



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①

План $\rightarrow$

где a - цифра

Число A представляет из себя число вида $\overline{a a a a}$, где a - цифра

Такое число можно представить как $1111 \cdot a =$

$= 11 \cdot 101 \cdot a$. Тогда числа B и C являются делителями 11 и 101 .

В связка $\Rightarrow \cancel{C \nmid 101}, B \mid C \mid 101 \Rightarrow C \nmid 101$, B - простое

число $\Rightarrow B \mid 101 \Rightarrow B = 101$. B не делится на 101 и

11 одновременно $\Rightarrow B \nmid 101, C \nmid 11$. Одна из цифр

B должна быть равна 101 . $B = 101 \cdot k = k0k \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 202$. Одна из цифр $C = 3 \Rightarrow C = 111 = 11 \cdot 3$

$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow C = 33$. A, B, C - точный квадрат, $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABC = 101 \cdot 11 \cdot k = 2 \cdot 101 \cdot 11 = 101^2 \cdot 11^2$. $2 \cdot 3 \cdot k \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot k$

точный квадрат $\Rightarrow$ в разложении числа k не

множится 2 и 3 в нечетных степенях,

так как $k \leq 10$ (т.е. это цифра) $\Rightarrow k = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 6666$ и это единственная тройка

Ответ: $A = 6666, B = 202, C = 33$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} =$$
$$= \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}$$
$$x, y, x-1, y+1 \neq 0 \Rightarrow x+y+2=0, \text{ либо } \frac{(x-1)(y+1)}{xy} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{xy-y+x-1-xy}{x+y+2} = 0 \Rightarrow x=y+1 \Rightarrow \text{либо } x+y+2=0, \text{ либо } x=y+2.$$

$x=y+2$. Если $x=y+1$. $M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y =$
 $= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$. $x+y+2 > 0$ т.к.
 x, y - положительные числа $\Rightarrow$ этот вариант
не реализуется
Ответ: $M=1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0, \text{ ~~или } \cos \pi(x-y) = 0~~$$

$$2 \cos \left(\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi x - \pi x - \pi y}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0, \cos \pi x$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x + y = 2n + 1$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}, \text{ любое}$$

Исходные уравнения являются этим уравнениями поро-
 $\Rightarrow \begin{cases} x - y = 2n + 1 \\ y = x - 2n - 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) ~~или~~ $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x + y = x - y + 2(x + y) = 2(n + 1) + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ для целых x и y эту разность эквива-
 лентно $x - y = 2n + 1 \Rightarrow y = x - 2n - 1$ взаимная нечетность.
 $a \cos \frac{x}{5} + a \cos \frac{y}{5} < \frac{3\pi}{2}$. Значит $a \cos$ или $a \sin$
 можно было записать нулевым либо его аргумен-
 т равен $\pm \frac{\pi}{2}$ в промежутке $[-1, 1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1, -1 \leq \frac{y}{5} \leq 1 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5.$$

или $0 - \frac{\pi}{2} \leq a \cos \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq a \sin \leq \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2}$ возникает
 только если $a \cos$ равен π , а $a \sin$ $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{5} = 1, \frac{y}{5} = -1 \Rightarrow x = 5, y = -5$ — только в
 этом случае не нарушается неравенство.
 Можно посчитать сколько из x, y можно
 собрать наборов взаимной нечетности удовлетворяющих
 условиям.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решения $x: -5, -3, -1, 1, 3, 5 \in \mathbb{Z}$
Решения $y: -4, -2, 0, 2, 4 \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$ вариантов $6 - 5 = 30$, но ~~если~~ в.арегс их
вариант $x=5, y=-4 \Rightarrow$ вариант 1 не подходит $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 30 - 1 = 29$

Решения $x: -4, -2, 0, 2, 4 \in \mathbb{Z}$ $5 - 4 = 20$
Решения $y: -3, -1, 1, 3 \in \mathbb{Z}$
Тогда всего вариантов $20 + 25 = 45$

Ответ: а) $\begin{cases} y = 2n + 1 - 3x \\ y = x - 2n - 1 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$; б) ~~45~~ 48 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④

$P = \frac{n}{N}$, P - вероятность, n - количество благоприятных исходов, N - общее количество исходов.

