат, то все простые множители встречаются в нём в чётной степени.  $a$ -цифра. Тогда  $11$  и  $101$  встречаются в  $A$  в первой степени, а значит  $B : 11$  и  $C : 101$ . т.к.  $C$ -двузначное число, то  $C$  не может делиться на  $101$ , а си-но  $C$  и  $101$  взаимопросты (т.к.  $101$ -простое). Тогда  $B : 101$ .

$B = 101 \cdot x$ , где  $x \leq 9$  (т.к.  $B$ -однозначное). В числе  $B$  есть цифра  $7$ , тогда подходит только  $x = 7$ , т.е.

$B = 707$ . Заметим, что  $707$  и  $11$  взаимопросты, тогда  $C : 11$ , т.е.  $C = 11 \cdot y$ , где  $y \leq 9$  (т.к.  $C$ -двузначное). Одна из цифр  $C$ -это  $1$ , тогда подходит только  $y = 1$ , т.е.  $C = 11$ . Мы знаем, что  $ABC$ -квадрат.  $ABC = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 707 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot (a \cdot 7)$ .

Тогда  $a \cdot 7$  тоже квадрат, но  $a$ -цифра ( $a \neq 0$ ), тогда подходит только  $a = 7$ . Получили единственную подходящую тройку:  $7777, 707, 11$ . Ответ:  $(7777, 707, 11)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

$$k = \frac{1(y+4)}{x-4} + \frac{1(x-4)}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

Получа  $\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$ . Заметим, что  $xy \neq 0$  и  $(x-4)(y+4) \neq 0$ . Три данных ограничения получаем, что должно выполняться  $xy = (x-4)(y+4)$ .

$$xy = xy + 4x - 4y - 16, \text{ т. е. } x - y = 4.$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 =$$

$$= 4^2 = 64.$$

Ответ:  $M = 64$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi x - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\pi x - \pi y = \pi - 2\pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \pi x - \pi y = 2\pi y - \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 1 - 2y + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - y = 2y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 - y + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: при любых  $y \in \mathbb{R}$  подходит

$$x = 1 - y + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = 3y - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

~~Можно ли записать ответ проще:~~

~~Ответ: при любых  $y \in \mathbb{R}$  подходит~~

$$x = -y + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = 3y + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \quad |3.$$

$$\arccos \frac{x}{y} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos \frac{x}{y} \leq \pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} \leq 0$$

т.е. левая часть всегда больше правой за исключением случаев, когда обе части равны 0.

Рассмотрим этот случай.  $\arccos \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = y ; \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$ . т.е.

нам подходит все пары  $x, y$  (где  $-2 \leq x \leq 2, -4 \leq y \leq 4$ ),

кроме  $x = 2, y = 4$ . Заметим, что при

~~$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$~~  подходит  $x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ ,  
 ~~$y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$~~  подходит  $x \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ , причём эти пары удовлетворят

исходному ур-ию. Тогда пары чисел  $(x, y)$ , которые нам подходят, будут  ~~$5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = -35 + 32 = 67$~~ .

$$4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 28 + 40 = 68$$

Ответ: ~~67~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3.

Заметим, что для  $y \in \{-3, -1, 1, 3\}$  подходят

$x \in \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$  и только такие  $x$  удовлетворяют

первому ур-ию. А для  $y \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

подходят  $x \in \{-3, -5, -3, -1, 1, 3, 5\}$  и для

$y \in \{-4, -2, 0, 2\}$  подходит  $x = 3$  и только

такие  $x$  удовлетворяют первому ур-ию. Тогда

всего подходящих пар  $(x, y)$  будет

$$4 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 28 + 35 + 4 = 67$$

Ответ: 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Пусть  $x$  - кол-во однаждатчих билетов,  $y$  - кол-во билетов на концерт, выделенных в конце месяца.

