



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①

Пусть k

где a - цифра

Число A представляется из себя число вида \overline{aaaa} , где a - цифра

Такое число можно представить как $1111 \cdot a =$

$= 11 \cdot 101 \cdot a$. Тогда числа B и C являются делителями 11 и 101 .

B двузначное $\Rightarrow B < 101$, $C < 101 \Rightarrow C \cdot 101$, B трехзначное $\Rightarrow B < 101 \cdot 11 \Rightarrow 1111 \Rightarrow B$ не делится на 101 и 11 одновременно $\Rightarrow B: 101, C: 11$. Одна из цифр

B должна быть равна сумме $B = 101 \cdot k = k0k \Rightarrow k=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 202$. Одна из цифр $C = 3 \Rightarrow C = 11 \cdot 3 = 33$

$\Rightarrow a=3 \Rightarrow C = 33$. $A = B \cdot C$ - точный квадрат

$\Rightarrow ABC = 101 \cdot 11 \cdot n = 2 \cdot 101 \cdot 11 \cdot n = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot n$

точный квадрат \Rightarrow в разложении числа n не должно быть множителей 2 и 3 в нечетных степенях

также $n < 10$ (т.е. это цифра) $\Rightarrow n = 7 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 6666$ и это действительно тройка

Ответ: $A = 6666, B = 202, C = 33$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} =$$
$$= \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$x, y, x-1, y+1 \neq 0 \Rightarrow x+y+2=0$, либо $\frac{(x-1)(y+1)}{x+y+2} = \frac{xy}{x+y+2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{xy - y + x - 1 - xy}{x+y+2} = 0 \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow \text{либо } x+y+2=0, \text{ либо}$$

$x = y+2$. Если $x = y+1$. $M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y =$

$$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1. \quad x+y+2 > 0 \text{ т.к.}$$

x, y - положительные числа \Rightarrow этот вариант не реализуется

Ответ: $M = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

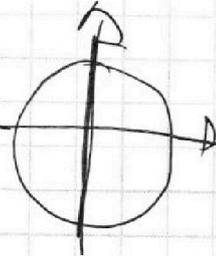
$$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0, \text{ ~~или } \sin \pi(x+y) = 0 \text{ или } \sin \pi x = 0~~$$

$$2 \cos \left(\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi x - \pi x - \pi y}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{3\pi x + \pi y}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi x - \pi y}{2} \right) = 0, \cos \pi x$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x + y = 2n + 1$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}, \text{ любое}$$



Имена x, y удовлетворяющие этим уравнениям похо-
 $\Rightarrow \begin{cases} x - y = 2n + 1 \\ y = x - 2n - 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$b) \text{ ~~или } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x + y = x - y + 2(x + y) = 2(n + 1) + 1 \Rightarrow~~$$

\Rightarrow для целых x и целых y эту уравнение эквива-
 лентно $x - y = 2n + 1 \Rightarrow y = x - 2n - 1$ физическая значимость.

$a \cos \frac{x}{a} + a \cos \frac{y}{a} < \frac{3\pi}{2}$. Значит $a \cos \frac{x}{a}$ или $a \cos \frac{y}{a}$
 можно было записать нулю тогда его аргумент
 равен $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1, -1 \leq \frac{y}{a} \leq 1 \Rightarrow -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a.$$

или $0 - \frac{\pi}{2} \leq a \cos \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}, 0 < a \cos \frac{y}{a} \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}$ возникает
 только если $a \cos \frac{x}{a} = \pi$, а $a \cos \frac{y}{a} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = 1, \frac{y}{a} = -1 \Rightarrow x = a, y = -a$ - только в
 этом случае нарушается циркулярность.
 Можно посчитать сколько из x, y можно
 собрать наборов функций действительности $\frac{3\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Возможны $x: -5, -3, -1, 1, 3, 5 \in \mathbb{Z}$
возможны $y: -4, -2, 0, 2, 4 \in \mathbb{Z}$
 \Rightarrow вариант $6 - 5 = 30$, но ~~если~~ в.аргументов x
вариант $x = 5, y = -4 \Rightarrow$ вариант $на 1 меньше \Rightarrow$
 $\Rightarrow 30 - 1 = 29$

возможны $x: -4, -2, 0, 2, 4 \in \mathbb{Z}$ $5 - 4 = 20$
возможны $y: -3, -1, 1, 3 \in \mathbb{Z}$
Тогда всего вариантов $20 \cdot 25 = 48$

Ответ: а) ~~30~~ $\begin{cases} y = 2n + 1 - 3x \\ y = x - 2n - 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$ б) ~~48~~ 48 пар



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④

$P = \frac{n}{N}$, P - вероятность, n - количество благоприятных исходов, N - общее количество исходов.