Пусть билетов n . Вероятность что k одному из них попадет билет $P = \frac{n}{N}$. Дальше количество билетов n и вероят $\frac{n-1}{N-1}$ уменьшится на 1 и

второй вероятностью $P = \frac{n-1}{N-1}$. Так как эти два события зависят произойти одновременно вероятности надо перемножить $\Rightarrow P_{0.1} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$. По

поступление новых билетов вероятностью $P_1 = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} = \frac{12}{N(N-1)}$, P_2 - вероятность после поступления

новых билетов $P_2 = \frac{1}{2} P_1 = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$, n_k - новое количество билетов

$$\frac{n_k(n_k-1)}{N(N-1)} = \frac{12}{N(N-1)} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow n_k^2 - n_k - 30 = 0 \Rightarrow (n_k - 6)(n_k + 5) = 0 \Rightarrow n_k = 6$$

Ответ: выданы 6 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$x - 3\sqrt{2}\sin\alpha = 0$ — вертикальная прямая

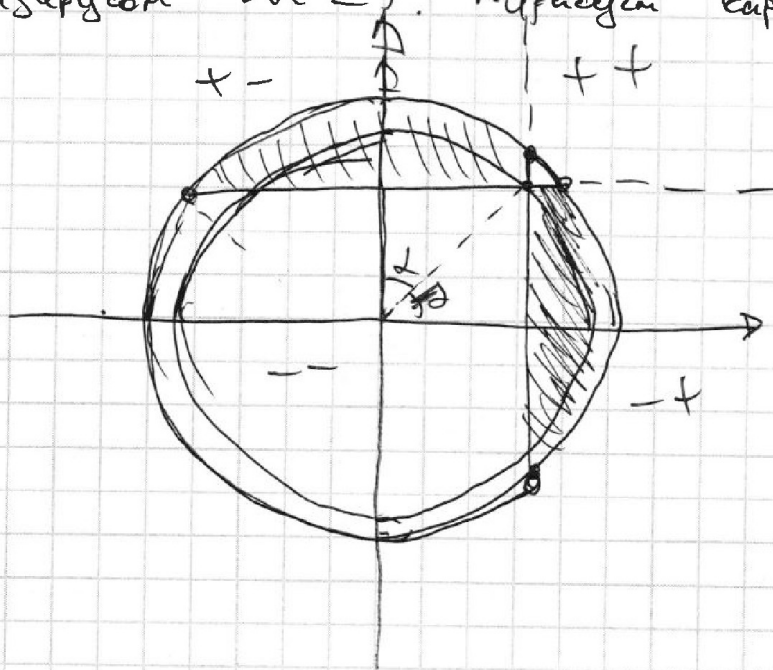
$y - 3\sqrt{2}\cos\alpha = 0$ — горизонтальная. Точкой пересечения будет $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$. Можно заметить, что

$$(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = 18(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ расстояние от центра до точки пересечения

константа $\Rightarrow$ и линия не окружности

$\Rightarrow$ ГМТ всех точек при изменении α — окружность с радиусом $3\sqrt{2} < 5$. Нарисуем картинку:



Подставившее в первое уравнение в скобках знак плюс или минус радиус знаков и линия внутри окружности. Т.е. $x^2 + y^2 \leq 25$ — уравнение для точек лежащих внутри окружности.