Всего вариантов дать 4 билета  $x$  людям -  $C_x^4$ . вариантов, в которых можно получить билеты и

Бася -  $C_{x-2}^2$ , тогда вероятность того, что Тиме и Бася получат билеты  $P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \cdot \frac{x!}{4!(x-4)!} =$

$$= \frac{4!(x-2)!(x-4)!}{2!x!(x-4)!} = \frac{12}{x(x-1)}.$$

Аналогично  $P_2 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)!}{(y-2)!(x-y)!} \cdot \frac{x!}{y!(x-y)!} =$

$$= \frac{y!(x-2)!(x-y)!}{x!(y-2)!(x-y)!} = \frac{y!(x-2)!}{x!(y-2)!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} - \text{вероятно-$$

стъ того, что Тиме и Бася оба получат билеты в конце месяца. То условие  $P_2 = 11P_1$ .

$$\frac{y(y-1)}{x(x-1)} = \frac{12 \cdot 11}{x(x-1)}, \text{ т.е. } y(y-1) = 12 \cdot 11, \text{ т.к. } y \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$$y = 12.$$

Ответ: 12 билетов.



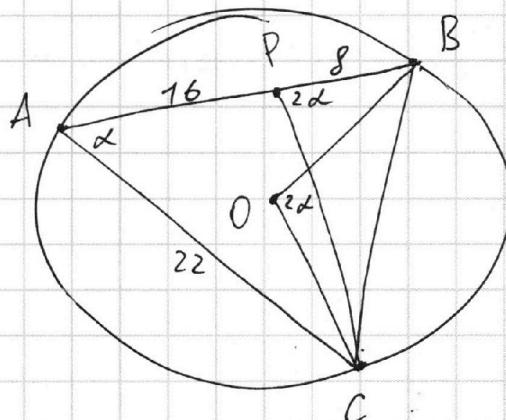
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N5



Дн. в.  $\triangle ABC$  - остроугольный, т. о  $\angle BAC = \alpha$ , тогда градусная мера дуги  $BC = 2\alpha$ .

Тогда  $\angle BOC = 2\alpha$ . Точки  $B, C, O, P$  лежат на окр-тии  $\omega_2$ , значит четырехугольник  $BCOP$  - вписанный.

Тогда  $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ , но  $\angle BPC = \angle BAC + \angle PCA$ , м.в.  $2\alpha = \alpha + \angle PCA$ , тогда  $\angle PCA = \alpha$ .

Тогда  $\triangle APC$  - равноб. с осн.  $AC$ , значит  $PC = AP = 16$ .

По теор. косинусов:  $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2 \cdot AP \cdot AC} ; \cos \alpha = \frac{16^2 + 22^2 - 16^2}{2 \cdot 16 \cdot 22} = \frac{22^2}{2 \cdot 16 \cdot 22} =$$

$$= \frac{11}{16}. Тогда \cos \alpha \text{ найдем } \sin \alpha. \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{121}{256} = \frac{135}{256}$ , м.к.  $\alpha$  - острый угол, то

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{\sqrt{9 \cdot 15}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{24 \cdot 3 \cdot 22 \cdot \sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

Ответ:  $S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x-y=2 \Rightarrow 11 \cdot 12 (z^2 + 3z + 2) = (y^2 - y)(x^2 - 5x + 6)$$

$$y=x-2 \quad 11 \cdot 12 (z^2 + 3z + 2) = (x^2 + z^2 - 2xz - x + z)(x^2 - 5x + 6)$$

$$11 \cdot 12 \cdot 2 - x^2(x^2 - 5x + 6) + x(x^2 - 5x + 6) = z_1 \cdot z_2$$

$$11 \cdot 12 \cdot 2 - x(x^2 - 5x + 6)(x-1) \quad -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$$

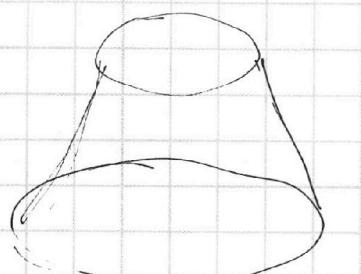
$$11 \cdot 12 \cdot 2 - x(x-2)(x-3)(x-1) \geq 0 \quad -4 \leq y \leq 4$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3) \leq 2 \cdot 11 \cdot 12$$

$$x=5 \quad 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \leq 2 \cdot 11 \cdot 12$$

$$x=6 \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 > 2 \cdot 11 \cdot 12$$