Пусть билетов n . Вероятность что k одному из них попадет билет $P = \frac{n}{N}$. Далее количество билетов n и людей $(n - \text{количество человек})$ уменьшится на 1 и второму вероятност $P = \frac{n-1}{N-1}$. Так как эти два события зависят произойти одновременно вероятности надо перемножить $\Rightarrow P_{0.1k} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$. По постановке новых билетов вероятност $P_1 =$

$= \frac{4 \cdot (4-1)}{N(N-1)} = \frac{12}{N(N-1)}$, P_2 - вероятност после покупки новых билетов $P_2 = \frac{1}{2} P_1 = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$, n_k - новое количество билетов

$$\frac{n_k(n_k-1)}{N(N-1)} = \frac{12}{N(N-1)} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow n_k^2 - n_k - 30 = 0 \Rightarrow (n_k - 6)(n_k + 7) = 0 \Rightarrow n_k = 6$$

Ответ: выданы 6 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$x - 3\sqrt{2}\sin\alpha = 0$ — вертикальная прямая

$y - 3\sqrt{2}\cos\alpha = 0$ — горизонтальная. Точкой пересечения

будет $(3\sqrt{2}\sin\alpha, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$. Можно заметить, что

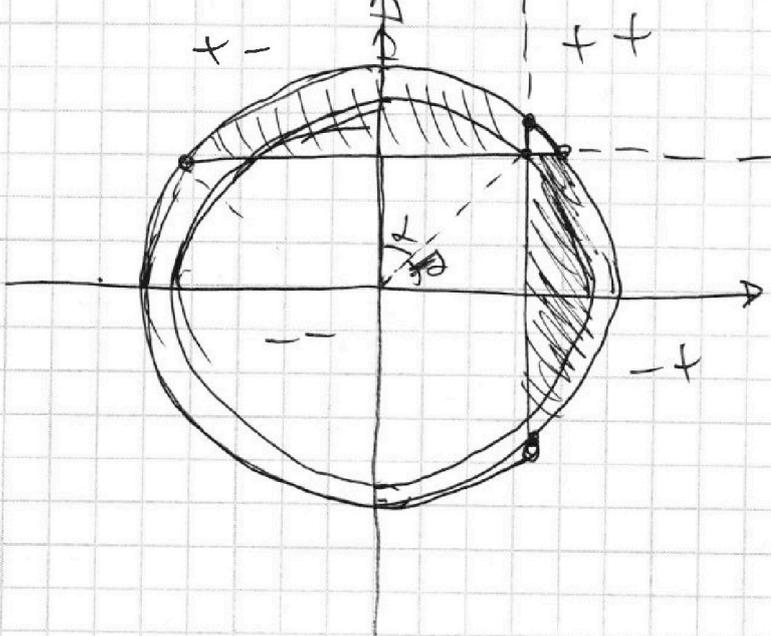
$$(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = 18(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow$$

\Rightarrow расстояние от центра O до точки

пересечения константа \Rightarrow и лежит на окружности

\Rightarrow ГМТ всех точек при изменении α — окружность

с радиусом $3\sqrt{2} < 5$. Нарисуем картинку:



Получившиеся в первом уравнении в скобках
здесь должны быть разные знаки и лежать
внутри окружности. т.е. $x^2 + y^2 \leq 25$ — уравнение
для точек лежащих внутри окружности.

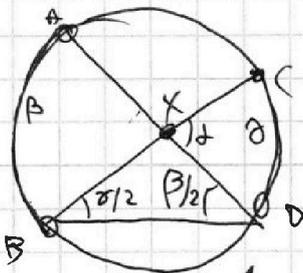


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

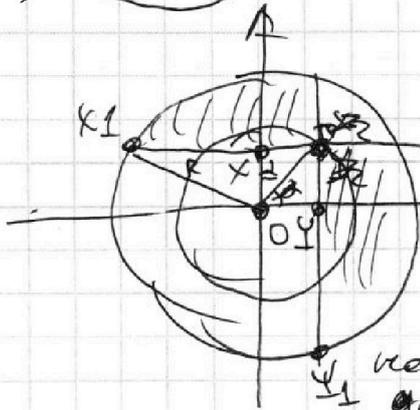
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть есть окружность с известным углом α . Пусть AC соответствует угловому углу β , и $CO = \alpha$
 $\Rightarrow \angle ADB = \frac{\alpha}{2}$ ($\angle CDB = \frac{\alpha}{2}$, α - вписанный угол в $\triangle KBD$) $\Rightarrow \alpha = \beta/2 + \alpha/2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \beta + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \beta + \alpha = \text{const} \Rightarrow AB + CD = \text{const}$