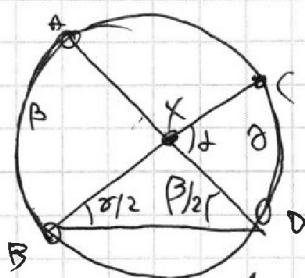


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

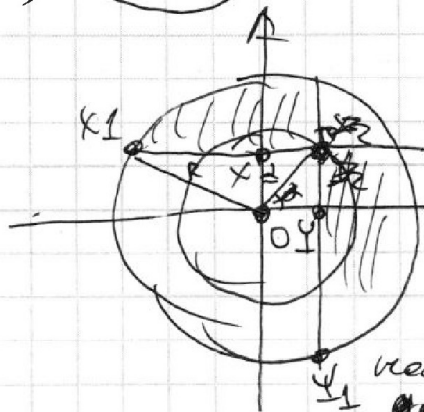
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть есть окружности с известным углом α . Пусть AB соответствует угловому углу β , а CD — γ
 $\Rightarrow \angle ADB = \frac{\beta}{2}$ $\angle CDB = \frac{\gamma}{2}$, α — внешний угол в $\triangle XBD \Rightarrow \alpha = \beta/2 + \gamma/2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \beta + \gamma = 2\alpha \Rightarrow \beta + \gamma = \text{const} \Rightarrow AB + CD = \text{const}$



Эта картинка, которая получается в задаче $\Rightarrow$ угол между хордами фиксируется $\Rightarrow$ длина дуг у фигуры не изменится при изменении $\alpha \Rightarrow$ изменится только длина отрезков.

Обозначим радиус большой окружности за R , а радиус за r . Пусть

длина горизонтального X , а вертикального Y .

X, Y — тогда $OX = r \sin \alpha$, по теореме Пифагора $KX_1 = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}$, аналогично $YY_1 = \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}$. Тогда
 $\Phi(\alpha) = l_1 + l_2 + 2(KX_1 + YY_1)$, $\Phi(\alpha) = \max \Rightarrow KX_1 + YY_1 = \max$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} = \max \Rightarrow (\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha})' =$$

$$= \frac{-(r^2 \sin 2\alpha)}{2\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{-(r^2 \cos 2\alpha)}{2\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} = \max \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} \quad | \cdot \Rightarrow \frac{\cos 2\alpha}{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R^2 \cos 2\alpha - r^2 \cos 4\alpha) = (R^2 \sin 2\alpha - r^2 \sin 4\alpha) \Rightarrow r^2 (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cos 4\alpha) =$$

$$= r^2 (\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) \Rightarrow \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 0 \quad \text{т.к. } \sin 2\alpha \neq 0$$

или введем, $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Phi(\alpha) = l_1 + l_2 + 2\left(\sqrt{R^2 - r^2 \frac{1}{2}} + \sqrt{R^2 - r^2 \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{5\pi \cdot 5}{2} + 2\left(\sqrt{25 - 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{25 - 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}\right) = 5\pi + 2\sqrt{25 - 9} =$$

$$= 5\pi + 8$$

Ответ: $\Phi(\alpha) = 5\pi + 8$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

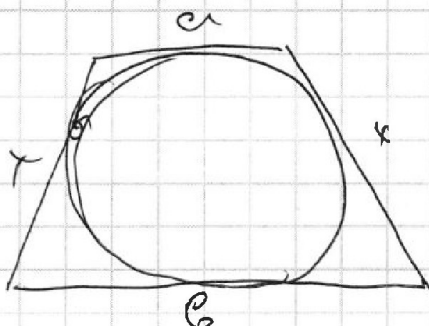
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

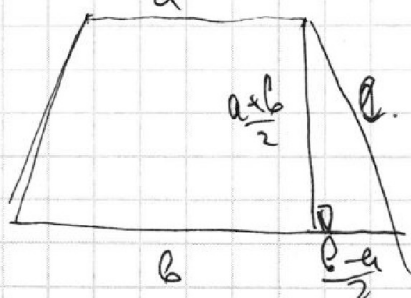
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7

Решение



Пусть верхнее основание пирамиды a , нижнее b . Тогда в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через все точки середины соответствующих сторон оснований, получаем вписанную трапецию, ~~по своей равнобедренности~~ в силу симметрии ~~трапеция~~ равнобедренная. Пусть боковая сторона трапеции x . По свойству равнобедренного треугольника $2x = a + b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$. x — высота в трапеции, которую представляет из себя боковая сторона трапеции.



l — длина стороны пирамиды. По теореме Пифагора $l = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab + b^2 - 2ab + a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. Теперь рассмотрим сферу, которая касается всех сторон пирамиды. Рассмотрим сечение сферой, содержащее две параллельные диагонали верхнего и нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \left(1 + \frac{(\sqrt{2}-1) - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 - (3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\text{Answer} = \left(1 + \frac{(\sqrt{2}-1) - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 - (3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for a geometry problem involving a cube and a sphere.