$x=5$ , но  $y=5$  - неверно



$$\arccos \frac{x}{y} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi n + \frac{x}{y} > \cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4})$$

~~$$\frac{x}{y} > \sin(\arcsin \frac{y}{4})$$~~

~~$$\frac{x}{y} > \frac{y}{4}$$~~

~~$$x > \frac{y}{4} y \text{ т.к.}$$~~

$$x > \frac{y}{4} y - 2\pi m$$

$$x < 2\pi m - \frac{y}{4} y$$

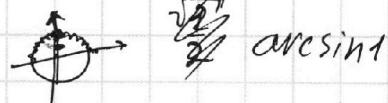
$$-y + 2n > \frac{y}{4} y$$

$$\arccos 0 - \pi$$

$$\arcsin -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$11y < 8h < 28 + 4y$$

$$\arcsin -\frac{\pi}{2} - \pi; 0$$



$$-7 \leq -y + 2n \leq 7$$

~~$$\frac{y}{4} y$$~~

$$\arccos 0 = 0$$

$$-7 + y \leq 2n \leq 7 + y$$

$$y = -4 \quad x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$-\frac{7+y}{2} \leq n \leq \frac{7+y}{2}$$

$$y = -3 \quad x = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$$

$$7y \leq 28$$

$$y = -2 \quad x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$$

$$y \leq 4$$

$$y = -1 \quad x = -7, \dots, 7$$

$y:$

$$\cos \varphi = \cos(2\pi - \varphi)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\pi y) - \sin(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$$

$$\cos(-2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$-2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi n$$

$$2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi n$$

$$-2y = x - y + 2n$$

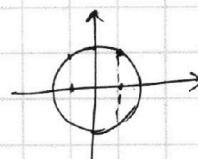
$$2y = x - y + 2n$$

$$-y = x + 2n$$

$$3y = x + 2n$$

$$y = -x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{x + 2n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$



$$\arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{x} = \arccos \frac{x}{y} - \arcsin \left( \frac{-x-2n}{y} \right)$$

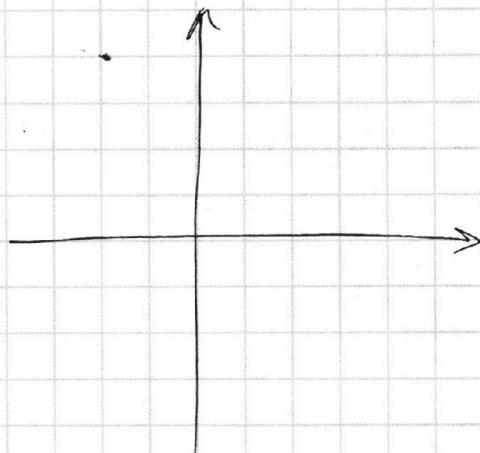
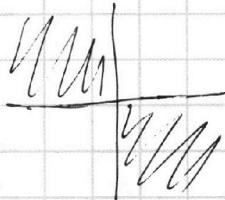
$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x + 4 \sin \alpha \leq 0 \\ y - 4 \cos \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$x \leq -4 \sin \alpha \quad \text{или} \quad x > -4 \sin \alpha$$

$$y \geq 4 \cos \alpha$$

$$y \leq 4 \cos \alpha$$



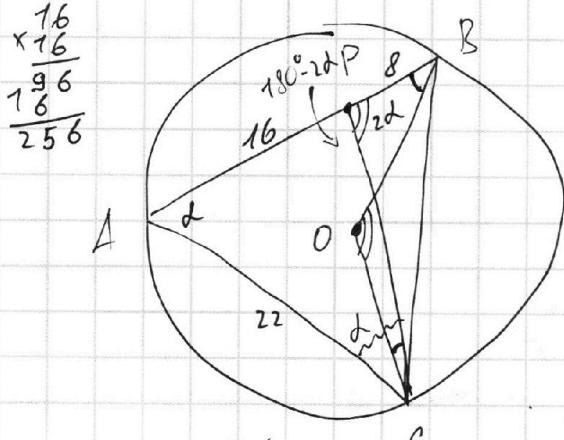


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{121}{256} = \\ &= \frac{135}{256} \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{135}}{16} \end{aligned}$$