Эта картинка, которая получается в задаче \Rightarrow угол между хордами фиксируется \Rightarrow длина дуги у фигуры не изменится при изменении $\alpha \Rightarrow$ изменится только длина отрезков.

Обозначим радиус большой окружности за R , а малой за r . Пусть плоскость горизонтальна X , а вершина каска Y .

$OX = r \sin \alpha$, по теореме Пифагора $KX_1 = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}$, аналогично $YY_1 = \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}$. Тогда $\Phi(\alpha) = l_1 + l_2 + 2(KX_1 + YY_1)$, $\Phi(\alpha) = \max \Rightarrow KX_1 + YY_1 = \max$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} = \max \Rightarrow (\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha})' =$$

$$= \frac{-2r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{-2r^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} = \max \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} \quad | \cdot \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R^2 \cos^2 \alpha - r^2 \cos^2 \alpha) = (R^2 \sin^2 \alpha - r^2 \sin^2 \alpha) \Rightarrow r^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0 \text{ т.к. } \sin^2 \alpha \neq \cos^2 \alpha$$

или вместе, $\sin^2 \alpha < \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Phi(\alpha) = l_1 + l_2 + 2\left(\sqrt{R^2 - r^2 \frac{1}{2}} + \sqrt{R^2 - r^2 \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 5}{2} + 2\left(\sqrt{25 - 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{25 - 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}\right) = 5\pi + 2\sqrt{25 - 9} =$$

$$= 5\pi + 8$$

Ответ: $\Phi(\alpha) = 5\pi + 8$

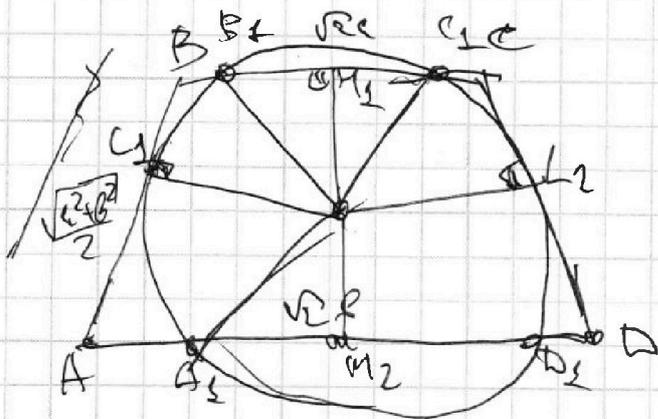


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$BM_1 \perp BC = \sqrt{2}a$ и $OM_1 = \sqrt{2}b$ м.к. Это фактотампи.
 $BM_1 \perp BC = a$, $AM_2 \perp AD = b$ м.к. в сечениях плоскостью
 получается сфера со стороной равной
 стороне квадрата м.к. вписанный
 окружностью. $AM_2 = \frac{a}{2}$, $AM_2 = AM_2 - AM_2 =$
 $= \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}\right)$. По свойству точки
 тогда $BM_1 = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}\right)} = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{\sqrt{2}-1}$,
 аналогично $AM_2 = \frac{b}{2} \sqrt{\sqrt{2}-1}$
 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} \quad | \cdot 2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 = (\sqrt{2}-1)a^2 + (\sqrt{2}-1)b^2 + 2(\sqrt{2}-1)ab \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2-\sqrt{2}+1)a^2 + (2-\sqrt{2}+1)b^2 - 2(\sqrt{2}-1)ab = 0 \quad (= \frac{a}{b} \text{ пусть } x = \frac{a}{b}, \frac{a}{b} < 1)$
 $(3-\sqrt{2})x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + (3-\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 0$, т.к. $b > a, \frac{a}{b} < 1$
 $\Rightarrow x = \frac{(3-\sqrt{2}) - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 - (3-\sqrt{2})^2}}{2-\sqrt{2}}$
 $\frac{a}{b}$ Пусть $x = y$ — искомое отношение \Rightarrow
 $\frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 4}{b^2} = \left(\frac{a+b}{b}\right)^2 = (1+x)^2 =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \left(1 + \frac{(\sqrt{2}-1) - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 - (3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\text{Ответ} = \left(1 + \frac{(\sqrt{2}-1) - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 - (3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}} \right)^2$$