Top left: A trapezoid with top base a , bottom base b , and slanted sides $\frac{a+b}{2}$.

Top right: A trapezoid with top base a , bottom base b , and slanted sides $\frac{a+b}{2}$. Next to it, a calculation for the area of a rhombus:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = \frac{2a^2 + 2b^2}{2} = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

Below the trapezoids, a 3D diagram of a cube with side length $\sqrt{2}b$. A sphere is inscribed within the cube. The distance from the center of the sphere to the top face is labeled $\frac{a+b}{2}$.

Bottom: A detailed diagram of a sphere with radius R and diameter $\sqrt{2}a$. The sphere is inscribed within a cube. The distance from the center of the sphere to the top face is labeled $\frac{a+b}{2}$. The distance from the center of the sphere to the bottom face is labeled $\frac{a-b}{2}$. The distance from the center of the sphere to the side face is labeled $\frac{a+b}{2}$.

Below the sphere diagram, a series of equations:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{a\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}\right) + b\left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2}\right)} \cdot \sqrt{2}$$
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot (a+b)$$
$$a^2 + b^2 = (\sqrt{2}-1)(a^2 + 2ab + b^2) \Rightarrow$$
$$x^2 + 1 = (\sqrt{2}-1)(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2-\sqrt{2})x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + (2-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

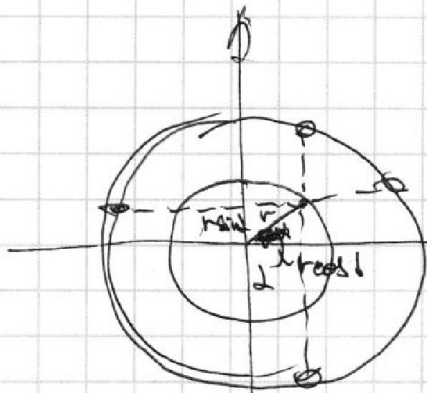
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2(\alpha + \beta)} &= \\ &= \sqrt{R^2 - r^2 (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha - 2r^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta} = \\ &= \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2r^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \end{aligned}$$

$$2(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) \leq \text{max}$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha})' = \\ &\frac{\cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (R^2 - r^2 \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha = (R^2 - r^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

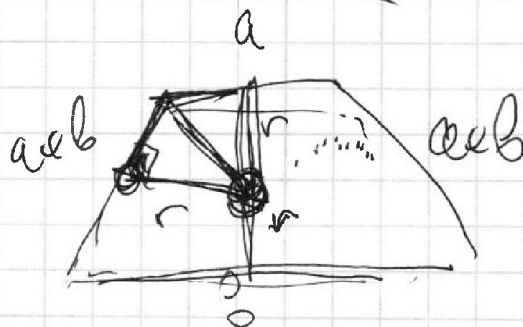
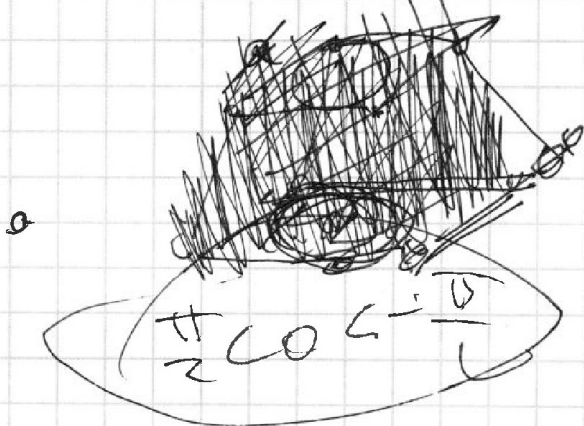
$$\Rightarrow R^2 \cos^2 \alpha - r^2 \cos^4 \alpha = R^2 \sin^2 \alpha - r^2 \sin^4 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = r^2 (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = r^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{16} \cdot 2 \cdot \sqrt{52 - 48 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{25 - 9} = 2 \cdot 4 = 8$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