$$135 = 5 \cdot 27 = 9 \cdot 15$$

х учеников

$$\frac{C_x^2}{C_x^4} = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} : \frac{x!}{(x-4)! \cdot 4!} = \frac{(x-4)! \cdot 4!}{(x-2)! \cdot 2!} = \frac{12}{(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{C_x^{y-2}}{C_x^y} = \frac{x!}{(x-y+2)! \cdot (y-2)!} : \frac{x!}{y! (x-y)!} = \frac{y! (x-y)!}{(y-2)! (x-y+2)!} = \frac{y(y-1)}{(x-y+1)(x-y+2)}$$

$$\frac{11 \cdot 12}{(x-3)(x-2)} = \frac{y(y-1)}{(x-y+1)(x-y+2)}$$

$$\begin{aligned} x-3 &= 11 \Rightarrow x = 14 \\ x-y+2 &= y \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \end{aligned}$$

$$11 \cdot 12 \cdot (x-y+1)(x-y+2) = y(y-1)(x-3)(x-2)$$

$$11 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 8 = 8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 \quad \text{если } x < 14 \quad (\cancel{11 \cdot 12})$$

~~$$\frac{11 \cdot 12}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x-y+1)(x-y+2)}{y(y-1)} = \frac{(y-x-1)(y-x-2)}{y(y-1)}$$~~

$$(x-3)(x-2)y^2 - (x-3)(x-2)y = 11 \cdot 12 y^2 + 11 \cdot 12 (x+1)(x+2)y + (x+1)(x+2)$$

~~$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x+2)} y^2 + 11 \cdot 12 (x+1)(x+2)y + (x+1)(x+2)$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1      2      3      4      5      6      7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{y+x+3}{xy} \\ \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \\ xy = (x-4)(y+4) \\ xy = xy + 4x - 4y - 16 \\ x - y = 4 \end{array} \right.$$

$$B = 101 \cdot x = 303$$

$$C = 11 \cdot y = 11$$

$$(303, 303, 11)$$

$$\begin{aligned} M &= (x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = \\ &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = \cancel{4(x^2 - 2xy + y^2)} = 4(x-y)^2 = 16 \cdot 4 = \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\binom{2}{x}}{\binom{4}{x}} = \frac{\frac{x!}{2!(x-2)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} = \frac{4!(x-4)!}{2!(x-2)!} = \frac{4!(x-4)!}{(x-3)(x-2)} = \\ &= \frac{3 \cdot 4}{(x-3)(x-2)} \end{aligned}$$

$$P_2 = \frac{\binom{y-2}{x}}{\binom{8}{x}} = \frac{y!(x-y)!}{(y-2)!(x-y-1)!} = (y-1) \cdot y \cdot (x-y-1)(x-y) = \frac{y(y-1)}{(x-y)(x-y-1)}$$

$$11 \cdot 3 \cdot 4 (x-3)(x-4) = y(y-1)(x-y-1)(x-y)$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 11}{(x-3)(x-2)} = \frac{y(y-1)}{(x-y)(x-y-1)}$$

$$\begin{aligned} x &= 14 \\ x-y &= 8 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$13 \cdot 2 \cdot (x-y)(x-y-1) = y(y-1)(x-3)(x-2) = (y^2 - y) \cdot$$

$$3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 6 = 7 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 11$$

$$y = 5 : \frac{3 \cdot 4 \cdot 11}{(x-2)(x-3)} = \frac{4 \cdot 5}{(x-5)(x-6)}$$