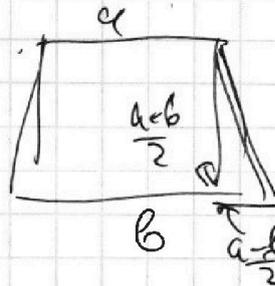
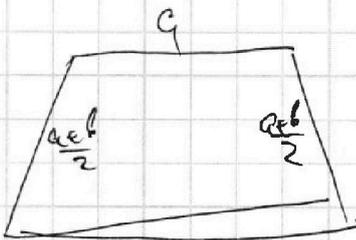


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

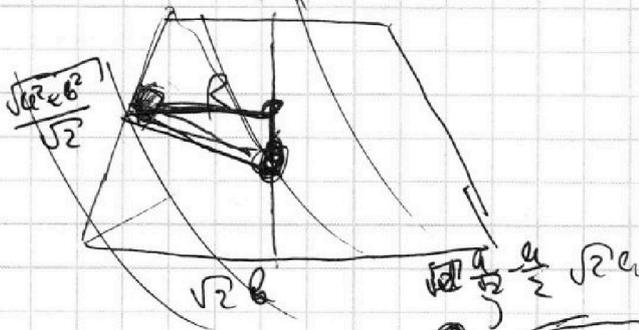
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

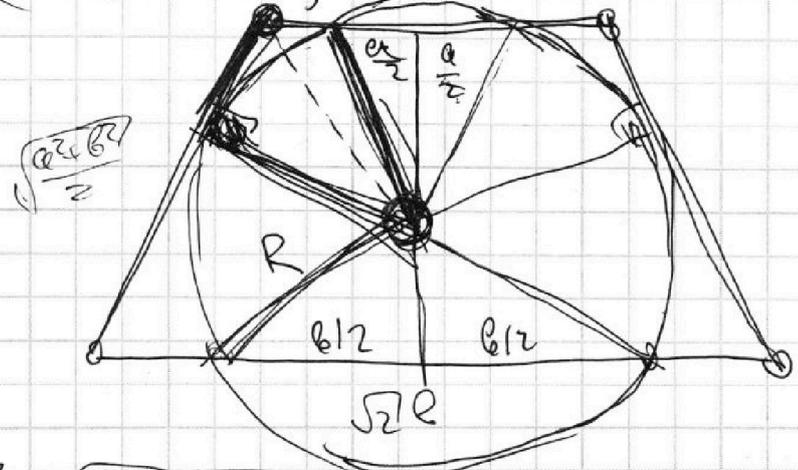


$$\begin{aligned} & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \\ & = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = \\ & = \frac{2a^2 + 2b^2}{2} = a^2 + b^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2) l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$



$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{a\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}\right)^2 + b\left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot (a+b)$$

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{2}-1)(a^2 + 2ab + b^2) \quad | -b^2$$

$$x^2 + 1 = (\sqrt{2}-1)(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{2})x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + (2-\sqrt{2}) = 0 \neq$$

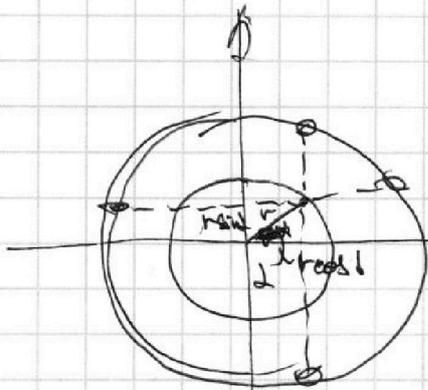


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2(\alpha + \beta)} &= \\ &= \sqrt{R^2 - r^2 (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha - 2r \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2r \cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \end{aligned}$$

$$2(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) = 20 \text{ max}$$

$$(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha})' =$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow (R^2 - r^2 \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha = (R^2 - r^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