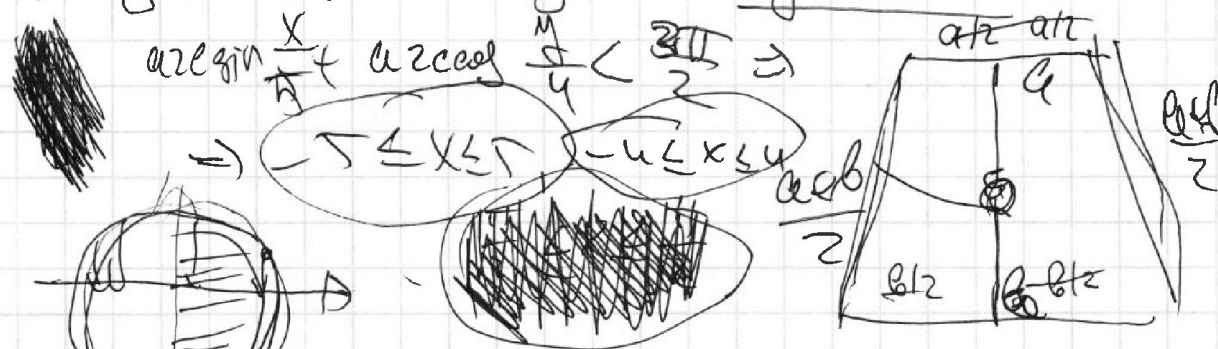
$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = \cos \pi y (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y)$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y \Rightarrow$$

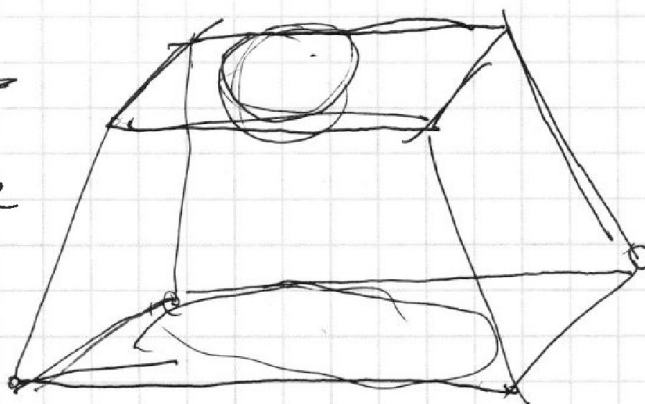
$$\Rightarrow \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y =$$

$$= \cos 2\pi x \cos 2\pi y + \cos \pi(x+y) = 0 \Rightarrow \cos \pi(x+y) = -1$$

$$\Rightarrow \pi(x+y) = 2\pi n + \pi \Rightarrow x+y = 2n+1 \Rightarrow y = 2n+1-x$$



$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} = a^2 + b^2$$



х результаты:

$-5, -3, -1, 1, 3$ $-4, -2, 0, 2, 4$

$6 - 5 - 1 = 28$ $28 \times 20 = 560$ $5 - 2 = 20$

$-4, -2, 0, 2, 4$ $-3, -1, 1, -4, -5$



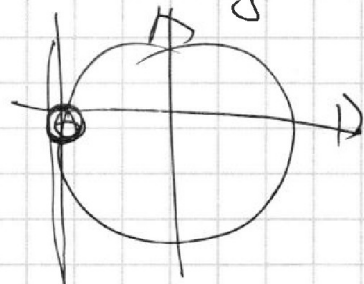
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

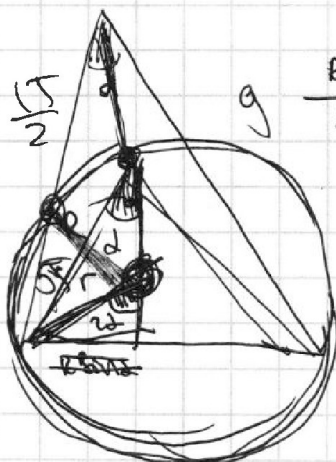
СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos \pi x (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y = \\ = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y &= \cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0 \\ \Rightarrow \cos \pi(x+y) &= -1 \Rightarrow \pi(x+y) = 2n\pi + \pi \Rightarrow x+y = 2n+1 \end{aligned}$$



$$\frac{n(n-1)}{n(n-1)}$$



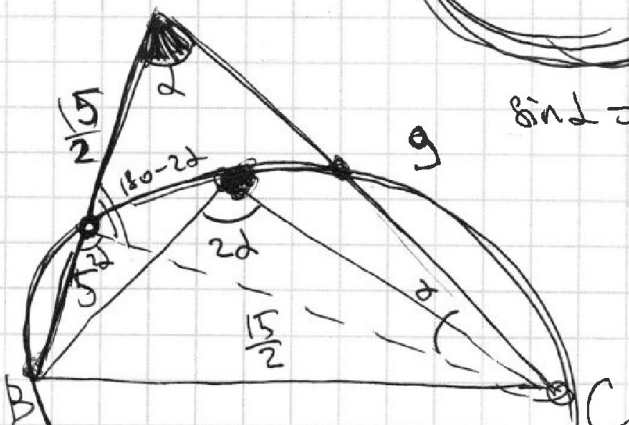
$$\begin{aligned} \frac{R \sin \angle}{\sin 2\alpha} &= \frac{R \sin \angle}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{R}{2 \cos \alpha} \end{aligned}$$



$$\sin \angle = ?$$

$$\cos \angle = \frac{g}{15} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin \angle &= \sqrt{1 - \frac{11}{225}} = \\ &= \sqrt{\frac{225-11}{225}} = \\ &= \sqrt{\frac{1144}{225}} = \frac{12}{15} \end{aligned}$$



$$n(n-1) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 =$$

$$n \Rightarrow n(n-1) = 30 = 6 \cdot 5$$

$$n(n-1) = \frac{1}{2} \cdot k(k-1)$$

$$n(n-1) = \frac{1}{2} k(k-1)$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 2n = 5x^2 - 5x \Rightarrow 2n^2 - 2n = 5 \cdot n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{15}{2} + 5 \cdot 9 \cdot \frac{12}{15} = \\ &= \frac{15}{2} + 36 = \frac{15 + 72}{2} = \frac{87}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

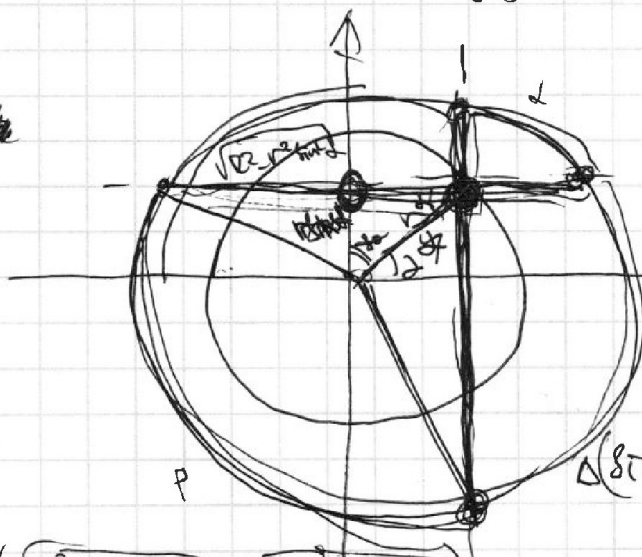
$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 18$$

$$(\sin \alpha)' = (\sin \alpha \cos \alpha)' = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$18 \alpha = \alpha - 2\alpha \cos 2\alpha$$



$$\frac{2+\alpha}{2}$$

$$\frac{2+\alpha}{2} = 0 \Rightarrow 2+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$2(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) = \max$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) = 0$$