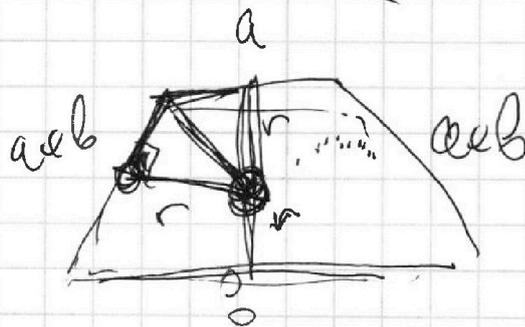
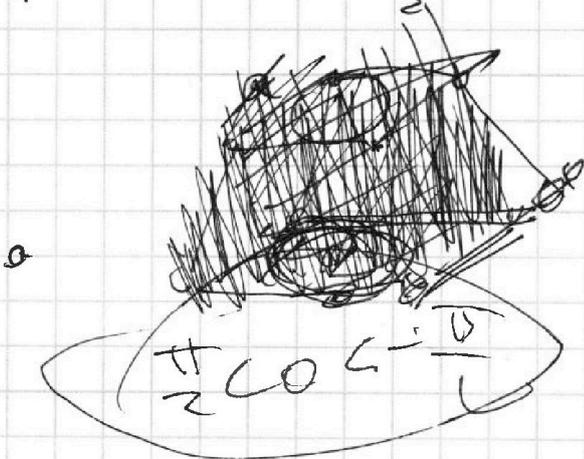
$$\Rightarrow R^2 \cos^2 \alpha - r^2 \cos^4 \alpha = R^2 \sin^2 \alpha - r^2 \sin^4 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = r^2 (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = r^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{16} \cdot 2 \cdot \sqrt{52 - 48 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{25 - 9} = 2 \cdot 4 = 8$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

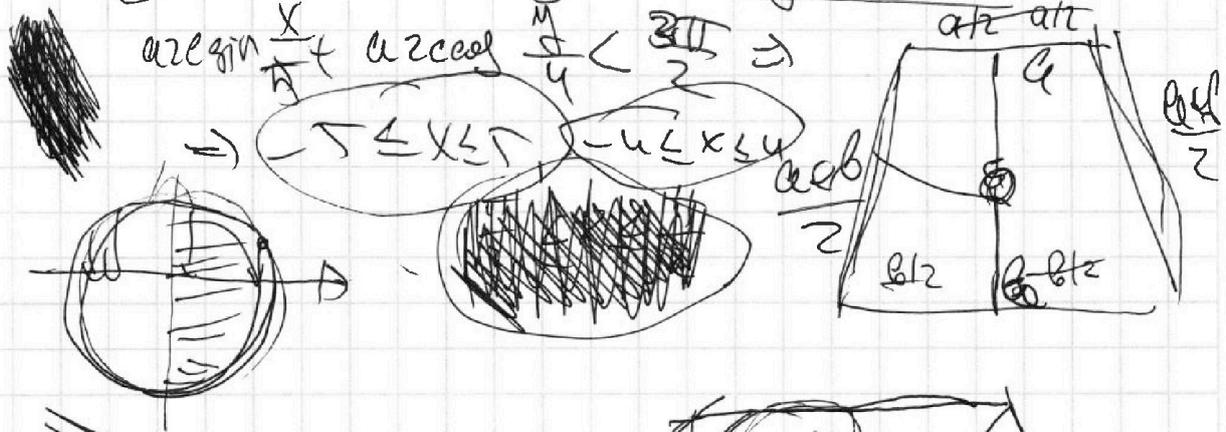
$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = \cos \pi y (\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x)$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y \Rightarrow$$

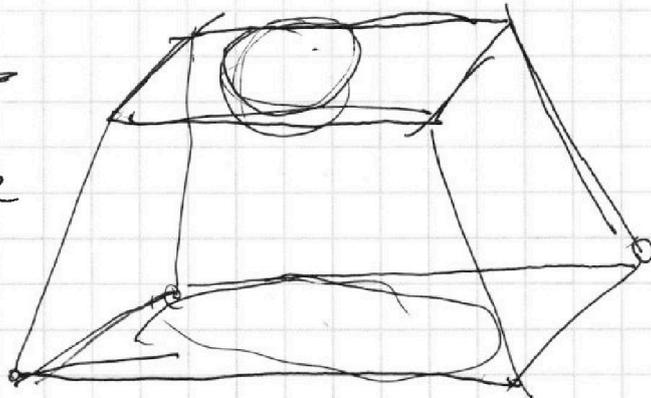
$$\Rightarrow \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y =$$

$$= \cos 2\pi x \cos 2\pi y + \cos \pi(x+y) = 0 \Rightarrow \cos \pi(x+y) = -1 \neq$$

$$\Rightarrow \pi(x+y) = 2\pi n + \pi \Rightarrow x+y = 2n+1 \Rightarrow y = 2n+1-x$$