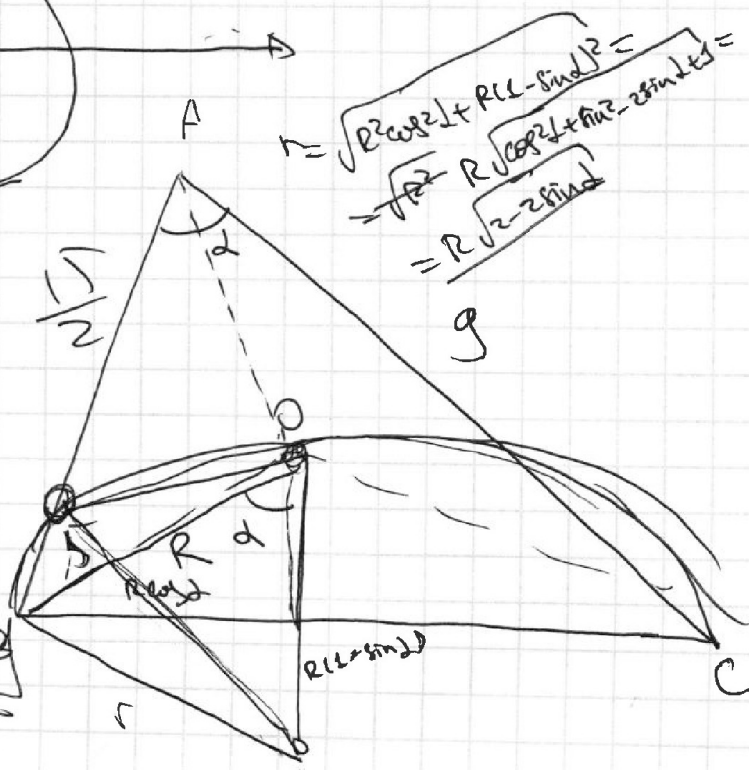
$$-\frac{r \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \Rightarrow (R^2 - r^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha = (R^2 - r^2 \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

$$R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = r^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = (R^2 - r^2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~A - два значения~~

1 цифра A - однозначные цифры, ~~одна~~ цифра 2, одна цифра?

$$A = n - 1111 = 11 \cdot 101 \cdot n, \text{ три значения}$$

~~одно из значений~~ $n = 1, 4, 1$ - хвосты

$$B = 1111, C = 11 \Rightarrow B = 222$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot 2, n = 22 \cdot n$$

$$A = n \cdot 1111 = 11 \cdot 101 \cdot n, C : 101 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 222 \Rightarrow AB = B = 2 \cdot 101$$

$$\Rightarrow A = C = 11 \text{ и одна из цифр } \Rightarrow C = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 1, 4, 5 \Rightarrow 3 \text{ варианта}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}, \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(y+1) = xy \Rightarrow xy + x - y - 1 = xy \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3xy = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - y^3 - 3xy = (y^2 + y + 1) - 3xy$$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3(y+1)y = 3y(y+1) - 3y(y+1) + 1 = 1$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\Rightarrow \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = 0 \Rightarrow$$

$$2) \cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0 \Rightarrow \cos \pi(x+y) = -1 \Rightarrow \pi(x+y) = 2\pi n + \pi$$

$$\Rightarrow x+y = 2n+1$$

$$\text{иначе } \frac{y}{x} \cdot \frac{5}{2} = \frac{x}{x} \Rightarrow x = 10$$

$$a \leq \sin \frac{x}{x} + a \leq \cos \frac{y}{y} < \frac{3\pi}{2}$$