$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} = a^2 + b^2$$



x варианты:

$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3, -1, 1, 3 \\ \pi^2, 0, \pi, 4 \end{matrix}$

$6 - 5 - 1 = 20$ $25 + 20 = 45$

$-4, -2, 0, 2, 4$ $5 - 2 = 20$

$-3, -1, 1, -4$



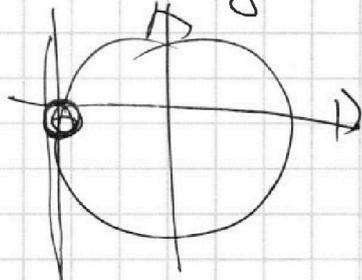
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарно количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

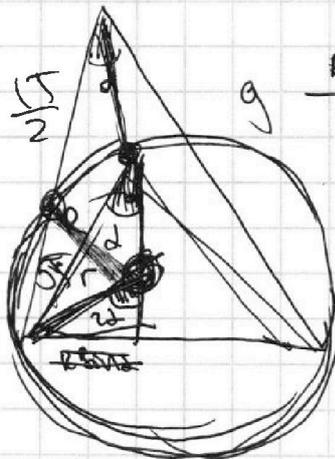
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

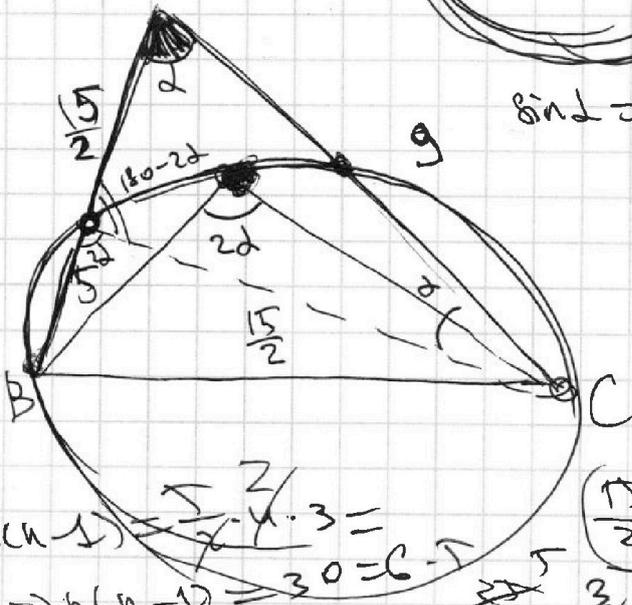
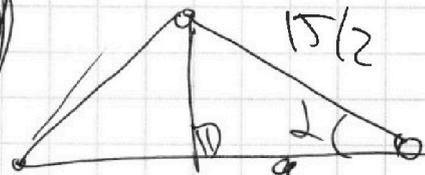
$$\begin{aligned} \cos \pi x (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y = \\ = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y &= \cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0 \\ \Rightarrow \cos \pi(x+y) = -1 \Rightarrow \pi(x+y) = 2\pi n + \pi \Rightarrow x+y &= 2n+1 \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$



$$\begin{aligned} \frac{R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} &= \frac{R \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{R}{2 \cos \alpha} \end{aligned}$$



$$\sin \alpha = ?$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{15}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin \alpha &= \sqrt{1 - \frac{g^2}{225}} = \\ &= \sqrt{\frac{225 - g^2}{225}} = \\ &= \frac{\sqrt{144}}{15} = \frac{12}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(n-1) &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \\ n &\Rightarrow n(n-1) = 30 = 6 \cdot 5 \\ n(n-1) &= \frac{1}{2} k(k-1) \\ \Rightarrow 2n^2 - 2n &= 5 \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 2n = 5 \cdot 4 \Rightarrow 2n^2 - 2n - 20 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

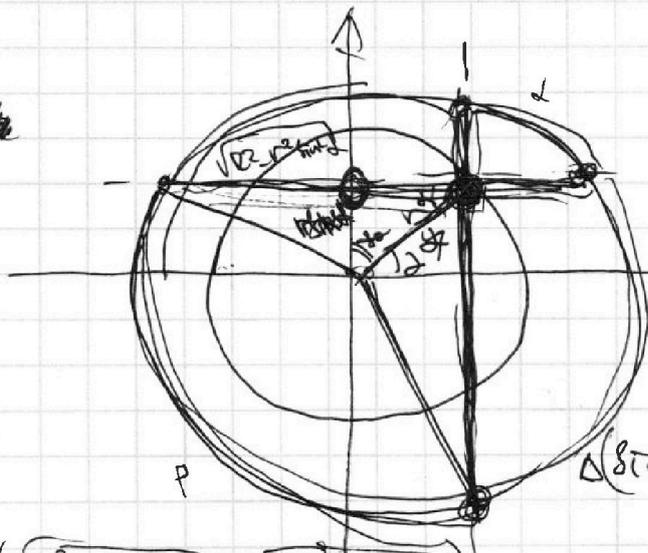
$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 27$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 18$$

$$(\sin \alpha)' = (\sin \alpha + \cos \alpha)'$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha - \cos \alpha$$



$$\frac{2+\beta}{\alpha}$$

$$\frac{2+\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2+\beta = \alpha \Rightarrow \alpha + \beta = 180$$

$$2(\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) = \max$$

$$(\sin \alpha)' = 2 \cos \alpha$$

$$(\cos \alpha)' = -2 \sin \alpha$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) =$$

$$-\frac{2r \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{2r \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{R^2 - r^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \Rightarrow (R^2 - r^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha = (R^2 - r^2 \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

$$R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = r^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$R^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = (R^2 - r^2) (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{a}{b} = \frac{g}{c} \Rightarrow \sqrt{(2-y)^2 + y^2} =$
 $\Rightarrow \sqrt{4-4y+y^2+y^2} =$
 $x = 2-y$
 $(2-y)^2 - y^2 =$

$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$
 $x^2 + y^2 \leq 25$

$\cos \beta + \cos \gamma = \cos \alpha$
 $R = (3\sqrt{2})^2 - 1 = 9 \cdot 2 - 1 = 18$

$2R \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}$
 $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
 $\# \textcircled{1}$

$x + y + 2 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -2 - y$

$(-2-y)^2 - y^2 =$

$\frac{2\pi x + \pi y + \pi y}{2} = \frac{2\pi x + \pi y}{2}$

$r = \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + R^2 \sin^2 \gamma} =$
 $= \sqrt{R^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \gamma)} =$
 $= R \sqrt{2 - 2 \sin \alpha}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~A - два значения~~

1 цифра A - однозначные цифры, ~~одна цифра~~ цифра 2, одна цифра?

~~A = n - 1111 = 1111 - n~~ ~~11-101-n~~, ~~трёхзначные~~

~~одно из значений~~ ~~н = 1, 4, 1 - хорешее~~

~~B = 1111, C = 11~~ ~~B = 222~~

~~A = 1111, C = 11~~ ~~n = 22 + n~~

A = n · 1111 = 11 · 101 · n, C : 101 ⇒ B : 101 ⇒

⇒ B = 222 ⇒ AB = B = 2 · 101

⇒ A = C = 11 и одна из цифр ⇒ C = 33 ⇒

⇒ n = 1, 4, 5 ⇒ 3 варианта

~~$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$~~

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$ $\frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy} ⇒$

⇒ (x-1)(y+1) = xy ⇒ xy + x - y - 1 = xy ⇒ x - y = 1 ⇒ x = y + 1

$x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3xy = (y+1+y)(1)$

$= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y(y+1) = 3y(y+1) - 3y(y+1) + 1 = 1$

(sin πx + sin πy) sin πx = (cos πx + cos πy) cos πx ⇒

⇒ sin² πx + sin πx · sin πy = cos² πx + cos πx cos πy

⇒ cos² πx - sin² πx + cos πx cos πy - sin πx sin πy = 0 ⇒

2) cos 2πx + cos π(x+y) = 0 ⇒ cos π(x+y) = -1 ⇒ x+y = 2n+1

⇒ x+y = 2n+1

и $\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} ⇒ x = 2$

$a_2 \sin \frac{x}{2} + a_2 \cos \frac{y}{2} < \frac{3\pi}{2}$